**Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 9**

In diesem Kapitel findest du sehr oft den Hinweis „eigene Aktivitäten“, da es darum geht, goldene Dreiecke in kleinere goldene Dreiecke zu zerlegen. Hierbei gibt es oft mehrere Möglichkeiten. Wenn du besonders schöne Figuren erstellt hast, kannst du sie mir gerne schicken – die schönsten setze ich dann auf meine Homepage.

## A 9.1 – A 9.2

(eigene Aktivitäten)

## A 9.3

Wenn das regelmäßige Fünfeck die Seitenlänge 1 hat, dann haben die Diagonalen die Seitenlänge $\Phi$. Die Schenkel der spitzwinkligen goldenen Dreiecke haben die Seitenlängen $1/\Phi = \Phi - 1$, die Basis $\Phi - 2 \cdot (\Phi - 1) = 2 - \Phi$.

## A 9.4

Die erste Aussage wiederholt nur das Ergebnis: Der Flächeninhalt $A_1$ des spitzwinkligen goldenen Dreiecks mit den Seitenlängen $(1, \phi, \phi)$ ist $\phi$-mal so groß wie der Flächeninhalt $B_1$ des stumpfwinkligen goldenen Dreiecks mit den Seitenlängen $(\phi, 1, 1)$.

Die Aussage $B_1 = \phi \cdot A_2$ ergibt sich aus $B_1 = A_2 + B_2$ und da $B_2 = (\phi - 1) \cdot A_2$ ist, ergibt sich $B_1 = (\phi - 1) \cdot A_2 + A_2 = \phi \cdot A_2$.

Dies wird dann für immer kleiner werdenden goldenen Dreiecke fortgesetzt.

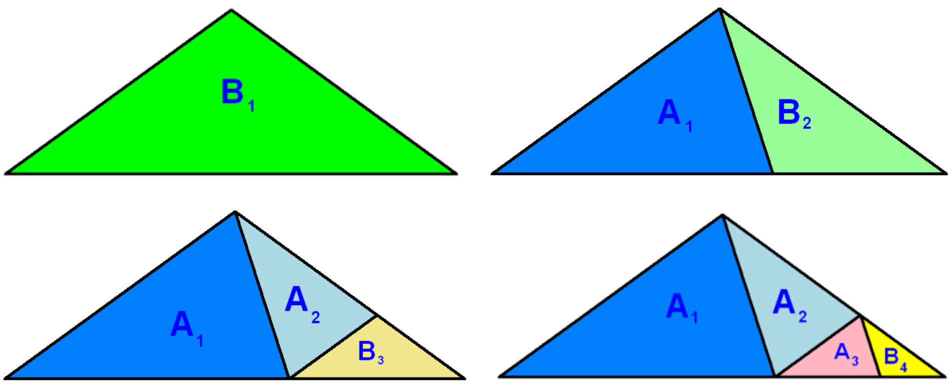
## A 9.5

Ersetzt man in der Gleichung $F = A_1 + 2 \cdot B_1$ den Summanden $A_1$ durch $A_2 + B_1$, dann ergibt sich $F = A_2 + 3 \cdot B_1$.
Dann kann man weiter eines der $B_1$ ersetzen durch $A_2 + B_2$, dann ergibt sich $F = 2 \cdot A_2 + 2 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2$.
Und dann die beiden verbliebenen $B_1$ in der letzten Gleichung durch $2 \cdot (A_2 + B_2)$, dann ergibt sich $F = 4 \cdot A_2 + 3 \cdot B_2$.
Um dann weiter zur nächsten Gleichung zu gelangen, muss $4 \cdot A_2$ ersetzt werden durch $4 \cdot (A_3 + B_2)$, woraus sich dann $F = 4 \cdot A_3 + 7 \cdot B_2$ ergibt.
(weitere eigene Aktivitäten)

## A 9.6

a. Nacheinander wird ersetzt: $A_1$ durch $B_1$ und $A_2$, dann $A_2$ durch $B_2$ und $A_3$, dann $A_3$ durch $B_3$ und $A_4$ usw.

b. Entsprechend wird nacheinander ersetzt: $B_1$ durch $A_2$ und $B_2$, dann $B_2$ durch $A_3$ und $B_3$, dann $B_3$ durch $A_4$ und $B_4$




## A 9.7

(eigene Aktivitäten)

## A 9.8:

Beginnt man in der Figur links mit den außen liegenden spitzwinkligen goldenen Dreiecken, dann haben beispielsweise die Schenkel die Länge $\phi$ und die Basis (=Seite im innen liegenden regelmäßigen 5-Eck) die Länge 1. Dann haben die gelb gefärbten stumpfwinkligen goldenen Dreiecke die Seitenlängen 1 (Basis) und $1/\phi = \phi - 1$ (Schenkel). Das innen liegende regelmäßige 5-Eck hat dann die Seitenlänge $(1/\phi)/\phi = (\phi - 1)/\phi = 1 - 1/\phi = 1 - (\phi - 1) = 2 - \phi$.

Die Seitenlängen der weiter unterteilten Figuren sind dann: $(2 - \phi)/\phi = 2/\phi - 1 = 2 \cdot (\phi - 1) - 1 = 2\phi - 3$, $(2\phi - 3)/\phi = 2 - 3/\phi = 2 - 3 \cdot (\phi - 1) = 5 - 3\phi$, $(5 - 3\phi)/\phi = 5/\phi - 3 = 5 \cdot (\phi - 1) - 3 = 5\phi - 8$ usw.

*Übrigens*: Hier treten stets Zahlen aus der **Fibonacci**-Folge auf (vgl. **Kap. 8.5**):

$1\phi - 1$, $2 - 1\phi$, $2\phi - 3$, $5 - 3\phi$, $5\phi - 8$, $13 - 8\phi$, $13\phi - 21$, …

**A 9.9 – A 9.11**

(eigene Aktivitäten)

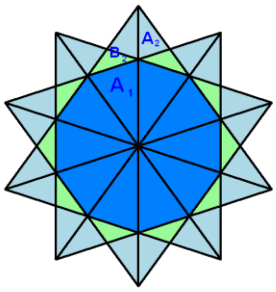
**A 9.12**

b. Von einem symmetrischen Teilbereich des Typs 1 kommt man durch Drehung zum Typ 4. Von den symmetrischen Teilbereichen des Typs 4 kommt man durch Drehung entweder zum Typ 5 oder zum Typ 3 usw.

**A 9.13 – A 9.14**

(eigene Aktivitäten)

**A 9.15**




a. Wenn die zehn blau gefärbten, innen liegenden spitzwinkligen goldenen Dreiecke die Seitenlängen $(1, \phi, \phi)$ haben (also Typ $A_1$), dann haben die zehn grün gefärbten stumpfwinkligen Dreiecke (Typ $B_2$) die Seitenlängen $(1, 1/\phi, 1/\phi)$, also $(1, \phi - 1, \phi - 1)$, und die zwanzig hellblau gefärbten spitzwinkligen Dreiecke (Typ $A_2$) die Seitenlängen $(1/\phi, 1, 1)$, also $(\phi - 1, 1, 1)$, usw.
b. Die Zacken haben zusammen den Flächeninhalt $10 \cdot B_2$ und $20 \cdot A_2$, also $(10 \cdot A_2 + 10 \cdot B_2) + 10 \cdot A_2$:
Ein Dreieck vom Typ $A_2$ und ein Dreieck vom Typ $B_2$ ergibt zusammen ein Dreieck von Typ $B_1$, und fügt man dann noch einmal ein Dreieck vom Typ $A_2$ hinzu, dann erhält man ein Dreieck vom Typ $A_1$, d. h., der außen liegende Bereich ist insgesamt genauso groß wie das blau gefärbte innere 10-Eck.

**A 9.16 – A 9.17**

(eigene Aktivitäten)

**A 9.18**

*darts* und *kites* sind symmetrische Vierecke mit den Seitenlängen $(1, 1, \phi, \phi)$. Die Innenwinkel der *darts* sind 72° (an der Spitze), dann zweimal 36° an den Flügelspitzen und 216°. Die Innenwinkel der *kites* sind 144° an der Spitze, dann zweimal 72° an der Seite und 72° am „Schwanz“ des Drachen.

**A 9.19**

Große *kites* innen: 10 spitzwinklige goldene Dreiecke vom Typ $(1, \phi, \phi)$. Aufgesetzte *darts* außen: 20 stumpfwinklige goldene Dreiecke vom Typ $(½, ½, ½\ \phi)$.

**A 9.20**

(eigene Aktivitäten)
In der Abb. sind vier umgedrehte Elemente enthalten: in der Mitte blau, links rot, unten gelb, rechts blau.