

Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 12

A 12.1

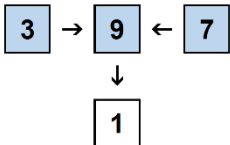
Es fällt auf, dass Zahlen, die sich die Zahlen, die beim Quadrieren zu einer Zahl mit gleichen Endziffern führen, sich jeweils zu 100 ergänzen ($07 + 93 = 57 + 43 = 18 + 82 = 32 + 68 = 100$, außerdem gilt: $49 + 51 = 100$, $99 + 01 = 100$ und $24 + 76 = 100$, $26 + 74 = 100$. Andere Zahlen, die auftreten, ergänzen sich zu 50 oder zu 150:

$$43 + 07 = 24 + 26 = 32 + 18 = 49 + 01 = 50, 93 + 57 = 82 + 68 = 99 + 51 = 74 + 76 = 150$$

A 12.2

$$2^2 = 4, 4^2 = 16 \equiv 6 \pmod{10}, 8^2 = 64 \equiv 4 \pmod{10}$$

Entsprechend ergibt sich eine weitere Grafik:



$$3^2 = 9, 7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10}, 9^2 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

A 12.3

$$37^4 = (37^2)^2 \equiv 69^2 \equiv 61$$

$$34^8 = ((34^2)^2)^2 \equiv (56^2)^2 \equiv 36^2 \equiv 96$$

$$17^{16} = (((17^2)^2)^2)^2 \equiv ((89^2)^2)^2 \equiv (21^2)^2 \equiv 41^2 \equiv 81$$

$$29^{32} = (((((29^2)^2)^2)^2)^2)^2 \equiv (((41^2)^2)^2)^2 \equiv ((81^2)^2)^2 \equiv (61^2)^2 \equiv 21^2 \equiv 41$$

$$71^{64} = (((((((71^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2 \equiv ((((((41^2)^2)^2)^2)^2)^2)^2 \equiv (((((81^2)^2)^2)^2)^2)^2 \equiv (((61^2)^2)^2)^2 \equiv (21^2)^2 \equiv 41^2 \equiv 81$$

$$99^{128} = (99^2)^{64} \equiv (01)^{64} \equiv 01$$

$$42^{256} \equiv 64^{128} \equiv 96^{64} \equiv 16^{32} \equiv 56^{16} \equiv 36^8 \equiv 96^4 \equiv 16^2 \equiv 56$$

$$32^{32} \equiv 24^{16} \equiv 76^8 \equiv 76^4 \equiv 76^2 \equiv 76$$

$$64^{64} \equiv 96^{32} \equiv 16^{16} \equiv 56^8 \equiv 36^4 \equiv 96^2 \equiv 16$$

$$28^{128} \equiv 84^{64} \equiv 56^{32} \equiv 36^{16} \equiv 96^8 \equiv 16^4 \equiv 56^2 \equiv 36$$

A 12.4

$$23^{64} \equiv 23^4 \equiv 41; 23^{128} \equiv 23^8 \equiv 81; 23^{256} \equiv 23^6 \equiv 89; 23^{512} \equiv 23^{12} \equiv 21; 23^{1024} \equiv 23^4 \equiv 41$$

A 12.5

$$23^{46} \equiv 23^6 \equiv 89; 23^{99} \equiv 23^{19} \equiv 87; 23^{111} \equiv 23^{11} \equiv 27; 23^{250} \equiv 23^{10} \equiv 49; 23^{999} \equiv 23^{19} \equiv 87.$$

A 12.6

Die einander gegenüberstehenden Zahlen ergänzen sich zu 50 oder zu 150:

$$23^1 + 23^{11} \equiv 23 + 27 = 50; 23^2 + 23^{12} \equiv 29 + 21 = 50; 23^3 + 23^{13} \equiv 67 + 83 = 150;$$

$$23^4 + 23^{14} \equiv 41 + 09 = 50; 23^5 + 23^{15} \equiv 43 + 07 = 50; 23^6 + 23^{16} \equiv 89 + 61 = 150; \dots$$

A 12.7

Von $2023^{2023} \equiv 67$ zu $2023^{2048} \equiv 81$ gelangt man, indem man im Diagramm fünf Felder weitergeht:

$$2023^{2023} \equiv 23^3 \equiv 67; 23^4 \equiv 41; 23^5 \equiv 43; 23^6 \equiv 89; 23^7 \equiv 47; 2023^{2048} \equiv 23^8 \equiv 81$$

A 12.8

Von 81 gelangt man zu 81^2 , indem man 8 Felder weitergeht, und zu 81^3 dann noch einmal 8 Felder weiter usw.

Nacheinander durchläuft man den Zyklus $81 - 61 - 41 - 21 - 01 - 81 - 61 - 41 -$ usw. So erhält man schließlich $81^{18} \equiv 41$. Verbindet man die im Zyklus vorkommenden $69^{68} \equiv 69^8 \equiv 41$ Felder, so ergibt sich ein regelmäßiger 5-zackiger Stern.

Man kann auch von 81 aus 8 Felder zurückgehen, dann kennt man die letzten beiden Ziffern von 81^{20} (Endziffern 01) und noch einmal 8 Felder zurück, dann landet man bei den letzten beiden Ziffern von 81^{19} (Endziffern 21), und noch einmal 8 Felder zurück und man hat $81^{18} \equiv 41$.

Da $69^2 \equiv 61$ ergibt sich ein Zyklus, für den man jeweils 18 Schritte vor (oder 2 Schritte zurück) gehen muss. So ergibt sich $69^{68} \equiv 69^8 \equiv 41$.

Da $83^2 \equiv 89$ ergibt sich hier ein Zyklus, für den man jeweils 13 Schritte vor (oder 7 Schritte zurück) gehen muss. So ergibt sich $83^{38} \equiv 83^{18} \equiv 09$.

Da $67^2 \equiv 89$ ergibt sich hier ein Zyklus, für den man jeweils 3 Schritte vorgehen muss. So ergibt sich $67^{66} \equiv 67^6 \equiv 69$.

Da $41^2 \equiv 81$ ergibt sich hier ein Zyklus, für den man jeweils 4 Schritte vorgehen muss. So ergibt sich $41^{14} \equiv 61$.

A 12.9

$$28^{28} \equiv 28^8 \equiv 36; 88^{22} \equiv 88^2 \equiv 44; 52^{26} \equiv 52^6 \equiv 64; 48^{47} \equiv 48^7 \equiv 72; 12^{24} \equiv 12^4 \equiv 36$$

A 12.10

$$2024^{2024} \equiv 24^4 \equiv 76$$

$$2025^{2025} \equiv 25^5 \equiv 25$$

$$2026^{2026} \equiv 26^6 \equiv 76$$

$$2027^{2027} \equiv 27^7 \equiv 03$$

A 12.11

(eigene Aktivitäten)

A 12.12

Bestimmt werden sollen die letzten drei Ziffern von 2023^{2023} , also von 23^{23} . $23^{16} \equiv 961$ erhält man durch fortgesetztes Quadrieren. Dann setzt man den Zyklus durch Multiplizieren mit 23 fort.