Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 3

A 3.1

$61^2 = 60^2 + 60 + 61 = 3600 + 121 = 3721$

$62^2 = 61^2 + 61 + 62 = 3721 + 123 = 3844$

$63^2 = 62^2 + 62 + 63 = 3844 + 125 = 3969$

$59^2 = 60^2 – 60 – 59 = 3600 – 119 = 3481$

$58^2 = 59^2 – 59 – 58 = 3481 – 117 = 3364$

$57^2 = 58^2 – 58 – 57 = 3364 – 115 = 3249$

A 3.2:

$44^2 = 45^2 – 45 – 44 = 2025 – 89 = 1936$

$46^2 = 45^2 + 45 + 46 = 2025 + 91 = 2116$

$43^2 = 44^2 – 44 – 43 = 1936 – 87 = 1849$

$47^2 = 46^2 + 46 + 47 = 2116 + 93 = 2209$

A 3.3

Von einer Quadratzahl n^2 kommt man zur *nächstkleineren* Quadratzahl $(n-1)^2$, indem man von n^2 die Zahl n und die Zahl $n–1$ subtrahiert.

A 3.4

a. Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist ein Drittel mal so groß wie Summe der nächsten n ungeraden natürlichen Zahlen.
b. Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist ein Achtel mal so groß wie Summe der nächsten 2n ungeraden natürlichen Zahlen, also beispielsweise: Die Summe der ersten 3 ungeraden natürlichen Zahlen ist ein Achtel mal so groß wie Summe der nächsten 6 ungeraden natürlichen Zahlen.

A 3.5

Das Umlegen zu einem Quadrat gelingt nur, wenn die Anzahl der Summanden ungerade ist, also bei den Summen
$1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$,
also wenn die Summe eine ungerade Quadratzahl ist.

Die Ausgangsfigur aus Steinen hat eine symmetrische Form. Wenn man dann in der Mitte das rote Quadrat einzeichnen möchte, dann gelingt das nur, wenn die Anzahl der Steine in der untersten Zeile ungerade ist.

A 3.6

In der obersten Zeile fehlen zum Auffüllen vier Steine, in der zweiten Zeile (von oben) fehlen zwei Steine; diese liegen unten außerhalb des rot eingerahmten Quadrats; sie können also zu einem Quadrat ergänzt werden. Dies gelingt für beliebige Summen von ungeraden Zahlen.

Im Unterschied zu **A 3.5** ist die Ausgangsfigur nicht symmetrisch.

A 3.7

Figur links: Die Dreiecksfiguren veranschaulichen die Summe der ersten 4 ungeraden natürlichen Zahlen, wobei die vierte ungerade Zahl die Zahl 7 ist. Wie man der ersten Abbildung ablesen kann, benötigt man für das Auslegen der vier symmetrischen Dreiecksfiguren entsprechend $(7 + 1)^2 = 8^2 = 64$ Steine. Der vierte Teil davon ist 16.

A 3.8

In den Figuren sind jeweils dreimal so viele grüne oder blaue Steine wie rote Steine, d. h., die Summe der ersten n ungeraden Zahlen (rot) ist ein Drittel mal so groß wie die Summe der nächsten n ungeraden Zahlen (grün oder blau).

A 3.9

(selbst)

A 3.10

Die vier Dreiecke haben jeweils den Flächeninhalt ½ · 3 · 4 = 6. Das äußere Quadrat hat den Flächeninhalt $(3 + 4)^2 = 49$. Hieraus ergibt sich, dass das innere Quadrat den Flächeninhalt $49 – 4 \cdot 6 = 25 = 5^2$ hat.

A 3.11

Die Differenz zweier benachbarter Quadratzahlen ist eine ungerade Zahl. Wenn diese ungerade Zahl selbst eine Quadratzahl ist (wie beispielsweise 1, 9, 25, 49, …), dann bilden die drei Zahlen ein Pythagoras-Tripel.

Zum Aussehen der Pythagoras-Figuren zu (3, 4, 5), (5, 12, 13) usw. erinnert an die Rechenregel: Um von einer Quadratzahl n zur nächsten Quadratzahl (n+1) zu gelangen, addiere zu n^2 die Zahlen n und (n+1) – das sind genau die grünen Kugeln in der Pythagoras-Figur.

A 3.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
66	**78**	**91**	**105**	**120**	**136**	**153**	**171**	**190**	**210**

A 3.13

Man kann die gesuchte Zahl n durch systematisches Probieren finden. Dabei kann man Folgendes überlegen:

Wenn ½ · n · (n + 1) ungefähr gleich 500 sein soll, dann muss das Doppelte, also n · (n + 1) ungefähr gleich 1000 sein.

Quadratzahlen um die Zahl 1000 sind:

$30^2 = 900$, also $31 \cdot 30 = 900 + 30 = 930$; $31^2 = 961$, also $32 \cdot 31 = 961 + 31 = 992$; und $33 \cdot 32 = 1024 + 32 = 1056$.

Die 32. Dreieckszahl (also die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 32 ergibt ½ · 32 · 33 = 528.

Analog überlegen wir: $44^2 = 1936$, also $45 \cdot 44 = 1936 + 44 = 1980$, und $45^2 = 2025$, also $46 \cdot 45 = 2070$.

Die 45. Dreieckszahl (also die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 45 ergibt ½ · 45 · 46 = 1035.

A 3.14

Die vierte Dreieckszahl (also die Summe der ersten 4 natürlichen Zahlen) ist um 1 größer als das Neunfache der ersten Dreieckszahl: 10 = 9 · 1 + 1.

Die siebte Dreieckszahl (also die Summe der ersten 7 natürlichen Zahlen) ist um 1 größer als das Neunfache der zweiten Dreieckszahl: 28 = 9 · 3 + 1.

Die zehnte Dreieckszahl (also die Summe der ersten 10 natürlichen Zahlen) ist um 1 größer als das Neunfache der dritten Dreieckszahl: 55 = 9 · 6 + 1.

Die dreizehnte Dreieckszahl (also die Summe der ersten 13 natürlichen Zahlen) ist um 1 größer als das Neunfache der vierten Dreieckszahl: 91 = 9 · 10 + 1.

A 3.15

a.

Die Summe der ersten drei natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar: Je 3 Steine sind grün bzw. blau.

Die Summe der ersten fünf natürlichen Zahlen ist durch 5 teilbar:
5 Steine sind blau, 4 + 1 Steine sind grün, 3 + 2 Steine sind rot.

Die Summe der ersten sieben natürlichen Zahlen ist durch 7 teilbar:
7 Steine sind blau, 6 + 1 Steine sind grün, 5 + 2 Steine sind rot, 4 + 3 Steine sind gelb.

Die Summe der ersten neun natürlichen Zahlen ist durch 9 teilbar: 9 Steine sind blau, 8 + 1 Steine sind grün, 7 + 2 Steine sind rot, 6 + 3 Steine sind gelb, 5 + 4 Steine sind orange.

b.

Die Summe der ersten vier natürlichen Zahlen ist durch 5 teilbar:
4 + 1 Steine sind blau, 3 + 2 Steine sind grün.

Die Summe der ersten sechs natürlichen Zahlen ist durch 7 teilbar:
6 + 1 Steine sind blau, 5 + 2 Steine sind grün, 4 + 3 Steine sind rot.

Die Summe der ersten acht natürlichen Zahlen ist durch 9 teilbar:
8 + 1 Steine sind blau, 7 + 2 Steine sind grün, 6 + 3 Steine sind rot, 5 + 4 Steine sind gelb.

Die Summe der ersten zehn natürlichen Zahlen ist durch 11 teilbar:
10 + 1 Steine sind blau, 9 + 2 Steine sind grün, 8 + 3 Steine sind rot, 7 + 4 Steine sind gelb, 6 + 5 Steine sind orange.

A 3.16

Wenn n eine ungerade Zahl ist, dann kann gibt es in der Figur eine mittlere Säule aus Steinen und man kann von allen Säulen rechts davon Steine wegnehmen und auf die Säulen links verteilen, sodass alle n Säulen gleich hoch sind. Dann hat man ein Rechteck aus n gleichhohen Säulen. Die Gesamtzahl der Steine ist daher durch n teilbar.

Weitere Beispiele:

Die Summe der ersten 3 natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Die Summe der ersten 5 natürlichen Zahlen ist durch 5 teilbar.

Die Summe der ersten 9 natürlichen Zahlen ist durch 9 teilbar.

Wenn n eine gerade Zahl ist, dann kann man alle Steine, die oberhalb der halben Höhe liegen, wegnehmen und links und rechts so ergänzen, dass ein Rechteck aus n+1 Säulen entsteht. Die Gesamtzahl der Steine ist daher durch n+1 teilbar.

Weitere Beispiele:

Die Summe der ersten 2 natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Die Summe der ersten 4 natürlichen Zahlen ist durch 5 teilbar.

Die Summe der ersten 6 natürlichen Zahlen ist durch 9 teilbar.

A 3.17

Die quadratischen Figuren bestehen aus acht Dreiecken plus ein zusätzlicher Stein:

Die ungerade Quadratzahl $7^2 = 49$ ist gleich dem Achtfachen der dritten Dreieckszahl 6 plus 1: $49 = 8 \cdot 6 + 1$.

Die ungerade Quadratzahl $9^2 = 81$ ist gleich dem Achtfachen der vierten Dreieckszahl 10 plus 1: $81 = 8 \cdot 10 + 1$.

Die ungerade Quadratzahl $11^2 = 121$ ist gleich dem Achtfachen der fünften Dreieckszahl 15 plus 1: $121 = 8 \cdot 15 + 1$.

Es gilt auch (selbst zeichnen):

Die ungerade Quadratzahl $5^2 = 25$ ist gleich dem Achtfachen der zweiten Dreieckszahl 3 plus 1: $25 = 8 \cdot 3 + 1$.

A 3.18

In den Grafiken sind zwei Gesetzmäßigkeiten enthalten:

Die vierte Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der zweiten Dreieckszahl und der ersten Dreieckszahl: $10 = 3 \cdot 3 + 1$.

Die sechste Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der dritten Dreieckszahl und der zweiten Dreieckszahl: $21 = 3 \cdot 6 + 3$.

Die achte Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der vierten Dreieckszahl und der dritten Dreieckszahl: $36 = 3 \cdot 10 + 6$.

usw.

Die fünfte Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der zweiten Dreieckszahl und der vierten Dreieckszahl: $15 = 3 \cdot 3 + 6$.

Die siebte Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der dritten Dreieckszahl und der sechsten Dreieckszahl: $28 = 3 \cdot 6 + 10$.

Die neunte Dreieckszahl ist gleich der Summe aus dem Dreifachen der vierten Dreieckszahl und der achten Dreieckszahl: $45 = 3 \cdot 10 + 15$.

A 3.19

a.

$15^2 - 10^2 = 225 - 100 = 125 = 5^3$; $21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216 = 6^3$; $28^2 - 21^2 = 784 - 441 = 343 = 7^3$;

$36^2 - 28^2 = 1296 - 784 = 512 = 8^3$; $45^2 - 36^2 = 2025 - 1296 = 729 = 9^3$.

b.

$6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 = 21$;

$7^2 - 6^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 = 49 - 36 + 25 - 16 + 9 - 4 + 1 = 28$;

$8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 64 - 49 + 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 = 36$;

$9^2 - 8^2 + 7^2 - 6^2 + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2 = 81 - 64 + 49 - 36 + 25 - 16 + 9 - 4 + 1 = 45$;

$10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + 6^2 - 5^2 + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 = 100 - 81 + 64 - 49 + 36 - 25 + 16 - 9 + 4 - 1 = 55$.

In der Grafik wird das abwechselnde Subtrahieren und Addieren durch die grüne und weiße Färbung der Steine veranschaulicht. Schiebt man bei der rechten Grafik (und analog bei den darauffolgenden Grafiken) anschließend die grün gefärbten Winkelhaken diagonal nach rechts oben zusammen, dann ergeben sich grüne Dreiecke – die Veranschaulichung der Dreieckszahlen.

c.

6 = 6; 7 = 6 + 1; 8 = 6 + 1 + 1; 9 = 6 + 3; 10 = 10; 11 = 10 + 1; 12 = 10 + 1 + 1; 13 = 10 + 3; 14 = 10 + 3 + 1; 15 = 15; 16 = 15 + 1; 17 = 15 + 1 + 1; 18 = 15 + 3; 19 = 15 + 3 + 1; 20 = 15 + 3 + 1 + 1.

A 3.20

Wir führen den Beweis auf die Regel zurück, dass die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen stets eine Quadratzahl ergibt:

Durch die abwechselnde Färbung mit zwei Farben wird die Summe 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 unterteilt in 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 blaue Steine und 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 Steine, also in die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen. Diese Aufteilung ist immer möglich.

A 3.21

Für die Folge der Fünfeck-Zahlen gilt:

1	2	3	4	5	6	7	8
5	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**117**

A 3.22

Nummer	1	2	3	4	5	6
Dreieckszahl	1	3	6	10	15	
Unterschied		2	3	4	5	
Unterschied²		1	1	1		

Nummer	1	2	3	4	5	6
Quadratzahl	1	4	9	16	25	
Unterschied		3	5	7	9	
Unterschied²		2	2	2		

A 3.23

Nummer	1	2	3	4	5	6
Sechseckzahl	6	15	28	45	66	
Unterschied		9	13	17	21	
Unterschied²		4	4	4		

A 3.24

Nummer	1	2	3	4	5	6
Dreieck	1	10	28	55	91	
Unterschied		9	18	27	36	
Unterschied²		9	9	9		

Nummer	1	2	3	4	5	6
Quadrat	1	9	25	49	81	
Unterschied		8	16	24	32	
Unterschied²		8	8	8		

Nummer	1	2	3	4	5	6
Sechseck	1	7	19	37	61	
Unterschied		6	12	18	24	
Unterschied²		6	6	6		

A 3.25

Dreieck-Figur: Ausgehend von 3 grünen Steinen folgen 12 gelbe Steine, dann wieder 21 grüne und weiter 30 gelbe Steine; der Unterschied beträgt jeweils 9.

Quadrat-Figur: Ausgehend von 4 grünen Steinen folgen 12 gelbe Steine, dann 20 grüne und weiter 28 gelbe Steine; der Unterschied beträgt jeweils 8.

A 3.26

Die Werte aus A 3.24 müssen jeweils um die Anzahl der Steine in den Zacken ergänzt werden

Nummer	1	2	3	4	5	6
Stern	7 + 6 = 13	19 + 18 = 37	37 + 36 = 73	61 + 60 = 121	181	
Unterschied		24	36	48	60	
Unterschied²		12	12	12		