Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 6

A 6.1

L	E
R	E

L	R
E	E

E	E
L	R

R	E
L	E

E	R
E	L

E	E
R	L

R	L
E	E

E	L
E	R

M	A
A	M

M	A
A	M

A	M
M	A

A	M
M	A

M	A
A	M

M	A
A	M

A	M
M	A

A	M
M	A

A	N
A	N

A	A
N	N

N	N
A	A

A	N
A	N

N	A
N	A

N	N
A	A

A	A
N	N

N	A
N	A

Bei dem Wort LEER bleiben alle 8 Möglichkeiten erhalten; bei MAMA reduziert es sich auf 2 Varianten, bei ANNA gibt es 4 Varianten, also halb so viele.

A 6.2

W	E	T
R	E	T

R	E	T
W	E	T

W	R	E
E	T	T

R	W	E
E	T	T

W	T	E
E	T	R

R	T	E
E	T	W

E	W	R
T	T	E

E	R	W
T	T	E

T	E	W
T	E	R

T	E	R
T	E	W

E	T	T
W	R	E

E	T	T
R	W	E

T	T	E
E	W	R

T	T	E
E	R	W

E	T	R
W	T	E

E	T	W
R	T	E

Nur bei Palindrom-Wörter ändert sich etwas hinsichtlich der Anzahl der Möglichkeiten: Die Anzahl wird halbiert, weil die Wörter von vorne nach hinten gelesen genauso aussehen wie von hinten nach vorne.

A 6.3:

Nacheinander sind die Formen 2, 3, 1, 2, 4, 1, 3, 4 verwendet worden.

A 6.4

Nacheinander sind die Formen 1, 1, 5, 5, 3, 3, 8, 8, 2, 2, 6, 6, 7, 7, 4, 4 verwendet worden.

A 6.5:

1. Spalte: Die erste Grundform wird nacheinander jeweils um 90° gedreht.

2. Spalte: Die zweite Grundform wird nacheinander jeweils um 90° gedreht.

3. Spalte: Die erste Form der 2. Spalte (zweite Grundform) wird an einer vertikalen Achse gespiegelt und dann nacheinander jeweils um 90° gedreht.

4. Spalte: Die dritte Grundform wird nacheinander jeweils um 90° gedreht.

5. Spalte: Die erste Form der 4. Spalte (dritte Grundform) wird an einer vertikalen Achse gespiegelt und dann nacheinander jeweils um 90° gedreht.

A 6.6

Eine Wortschlange, die 9 Felder miteinander verbindet, also eine ungerade Anzahl von Feldern, verläuft abwechselnd durch ein hell und ein dunkel markiertes Feld. Dabei muss das erste und das letzte Feld der Wortschlange gleich gefärbt sein. Da aber in einem 3x3-Raster nur 4 Felder dunkel, aber 5 hell sind, kann eine Wortschlange nur in einem hell markierten Feld beginnen.

A 6.7

Die verschiedenen Formen werden durch Angabe der Zeile und der Spalte nummeriert, also beispielsweise bedeutet (1;2): erste Zeile, zweite Spalte.

Die angegebenen Beispiele entsprechenden folgenden Formen:

(2;1), (1;4), (1;2), (2;1), (3;3),

(4;4), (3;1), (4;2), (3;3), (1;4),

(4;5), (3;1), (4;5), (4;1), (4;4).

Die Formen (1;4), (2;1), (3;1), (3;3), (4;4), (4;5) sind doppelt, d. h., die Wortschlangen liegen in beiden Richtungen vor.

Die Formen (1;2), (4;1), (4;2) kommen nur einfach vor, d. h., die Wortschlangen liegen nur in einer Richtung vor; die andere Richtung müsste noch ergänzt werden.

Es fehlen demnach die Formen (1;1), (1;3), (1;5), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (3;2), (3;4), (3;5), (4;3), also entsprechend doppelt so viele Wortschlangen.

A 6.8

(selbst)

A 6.9

Es handelt sich um den italienischen Mathematiker Niccolò TARTAGLIA (1500-1557, Form (1;5)), den französischen Mathematiker René DESCARTES (1596-1650, Form (3;5)), den indischen Mathematiker ARYABATHA (476-550, Form (4;1), den italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa, genannt FIBONACCI (1190-1250, Form (4;3)) sowie um den deutschen Mathematiker Johann Peter Lejeune Gustav DIRICHLET (1805-1859, Form (4;5)).

A 6.10

(selbst)

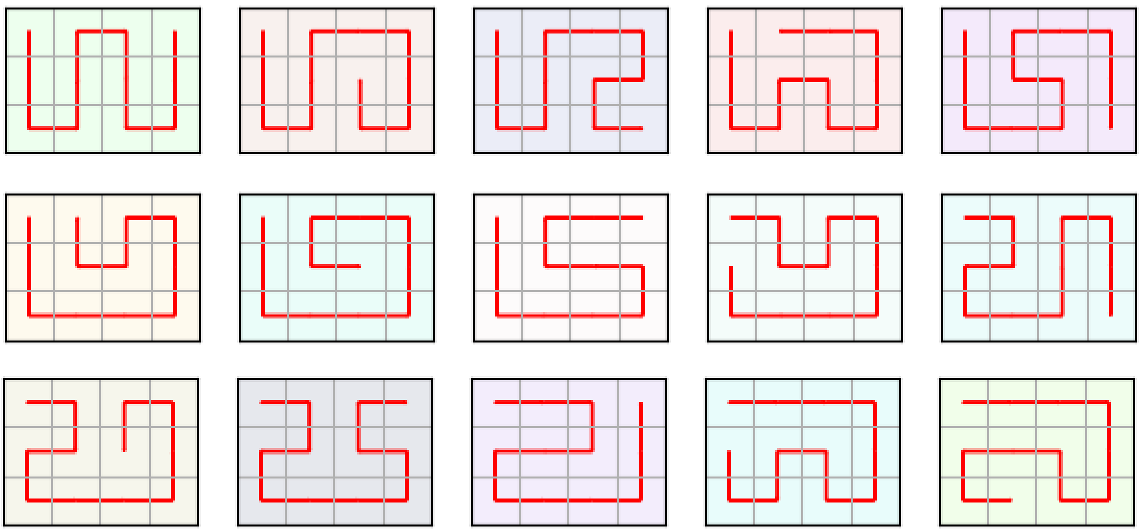
A 6.11

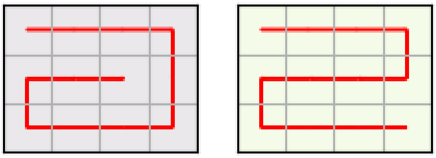
Da die Anzahl der Felder insgesamt eine gerade Zahl ist, kann ein Weg, der in einem rot gefärbten Feld beginnt, nur in einem grün gefärbten Feld enden und umgekehrt.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

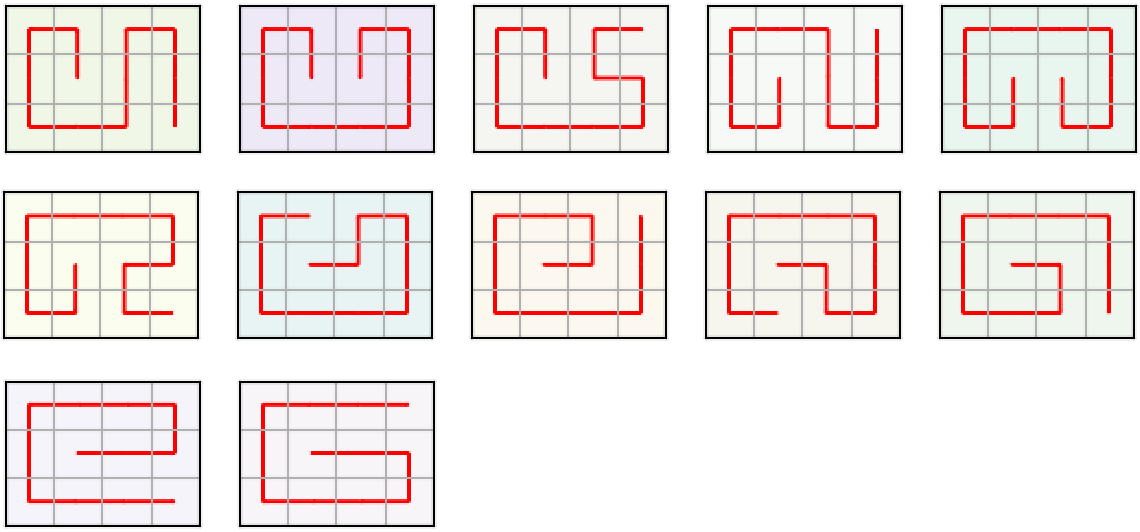
A 6.12:

a. Die 17 Wege, die vom Eckfeld Nr. 1 ausgehen, sind:

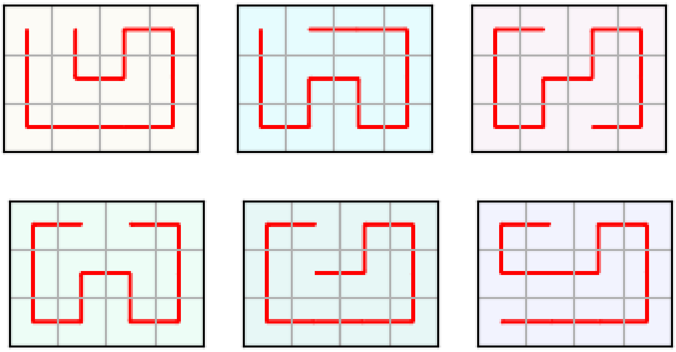




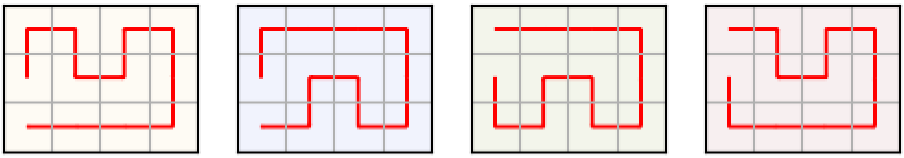
Die 12 Wege, die vom Feld Nr. 6 ausgehen, sind:



Die 6 Wege, die vom Feld Nr. 2 ausgehen, sind:



Die 4 Wege, die vom Feld Nr. 5 ausgehen, sind:



(Grafiken zu a. mit frdl. Genehmigung von Dr. Ulrich Kilian)

b. Wenn es keinen Weg von Feld Nr. 2 zu Feld Nr. 8 gibt, dann kann es auch keinen Weg von Feld Nr. 10 zu Feld Nr. 8 geben (Spiegelung an horizontaler Achse), keinen Weg von Feld Nr. 3 zu Feld Nr. 5 und keinen Weg von Feld Nr. 11 zu Feld Nr. 5 geben (Spiegelung an vertikaler Achse) – und umgekehrt.
Wenn es keinen Weg von Feld Nr. 5 zu Feld Nr. 6 gibt, dann kann es auch keinen Weg von Feld Nr. 8 zu Feld Nr. 7 geben (Spiegelung an vertikaler Achse) – und umgekehrt.

A 6.13:

a. Ratespiel „Stadt-Land-Gemüse“: THESSALONIKI, SAUDIARABIEN, SCHNITTLAUCH
b. (selbst)
c. Bei Palindromen entfällt nur jeweils die die Richtung der Wortschlange, aber nicht die Form.

A 6.14:

a. (selbst)
b. (selbst)
c. MOLEKULARGEWICHT, LUFTFEUCHTIGKEIT, JAHRTAUSENDWENDE

A 6.15

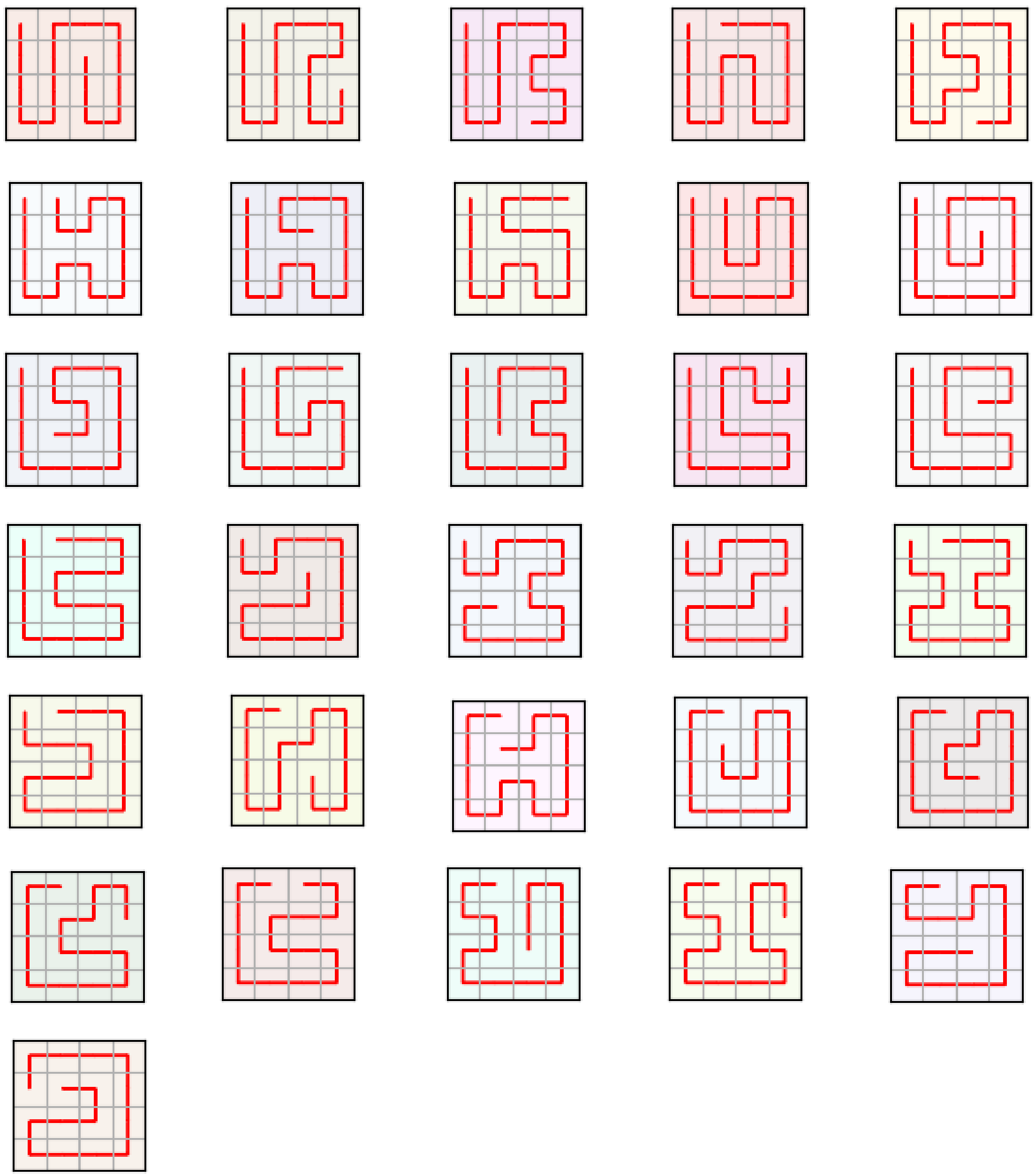
1. Reihe: Jeweils Drehung um 90° im Uhrzeigersinn.

2. Reihe: Spiegelung der ersten Form an einer horizontalen Achse, dann jeweils Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn.

3. Reihe: Spiegelung der ersten Form an einer vertikalen Achse, dann jeweils Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn.

A 6.16

Die 31 nicht-symmetrischen Grundformen für Wege in einem 4×4-Raster:



A 6.17

Da die Anzahl der Felder insgesamt eine gerade Zahl ist, kann ein Weg, der in einem gelb gefärbten Feld beginnt, nur in einem grün gefärbten Feld enden und umgekehrt.

Wenn es eine punktsymmetrische Form geben würde, dann müsste diese durch den Mittelpunkt des 4x4-Quadrats verlaufen; Wege verlaufen aber grundsätzlich durch die Seitenmitten der Felder des Rasters.

A 6.18

MATHEMATIKUNTERRICHT, RICHTGESCHWINDIGKEIT, UNTERHALTUNGSSENDUNG

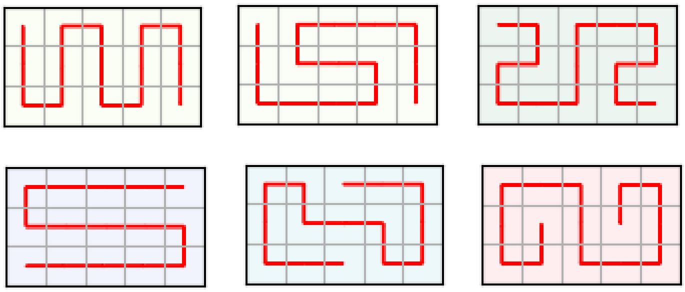
A 6.19

Zu den abgebildeten 5 Grundformen des 4x2-Rasters gehören 2 Formen (Spiegelung an vertikaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse), 2 Formen (Spiegelung an horizontaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse) bzw. 2 Formen (Spiegelung an horizontaler Achse), insgesamt 14 Formen, also 28 Wortschlangen.

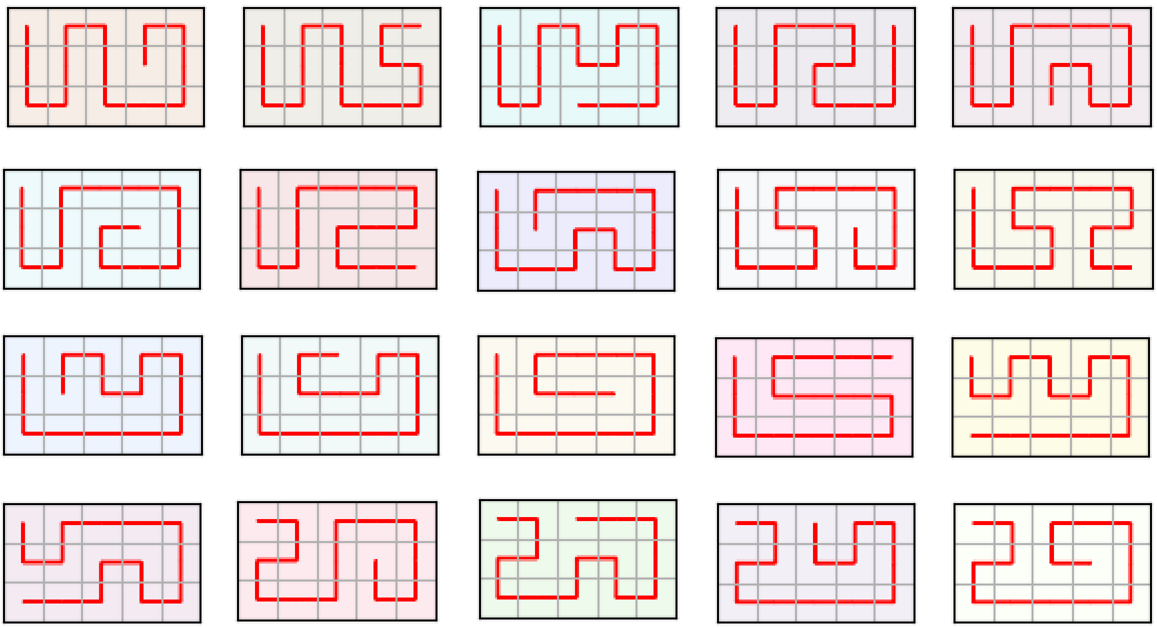
Zu den abgebildeten 7 Grundformen des 5x2-Rasters gehören 2 Formen (Spiegelung an vertikaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse), 2 Formen (Spiegelung an horizontaler Achse), 4 Formen (Spiegelung an vertikaler und an horizontaler Achse) bzw. 2 Formen (Spiegelung an horizontaler oder an vertikaler Achse), insgesamt 22 Formen, also 44 Wortschlangen.

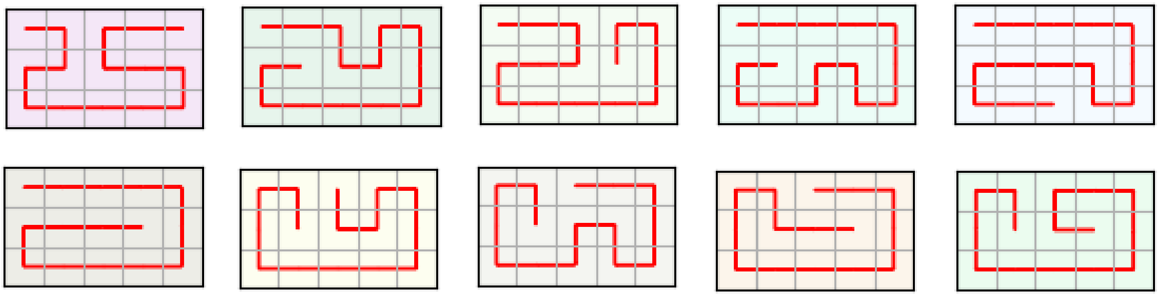
A 6.20

a. Die 6 punktsymmetrischen Grundformen:



Die 30 nicht-symmetrischen Grundformen:





b. Zu jeder der 6 punktsymmetrischen Grundformen gibt es je 2 Formen, zu jeder der 30 nicht-symmetrischen Grundformen gibt es je 4 Formen, also insgesamt 6 · 2 + 30 · 4 = 132 Formen und somit 264 verschiedene Wortschlangen.

A 6.21

	achsensymm.	punktsymm.	nicht symm.	Grundformen	Formen	Wortschlangen
2×2	1	0	0	1	4	8
3×2	1	1	1	3	8	16
3×3	0	1	2	3	20	40
4×2	3	0	2	5	14	28
4×3	4	3	12	19	62	124
4×4	7	0	31	38	276	552
5×2	1	2	4	7	22	44
5×3	0	6	30	36	132	264
5×4	11	10	241	262	1006	2012

A 6.22

a. (selbst)
b. Als Labyrinthe sind nur die geeignet, die eine „Verbindung“ nach außen haben, d. h., es fallen die Formen weg, bei denen sowohl das Start- als auch das Zielfeld innen liegt. Das ist bei einer der Grundformen auf dem 4x3-Raster der Fall, bei den größeren Rechteck-Rastern gibt es mehrere Beispiele dazu.
c. (selbst)

A 6.23

Der Umfang eines 4x3-Rechtecks beträgt 14; außen sind daher 13 oder 12 Wände erforderlich – je nachdem, ob es eine oder zwei Öffnungen nach außen gibt. Hinzu kommen 6 Wände innen, die den Weg gestalten.

A 6.24

(eigene Aktivitäten)

A 6.25

Eine Kugel läuft durch, wenn es keine Wand als Hindernis gibt, ansonsten wird sie an der Wand reflektiert.

A 6.26

(eigene Aktivitäten)

A 6.27

Da Länge und Breite dieser Rechteckraster jeweils ungerade sind, gibt es insgesamt eine ungerade Anzahl von Feldern. Legt man ein Schachbrett-Muster auf das Rechteck-Raster und färbt dabei die Eckfelder dunkel, dann ist die Anzahl der dunklen Felder um 1 größer als die Anzahl der hellen Felder. Wege müssen auf einem dunklen Feld beginnen und auf einem dunklen Feld enden – zwei dunkle Felder sind aber nicht benachbart, sodass der Weg nicht geschlossen werden kann.

A 6.27

Es gibt nur drei Grundformen; die anderen ergeben sich durch Spiegelung oder Drehung.

A 6.28

(selbst)

A 6.29

Das mittlere Feld kann vom Rand aus nicht erreicht werden.