Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 2

A 2.1

Es entstehen vier Dreiecke, von denen je zwei einander gegenüberliegende deckungsgleich sind. Zeichnet man zusätzlich noch Mittellinien (horizontale und vertikale Spiegelachsen), so entstehen acht deckungsgleiche Dreiecke, von den je zwei zu den Dreiecken gehören, die durch die Diagonalen entstanden sind.

A 2.2

Durch zwei Mittellinien wird ein Parallelogramm in vier deckungsgleiche Parallelogramme unterteilt.

Durch die Diagonalen wird das Parallelogramm in vier Dreiecke unterteilt, von denen je zwei deckungsgleich sind, wie man durch Drehung um den Mittelpunkt des Parallelogramms feststellt.

A 2.3

Ein Parallelogramm ist genauso groß wie ein Rechteck, das die gleiche Grundseite und die gleiche Höhe hat. Man kann auf einer Seite ein Dreieck abtrennen und auf der anderen Seite ansetzen und verwandelt so ein Parallelogramm in ein Rechteck.

Ein Dreieck kann man verdoppeln, indem man die beiden Teildreiecke links und rechts von der Höhe verdoppelt; dann erhält man ein Rechteck, dessen Flächeninhalt sich aus dem Produkt der Grundseite und der Höhe ergibt.

A 2.4

Der Flächeninhalt der Parallelogramme in der Figur links berechnet sich aus dem Produkt der halben Seitenlänge der Grundseite und der halben Höhe; somit hat jedes einen Flächeninhalt, der ein Viertel vom Flächeninhalt des großen Parallelogramms beträgt.

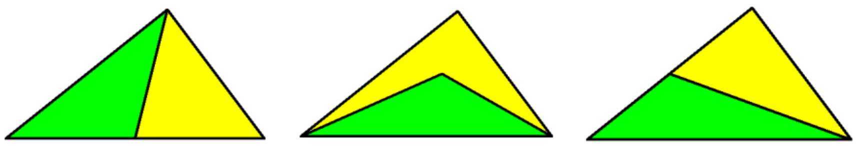
Der Flächeninhalt der Dreiecke in der Figur rechts berechnet sich aus dem halben Produkt aus der Länge einer Seite und der Höhe; die Höhe ist genau halb so lang wie die jeweils andere Rechteckseite. Somit hat jedes dieser Dreiecke den Flächeninhalt ein Viertel mal die Länge der einen Rechteckseite mal der Länge der anderen Rechteckseite, und somit sind alle gleich groß.

A 2.5

Die Figur lässt sich unterteilen in ein Rechteck und links und rechts zwei rechtwinklige Dreiecke, die man aneinander schieben könnte. Der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt Grundseite mal Höhe, hier gemessen an der Grundseite oben. Der Flächeninhalt des zusammengeschobenen Dreiecks ist gleich dem halben Produkt der Dreieck-Grundseite und der Höhe, wobei die Dreieck-Grundseite sich aus der Differenz der beiden Trapez-Grundseiten ergibt.

A 2.6

Wenn man von der Berechnung des Flächeninhalts ausgeht, bietet sich an, entweder die Grundseite zu halbieren (links) oder die Höhe zu halbieren (Mitte und rechts) – wo der Endpunkt der Höhe liegt, spielt dabei keine Rolle, er kann beispielsweise auch auf einer anderen Seite liegen, vgl. Abb. rechts.



A 2.7

Der Flächeninhalt der beiden Trapeze setzt sich gemäß A 2.5 aus dem Flächeninhalt eines Rechtecks und dem Flächeninhalt eines Dreiecks zusammen. Eine Seite des Rechtecks hat die Seitenlänge $\frac{1}{3}$, die Höhe ist $\frac{1}{2}$, also der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Das Dreieck hat die Seitenlänge $\frac{2}{3}$ und die Höhe $\frac{1}{2}$, deshalb der Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$. Zusammen ergibt sich daher $\frac{1}{3}$ – wie behauptet.

A 2.8

Der Flächeninhalt des Quadrats ist $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Die rechtwinkligen Dreiecke haben die Seitenlängen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$, also jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$; zusammen ergibt dies dann $3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

A 2.9

Um diese Figuren zeichnen zu können, müsste man Folgendes wissen:

– Wie lang ist eine Quadratseite, wenn das Quadrat den Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ hat?
– Wie lang ist eine Quadratseite, wenn das Quadrat (bestehend aus zwei gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecken) den Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ hat?
– Welchen Radius hat ein Kreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ ist?
– Welchen Radius hat ein Kreis, dessen Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ ist?
– Welchen Radius hat ein Halbkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ ist?
– Welchen Radius hat ein Viertelkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ ist?
– Welchen Radius hat ein Viertelkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{2}{3}$ ist?
– Welchen Radius hat ein Sechstelkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ ist?

A 2.10

a. Alle Methoden lassen sich anwenden – mit Ausnahme der Darts, weil es bei diesen wichtig ist, dass die Seitenlängen des Rechtecks gleich lang sind.
b. Das Gleiche gilt auch für Parallelogramme.

A 2.11

1. Ein Drittel der Grundseite bei gleicher Höhe.
2. Zwei Drittel-Dreiecke zusammenlegen und einen Eckpunkt mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbinden.
3. Zwei Dreiecke einzeichnen, deren Höhe $\frac{2}{3}$ und deren Grundseite $\frac{1}{2}$ ist.
4. Kombination von Idee 1. und Idee 3.
5. Mittelpunkt des Dreiecks mit den Eckpunkten verbinden.
6. Kombination von 1. und 5.
7. Kombination von 3. und 5.
8. Seitenmitten mit dem Mittelpunkt des Dreiecks verbinden.
9. Kombination von 1. und 8.
10. Kombination von 3. und 8.
11. Trapeze die den Mittelpunkt des Dreiecks gemeinsam haben.
12. Kombination von 1. und 11.
13. Kombination von 3. und 11.

A 2.12

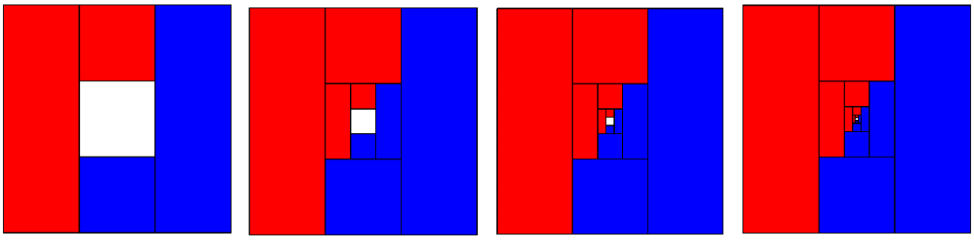
Um diese Figuren zeichnen zu können, müsste man Folgendes wissen:

– Welchen Radius hat ein Kreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ von der Dreiecksfläche ist?
– Welchen Radius hat ein Sechstelkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ von der Dreiecksfläche ist?
– Welchen Radius hat ein Halbkreis, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{3}$ von der Dreiecksfläche ist?
– Welche Seitenlänge hat ein Quadrat, dessen Fläche $\frac{1}{3}$ von der Dreiecksfläche ist?

A 2.13

Beide Verfahren lassen sich auch bei Rechtecken anwenden, da Rechtecke durch Mittellinien und durch Diagonalen halbiert werden können. Beim zweiten Verfahren muss man auch noch beachten, wie Dreiecke halbiert werden können (Mittelpunkt der Grundseite mit der „Spitze“ des Dreiecks verbinden).

A 2.14



A 2.15

Wenn die Dreiteilung des weißen Rechtecks durch vertikale Linien erfolgt, „wachsen" die rot und blau gefärbten Bereiche kontinuierlich zusammen.

A 2.16

Das Drittelungsverfahren kann auf ein beliebiges Rechteck übertragen werden, da jeweils nur Rechtecke gedrittelt werden.

A 2.17:

1. Grundseite wird geviertelt.
2. Zwei Viertel-Rechtecke werden zusammengelegt und dann durch eine horizontale Linie halbiert.
3. Wie 2.
4. Zwei Viertel-Rechtecke werden zusammengelegt und dann durch eine Diagonale halbiert.
5. Wie 4.
6. Kombination von 2. und 4.
7. Wie 4.
8. Wie 7. mit verschiedenen Richtungen
9. Vierteilung durch Diagonalen
10. Kombination von 4. und 9.
11. Halbierung der halben Quadrate (= rechtwinklige Dreiecke) durch Halbierung der Grundseite
12. Wie 11.
13. Kombination von 9. und 11.
14. Unterteilung in vier deckungsgleiche Vierecke, die den Mittelpunkt des Quadrats gemeinsam haben.
15. Halbierung der halben Quadrate (= Rechtecke) in jeweils zwei deckungsgleiche Trapeze.
16. Wie 15.

Die fortgesetzte Vierteilung ist bei allen rechteckigen oder dreieckigen Figuren in Teilaufgabe b. möglich; kompliziert würde es nur bei den Trapezen.

A 2.18

Durch die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte entstehen vier deckungsgleiche gleichseitige Dreiecke, von denen jeweils eines nicht gefärbt wird.

In a. liegt das nicht gefärbte Dreieck an der Spitze des Ausgangsdreiecks, bei b. in der Mitte der Figur.

Bei c. wird die Vierteilung erreicht, indem der Mittelpunkt der Grundseite mit den Mittelpunkten der anderen beiden Seiten bzw. mit dem gegenüberliegenden Punkt oben verbunden wird. Das nicht gefärbte gleichseitige Dreieck kann dann wie das Ausgangsdreieck geteilt werden.

A 2.19

Man müsste bei beiden Figuren beweisen, dass der Flächeninhalt der Trapeze genau gleich einem Viertel der Gesamtfläche ist.

A 2.20

In der ersten Figur bleibt ein Fünftel der Quadratfläche ungefärbt, im nächsten Schritt dann wieder ein Fünftel von diesem Fünftel, also $\frac{1}{25}$ usw. Wenn das Verfahren beliebig fortgesetzt wird, ist schließlich jeweils ein Viertel der Fläche grün, rot, gelb oder blau gefärbt.

Hinweis: Um dies so zu zeichnen, müsste man berechnen können, welche Seitenlänge ein Quadrat hat, dessen Flächeninhalt gleich einem Fünftel der Quadratfläche ist.

A 2.21

a.

1. Die Kreisfläche wird durch vier 90°-Sektoren unterteilt,

2. Die Viertel werden jeweils nach der einen Seite um Halbkreise vergrößert (und von der anderen Seite um Halbkreise verkleinert)

3. Da ein Kreis mit halb so großem Radius ein Viertel so groß ist wie der Ausgangskreis, bleibt für die beiden Restflächen jeweils ein Viertel der Kreisfläche übrig.

4. Die verschiedenen Flächen mit einem Viertel des Kreis-Flächeninhalts werden kombiniert.

5. In der Mitte liegt der Kreis mit halbem Radius und Viertel Fläche; daher muss die Restfläche in drei gleich große Teilflächen unterteilt werden (von der Mitte aus gesehen sind das drei 120°-Sektoren).

6. Halbkreise werden hinzugefügt und weggenommen.

7. Zwei bekannte Flächen werden kombiniert und da die Restfläche symmetrisch ist, kann man sie leicht mit der Symmetrieachse unterteilen.

8. Die Trennungslinie aus 7. wird wieder durch Halbkreise vergrößert und verkleinert.

9. – 11. Die Unterteilung der ersten Figur wird durch hinzugefügte und weggenommene kleine Halbkreise variiert.

12. Die Sektoren unterteilt und gegeneinander gedreht.

b. Um einen der vier Spiralbögen zu zeichnen, geht man vom Mittelpunkt des Kreises aus zunächst um ein Viertel des Kreisradius aus nach oben und zeichnet dann den ersten Viertelkreisbogen mit Radius ¼ , dann geht um ein Viertel des Kreisradius nach rechts und zeichnet den zweiten Viertelkreisbogen mit Radius ½. Um den dritten Teil des Spiralbogens zu zeichnen, geht man um ein Viertel des Kreisradius nach unten und zeichnet den Viertelkreisbogen mit Radius ¾. (Wenn man dann noch einmal um ein Viertel des Kreisradius nach links geht, ist der Viertelkreisbogen mit vollem Radius Teil des Kreisbogens.)

c.

Dass der innere rot gefärbte Teil ein Viertel so groß ist wie der gesamte Kreis, ist bekannt. Man muss berechnen können, welchen Radius die anderen Kreisringe haben müssen. Das gilt auch für die nächsten vier Figuren, bei denen zwei nebeneinander liegende Kreisringe erst zusammengefasst und dann geteilt wurden. Um die siebte Figur zeichnen zu können, muss man wissen, wie man einen Halbkreis durch eine waagerechte Linie halbiert. In der achten Figur wird jeweils ein Viertel der Fläche durch einen Kreis abgetrennt, dessen Mittelpunkt außerhalb liegt.