Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 5

A 5.1

erste Reihe: Wiederholung von [B A]

zweite Reihe: Wiederholung von [C D]

A 5.2

$\begin{bmatrix} D & A \\ B & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & C \\ A & D \end{bmatrix}.$

A 5.3

$\begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}$

A 5.4

Muster links: abwechselnd $\begin{bmatrix} C & B \\ D & A \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$

Muster rechts: abwechselnd $\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix}$

A 5.5

links: Das links oben stehende Muster aus 2×2-Quadraten $\begin{bmatrix} D & A \\ C & D \end{bmatrix}$ wird gedreht, sodass nacheinander (im Uhrzeigersinn) die Muster $\begin{bmatrix} D & A \\ A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & C \\ C & B \end{bmatrix}$ entstehen.

Das Muster ist 4-fach achsensymmetrisch und punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des 4×4-Quadrats.

rechts: Das links oben stehende Muster aus 2×2-Quadraten $\begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix}$ wird um 180° gedreht und findet sich rechts unten als $\begin{bmatrix} D & B \\ B & D \end{bmatrix}$ wieder. Das rechts oben stehende Muster aus 2×2-Quadraten $\begin{bmatrix} C & A \\ A & C \end{bmatrix}$ wird um 180° gedreht und findet sich links unten als $\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix}$ wieder.

Das Muster ist achsensymmetrisch zu den Diagonalen des 4×4-Quadrats.

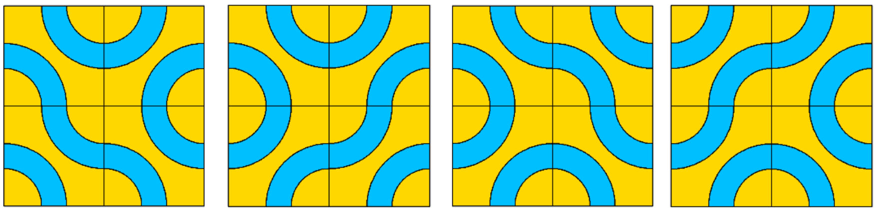
A 5.6

Alle drei Muster zeichnen sich durch eine 4-fache Achsensymmetrie und eine Punktsymmetrie zum Mittelpunkt aus. Das Muster aus 3×3-Quadraten … wird im Uhrzeigersinn jeweils um 90° gedreht:

links: $\begin{bmatrix} B & D & A \\ D & B & D \\ C & D & B \end{bmatrix}$, Mitte: $\begin{bmatrix} D & A & D \\ C & B & B \\ D & B & D \end{bmatrix}$, rechts: $\begin{bmatrix} D & B & C \\ B & D & A \\ A & C & D \end{bmatrix}$.

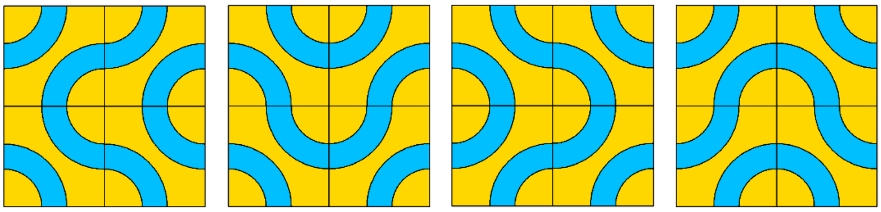
A 5.7

(a) $\begin{bmatrix} A & B \\ A & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & B \\ B & A \end{bmatrix}$



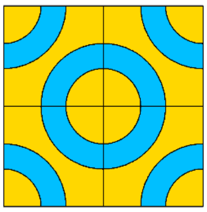
Die Ausgangsfigur ist achsensymmetrisch zur zweiten Diagonalen (von links unten nach rechts oben), hat aber ansonsten keine Symmetrieeigenschaften, vgl. A 1.2.

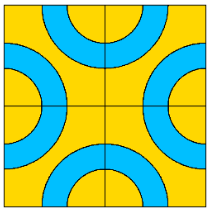
(b) $\begin{bmatrix} B & B \\ A & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A \\ B & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ B & A \end{bmatrix}$



Die Ausgangsfigur ist achsensymmetrisch zur waagerechten Mittelparallele, hat aber ansonsten keine Symmetrieeigenschaften, vgl. A 1.2.

(c) $\begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$

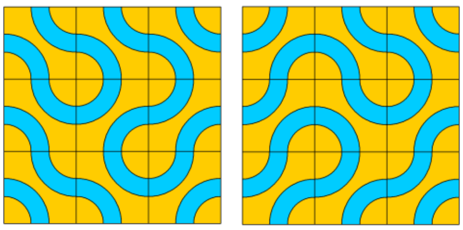




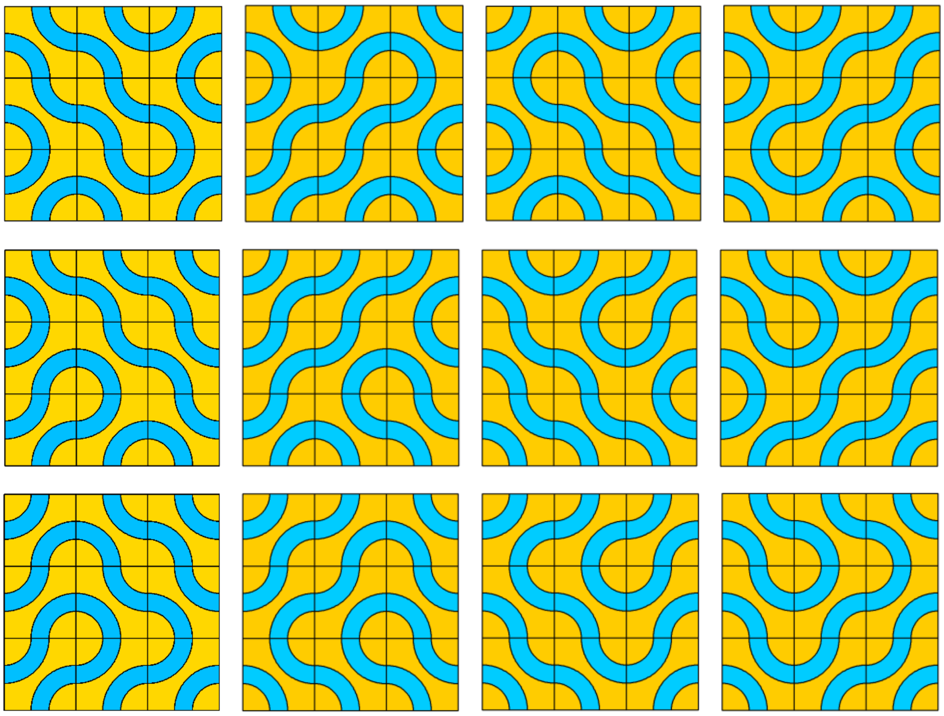
Beide Ausgangsfiguren sind achsensymmetrisch zu den beiden Mittelparallelen und punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Figur. Daher verändern sie sich nicht durch die Drehungen.

A 5.8

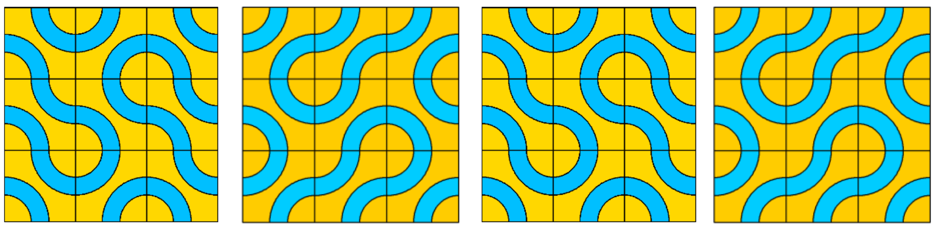
$\begin{bmatrix} B & B & B \\ B & A & B \\ A & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & B & B \\ A & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A & A \\ B & A & B \\ B & B & B \end{bmatrix}$



A 5.9

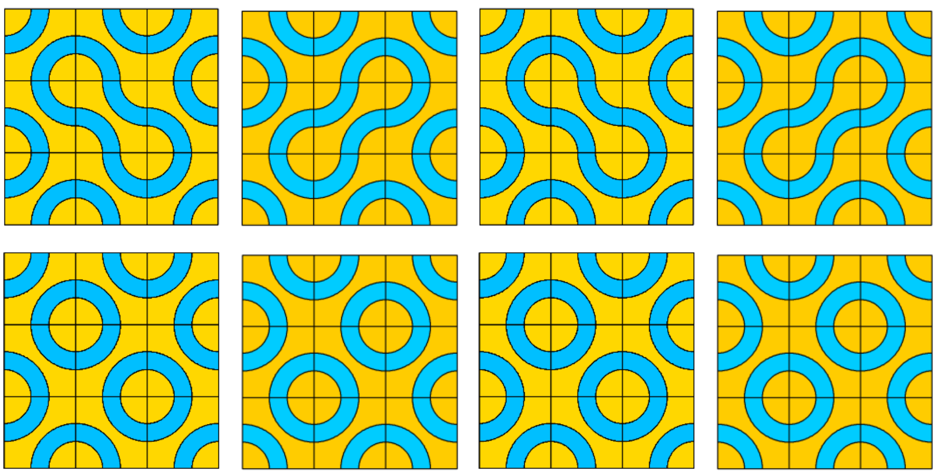


A 5.10



Wegen der Punktsymmetrie erhält man einer Drehung um 180° wieder die Ausgangsfigur (daher stimmen auch die Figuren nach einer 90°-Drehung und dann nach einer 270°-Drehung überein).

A 5.11



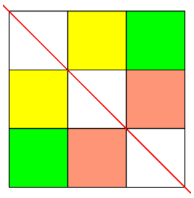
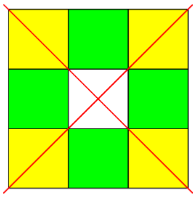
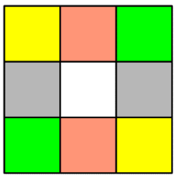
Wegen der Punktsymmetrie erhält man einer Drehung um 180° wieder die Ausgangsfigur (daher stimmen auch die Figuren nach einer 90°-Drehung und nach einer 270°-Drehung überein).

A 5.12

(a) In den drei Diagonalfeldern der Symmetrieachse kann jede der beiden Formen A oder B liegen, das sind $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten. Außerdem müssen je zwei bzgl. der Diagonale einander gegenüberliegende Felder übereinstimmen, das sind $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Daher gibt es $8 \cdot 8 = 64$ verschiedene 9er-Muster. (vgl. Grafik links)

(b) Im Feld in der Mitte kann jede der beiden Formen liegen (2 Möglichkeiten). Die gleich gefärbten Felder müssen übereinstimmen. Daher gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ verschiedene 9er-Muster. (vgl. Grafik Mitte)

(c) Da die jeweils bzgl. der Mitte gegenüberliegenden Felder übereinstimmen müssen, gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ verschiedene punktsymmetrische 9er-Muster. (vgl Grafik rechts)

A 5.13

Das abgebildete Band verläuft durch 8 Felder; das ist die Maximalzahl. Egal, wie man anfängt, muss man sich nach dem Durchlaufen von 6 Feldern dafür entscheiden, nach rechts oder links zu gehen, und damit wird ein Feld nicht mit einbezogen.

A 5.14

Beim ersten Muster sind die blauen Bänder als Kreisringe um die 8 Ecken gelegt, beim zweiten sind zwei blaue Bänder als geschlossene Bögen um zwei einander gegenüberliegende Ecken gelegt, beim dritten wird die Oberfläche des Würfels in zwei Teilflächen unterteilt, beim vierten Mustern ergibt sich ein ähnliches Bild wie beim zweiten Muster.

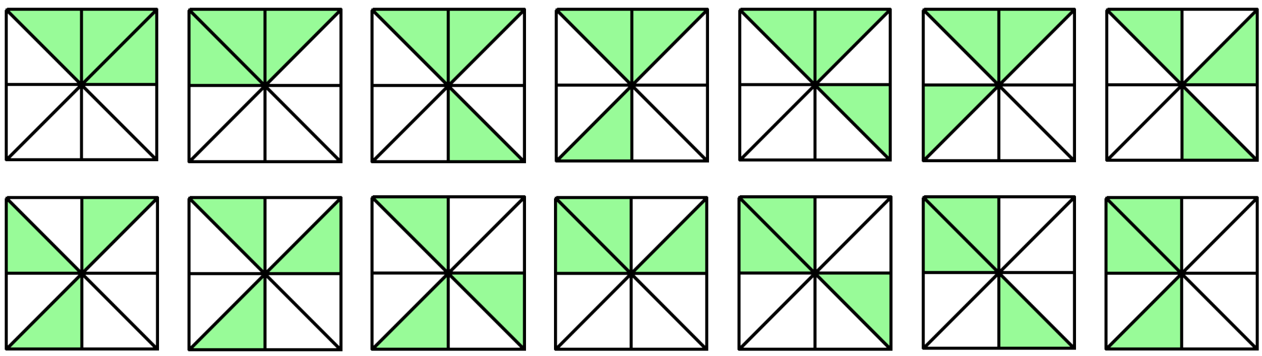
A 5.15

(eigene Aktivitäten)

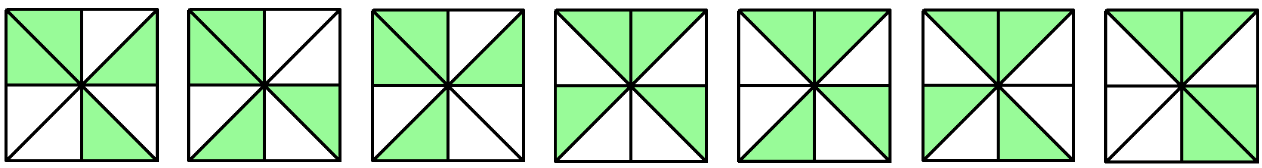
A 5.16

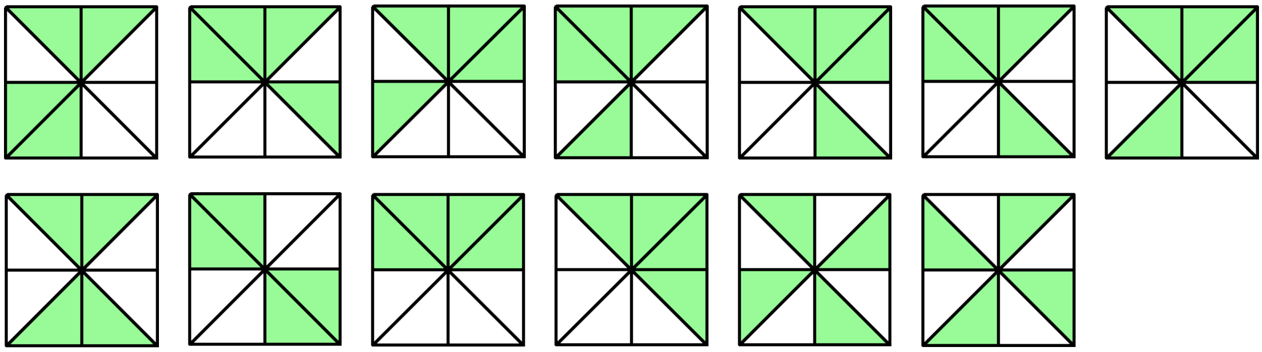
a. In der Abbildung sind alle acht Möglichkeiten abgebildet, bei denen zwei Teilflächen gefärbt sind. Bei den ersten sechs Möglichkeiten entsteht nach der Drehung um 90°, 180° und 270° ein anderes Bild, aber es bleibt dieselbe Karte.
Die beiden letzten Möglichkeiten sind punktsymmetrische Figuren. Bei ihnen entsteht nach Drehung um 90° ein anderes Bild, aber nach einer Drehung um 180° wieder das erste Bild, nach der Drehung um 270° das zweite Bild.

b.



c.





d. Die Anzahl der Karten kennen wir bereits:
Wenn 5 Teilflächen gefärbt sind, sind 3 Teilflächen weiß – und umgekehrt; es gibt daher ebenfalls 14 verschiedene.
Wenn 6 Teilflächen gefärbt sind, sind 2 Teilflächen weiß – und umgekehrt; es gibt daher ebenfalls 8 verschiedene.
Wenn 7 Teilflächen gefärbt sind, ist 1 Teilfläche weiß – und umgekehrt; es gibt daher ebenfalls 2 verschiedene.
Wenn 8 Teilflächen gefärbt sind, sind 0 Teilflächen weiß – und umgekehrt; es gibt daher ebenfalls genau 1.

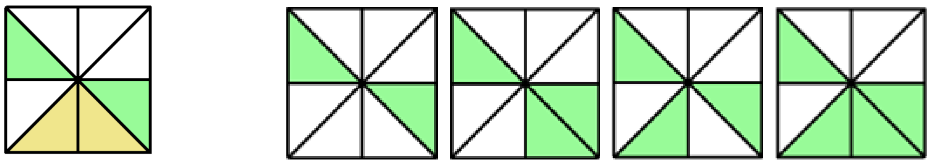
A 5.17

Das Spiel lässt sich beispielsweise nicht mehr durchführen, wenn die in die Mitte passende Karte bereits außen verwendet wurde.

A 5.18

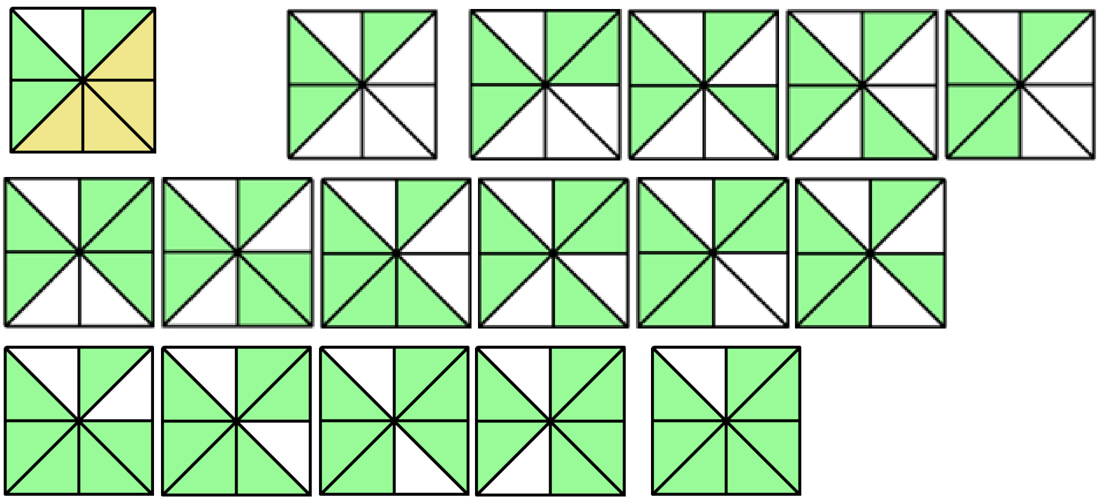
Figur links: Festgelegt sind 6 der 8 Teilflächen.

Für die beiden gelb markierten Teilflächen (vgl. Figur links) gibt es 4 passende Karten (vgl. rechts).



Figur rechts: Festgelegt sind 4 der 8 Teilflächen.

Für die vier gelb markierten Teilflächen (vgl. Figur links) gibt es 16 passende Karten (vgl. rechts).



A 5.19 und A 5.20

Rückmeldungen erbeten → strick.lev@t-online.de

A 5.21

((eigene Aktivitäten))