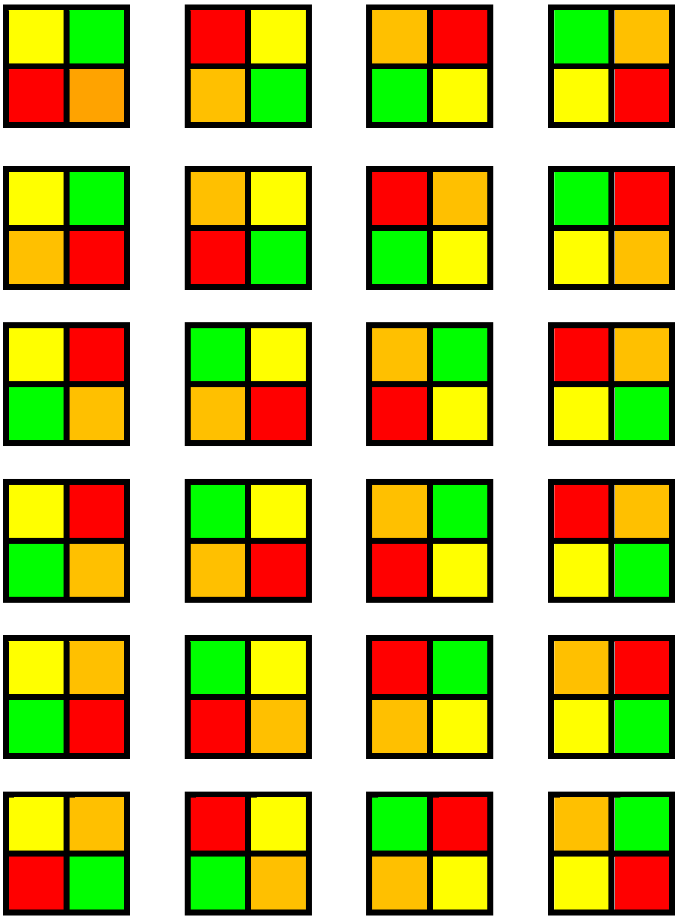
Lösungen Kunterbunte Mathematik Kap. 1

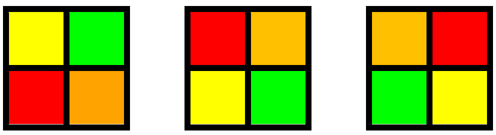
A 1.1:

Die sechs Gruppen:

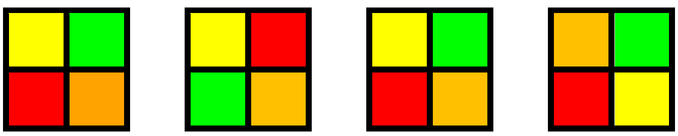


A 1.2

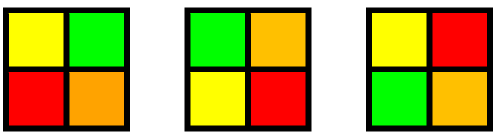
a.



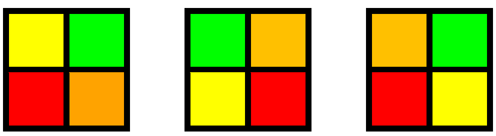
b.1 **b.2**



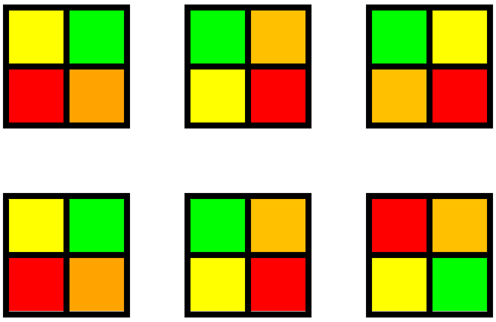
c.1



c.2



c.3



A 1.3

(selbst)

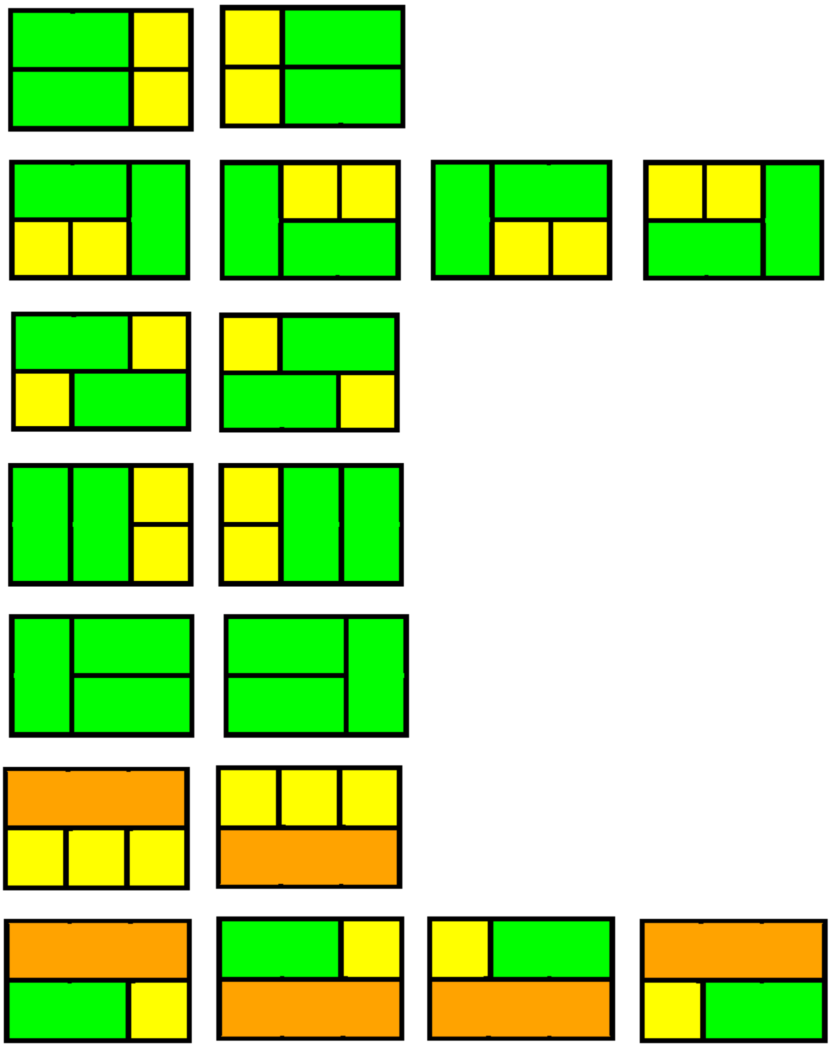
A 1.4:

Die drei Grundformen sind: Eine der vier Formen in der ersten Reihe, eine der beiden ersten Formen in der zweiten Reihe sowie die dritte Form in der zweiten Reihe.

Die drei anderen Formen in der ersten Reihe lassen sich aus der ersten durch eine Spiegelung an einer horizontalen bzw. an einer vertikalen Achse bzw. durch eine Drehung um 180° erhalten.

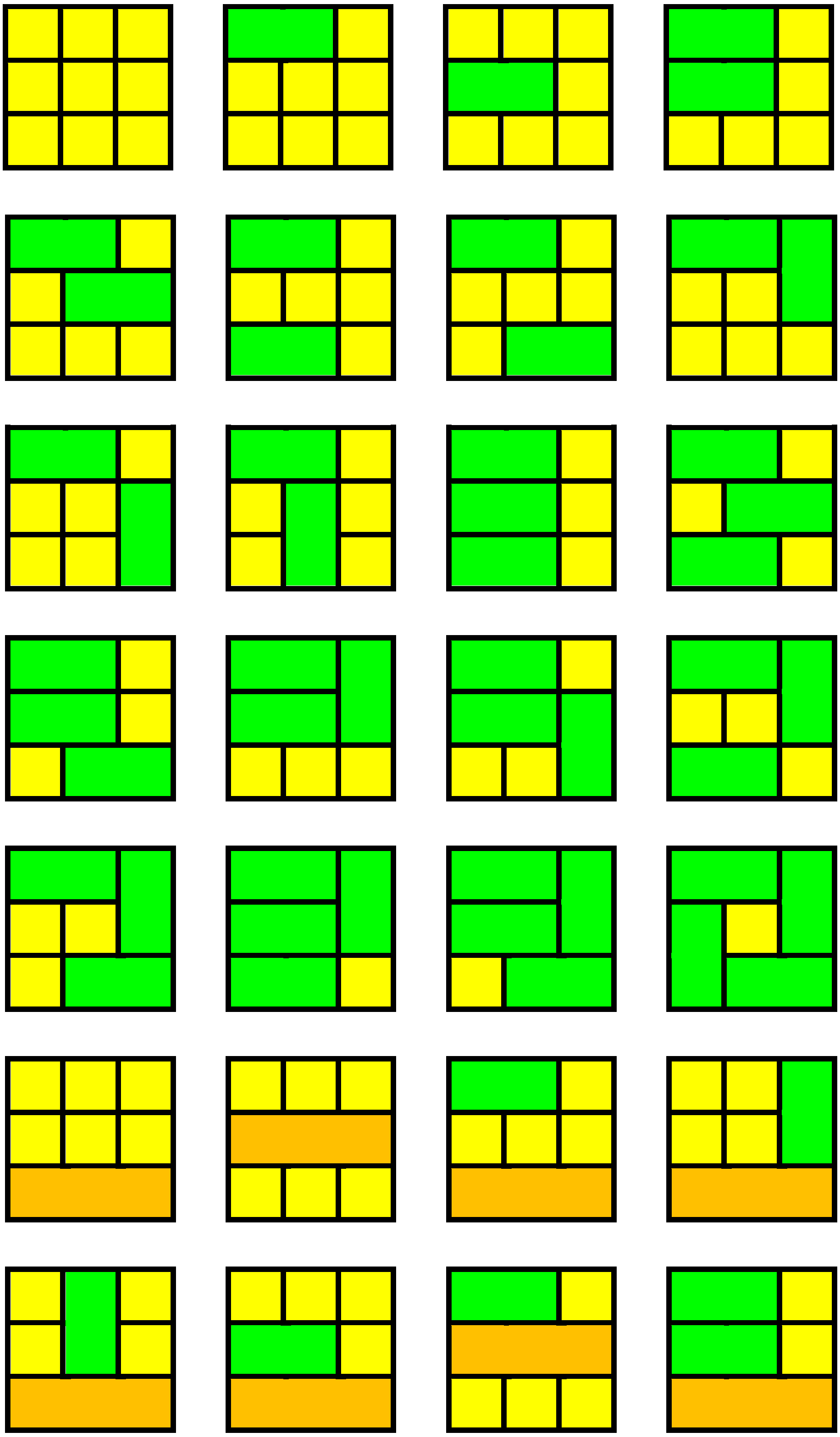
Die zweite Form in der zweiten Reihe kann man durch eine Spiegelung an einer vertikalen Achse aus der ersten erhalten.

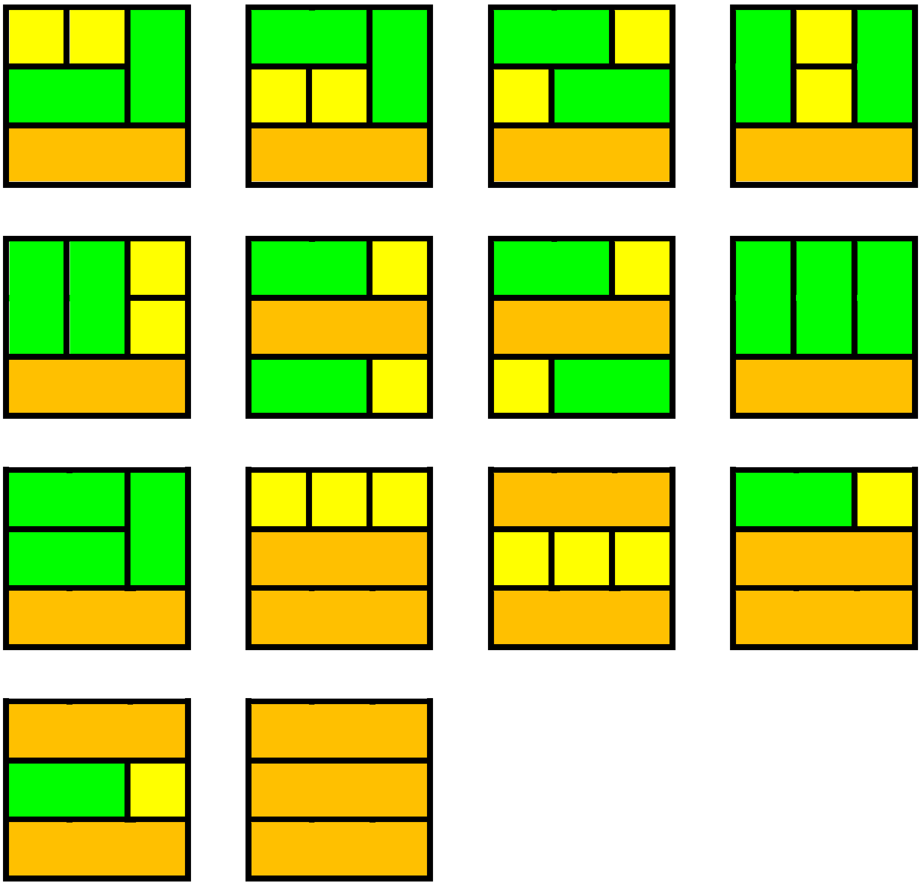
A 1.5



Keine Änderungen bei den beiden anderen Rechtecken.

A 1.6

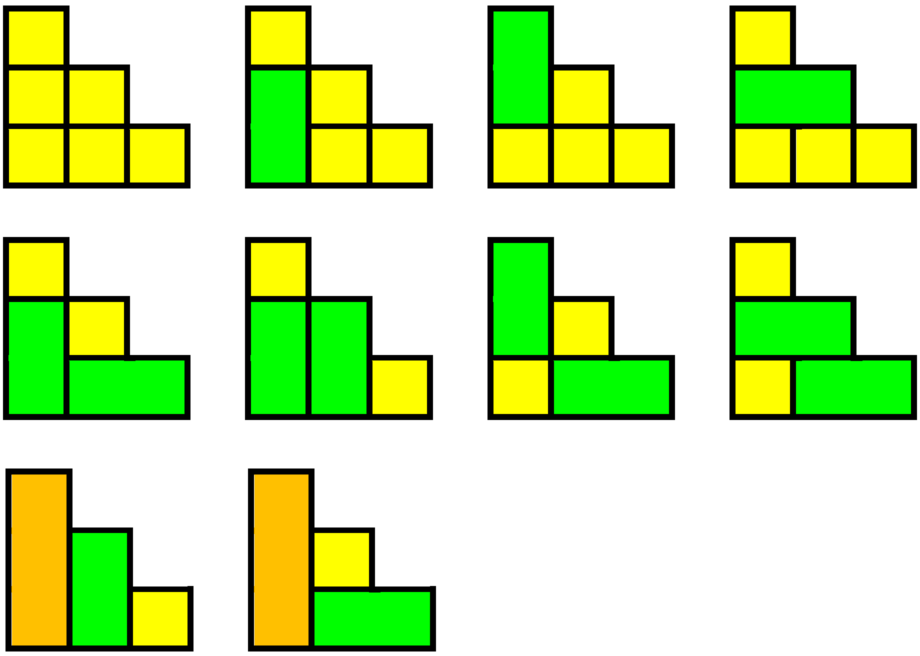




A 1.7

Es gibt keine weiteren Grundformen.

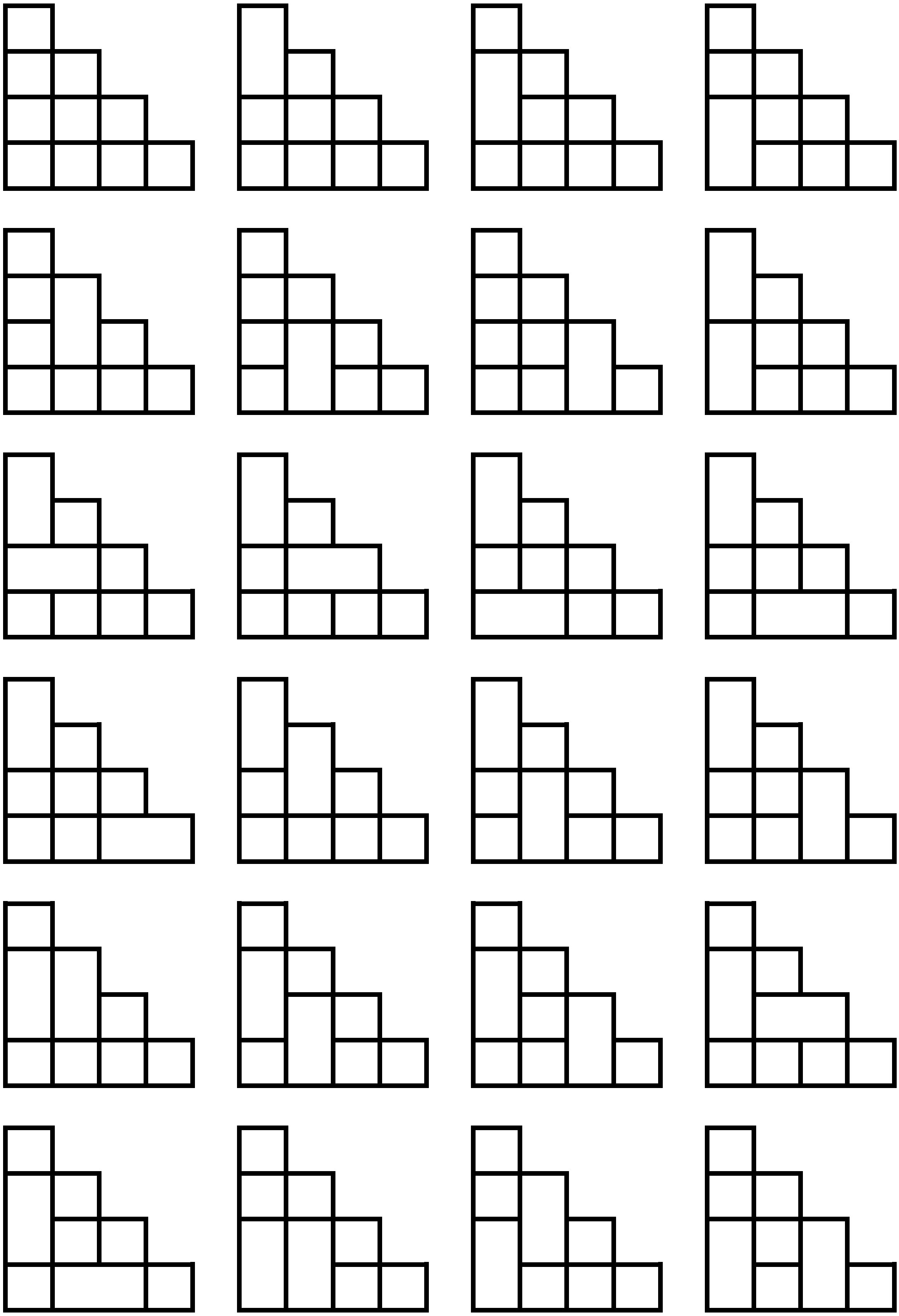
Durch Spiegelung erhält man die folgenden Formen:

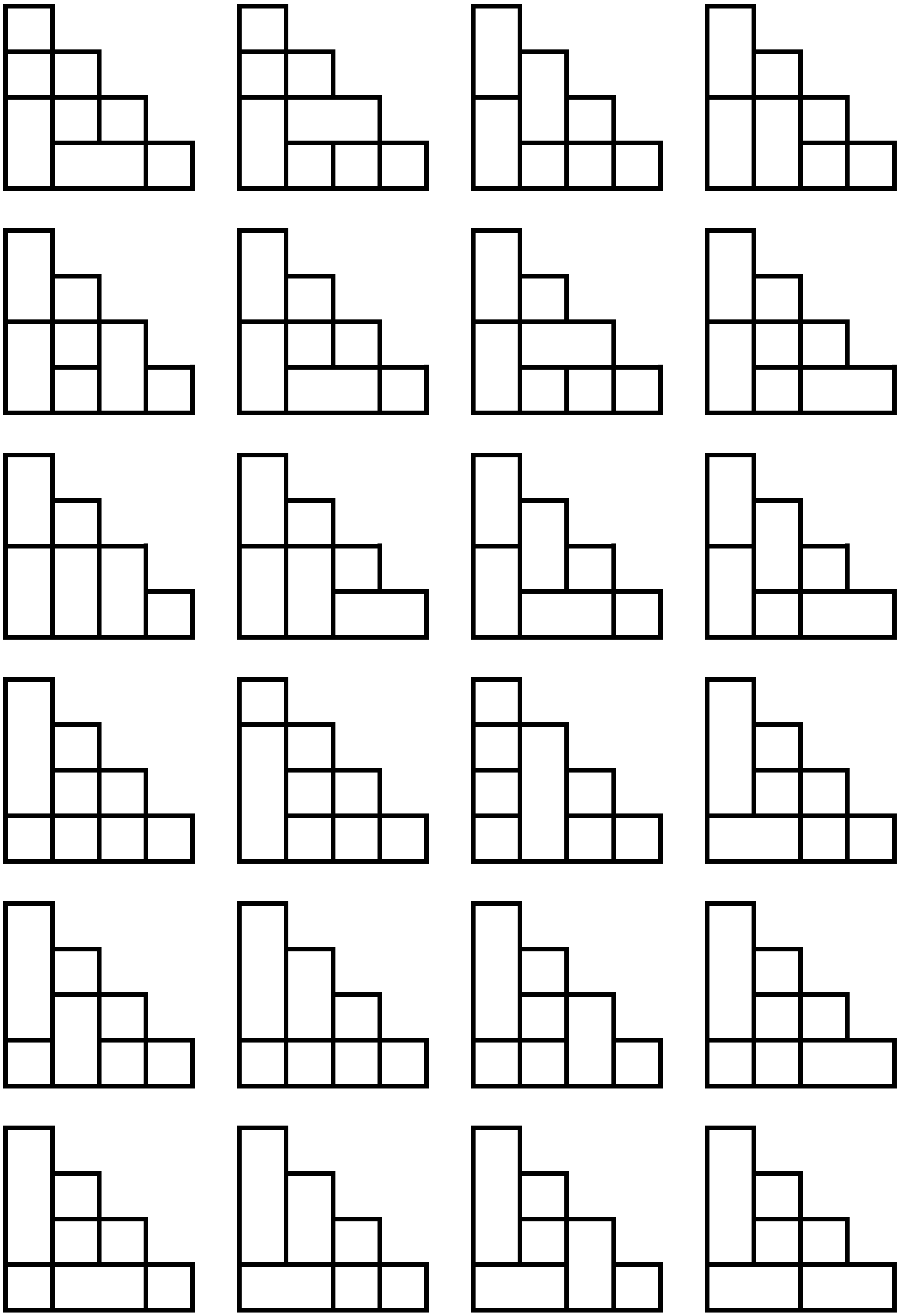


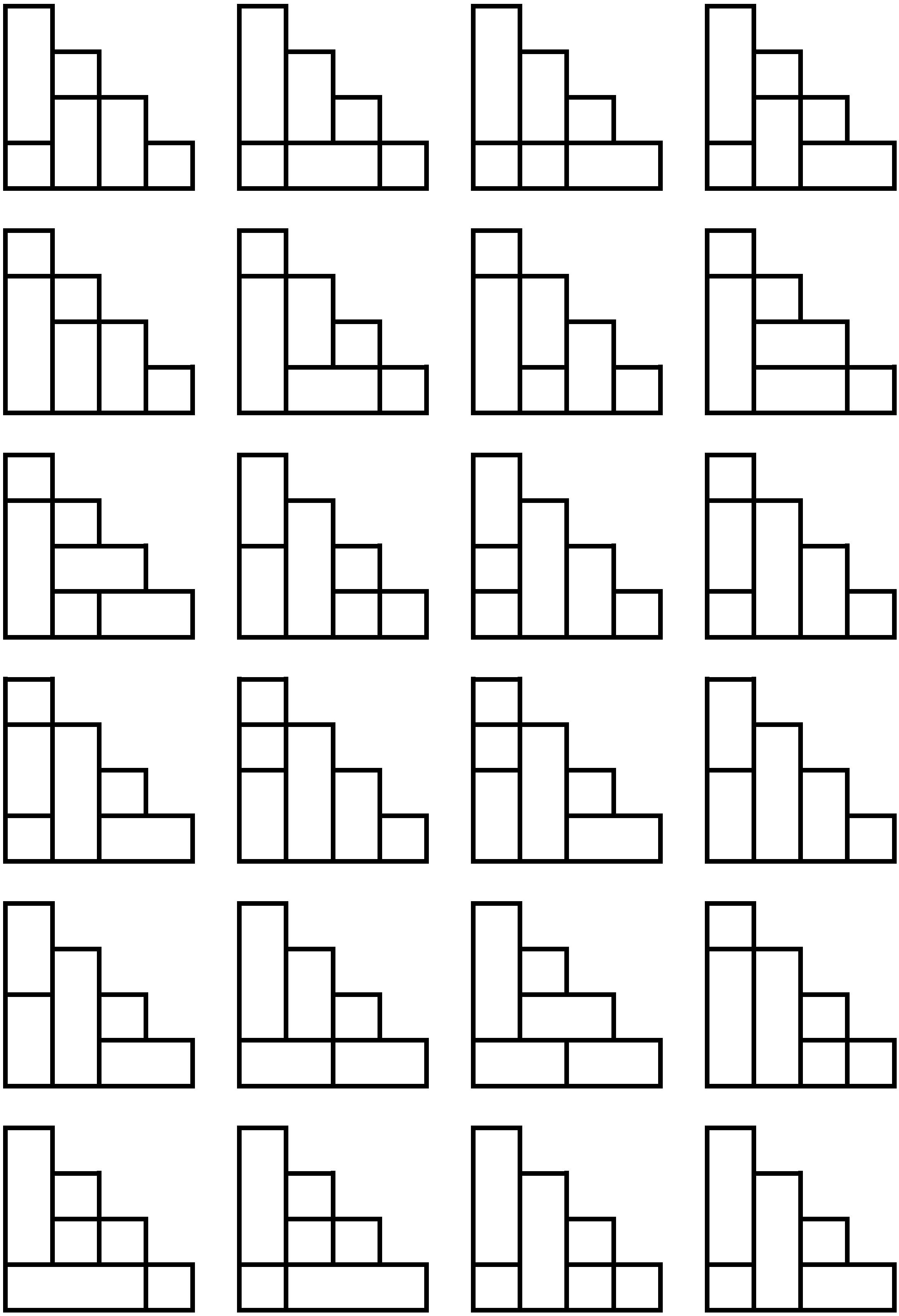
A 1.8

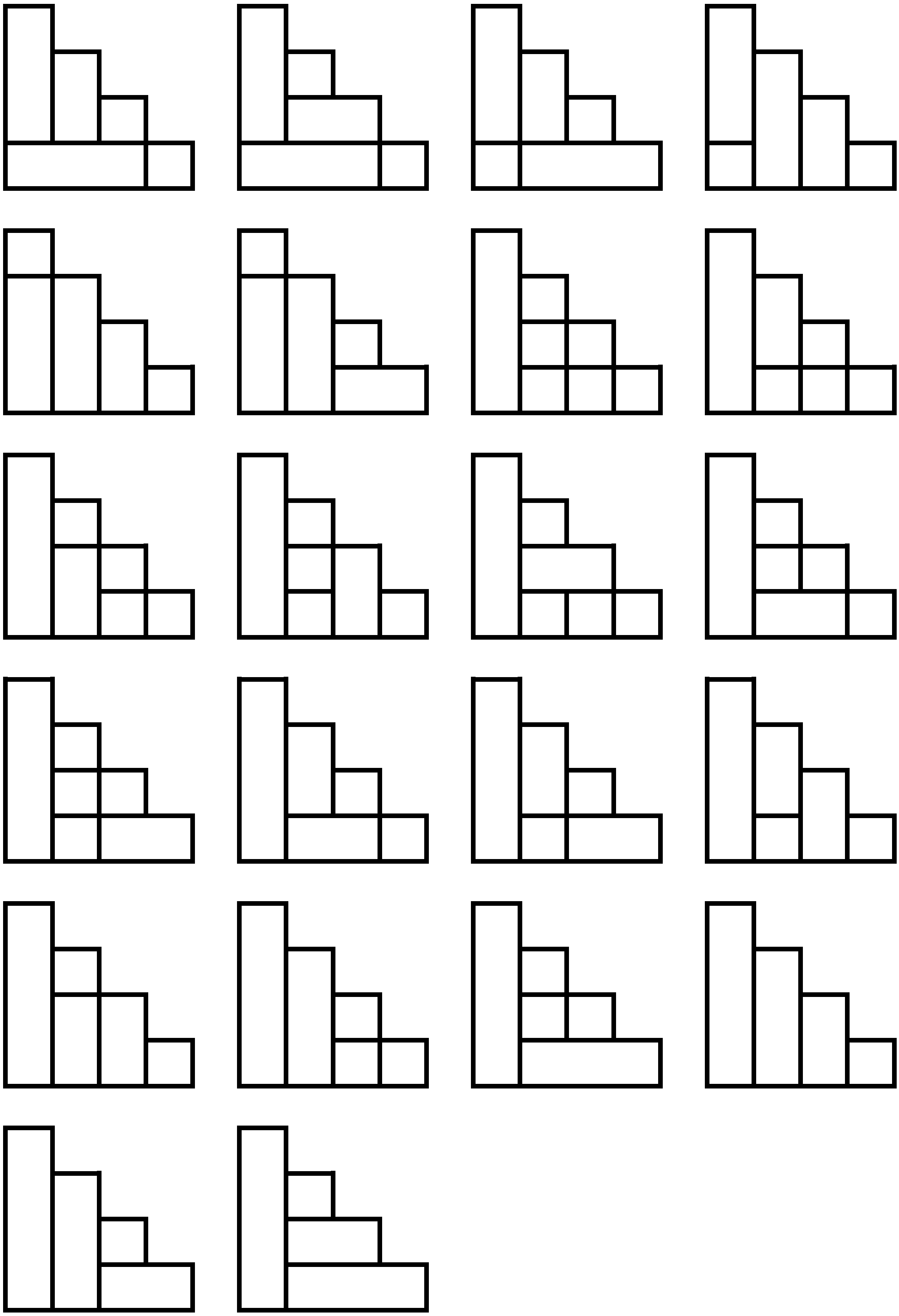
Ein 2er-Baustein bedeckt auf einem Schachbrett jeweils ein helles und ein dunkles Feld. Da eine 3-stufige Treppe aus vier dunklen und zwei hellen Feldern besteht, ist es nicht möglich, die sechs Felder der Treppe nur mit 2er-Bausteinen zu bedecken.

A 1.9



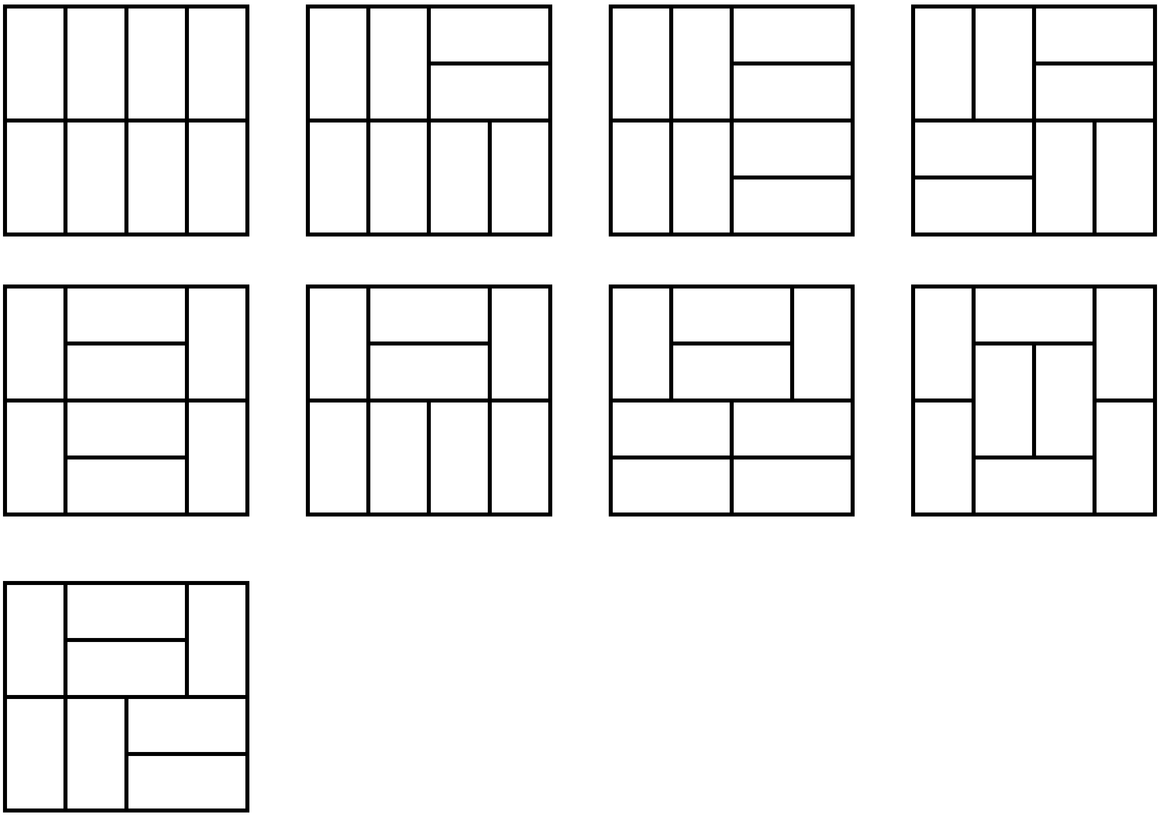






Nicht möglich sind beispielsweise die Summendarstellungen 3 + 3 + 2 + 2 und 4 + 2 + 2 + 2.

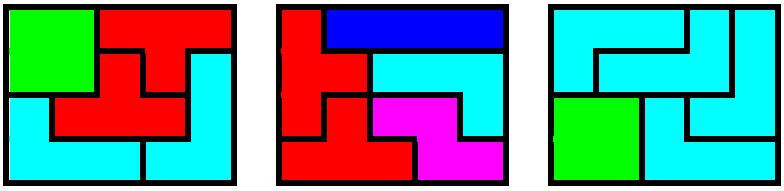
A 1.10



A 1.11

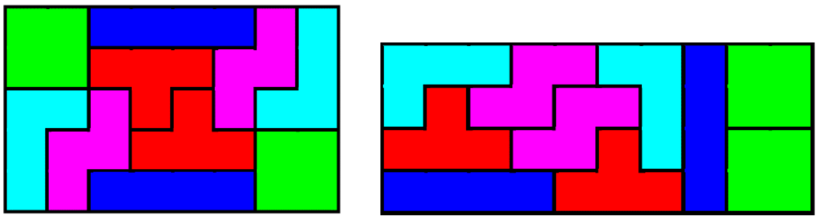
Das T-Element hat drei dunkle Felder und ein helles Feld (oder umgekehrt). Das Rechteck hat bei einer Schachbrett-Färbung gleich viele helle wie dunkle Felder. Egal, wie man die Felder der fünf Tetrominos färbt: Elf Felder haben die eine und neun Felder die andere Farbe – das passt nicht zusammen.

Beispiele für die Parkettierung eines 4x5-Rechtecks mit zwei, drei oder vier verschiedenen Tetrominos.



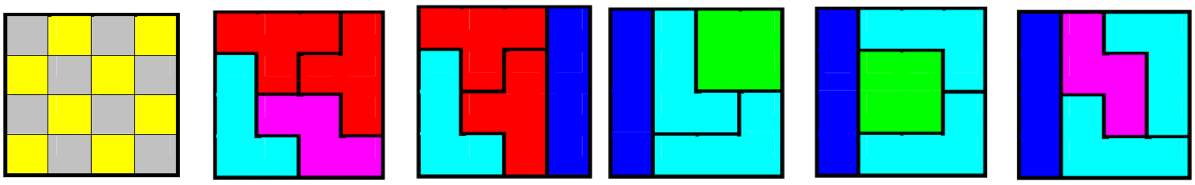
A 1.121

Es gilt zwar auch, dass 2x20 = 40. Aber eine Parkettierung eines solchen Rechtecks mit je zwei Bausteinen von jeder Sorte ist nicht möglich.



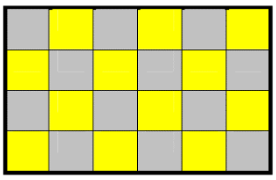
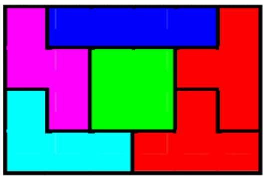
A 1.13

Wenn das T-Element verwendet wird, muss dies (wegen der Schachbrett-Färbung) auch ein zweites Mal vorkommen, und wenn es nicht benutzt wird, sieht man schnell, dass die übrigen vier Elemente nicht gleichzeitig in das Quadrat passen.



A 1.14

Eine Rechteckfläche mit 4x6 = 24 Feldern mit mindestens einem Element von jeder Sorte auszulegen, bedeutet, dass man je ein Puzzlestück des Typs I, O, L bzw. S benutzt und zwei Exemplare vom Typ T, die so liegen müssen, dass das eine drei dunkle Felder und ein helles Feld besetzt und das andere umgekehrt.

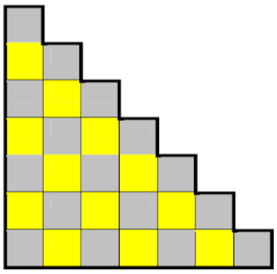
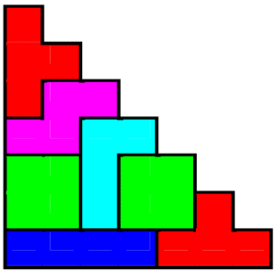
 

Gleiches gilt auch für die anderen beiden Rechtecke.

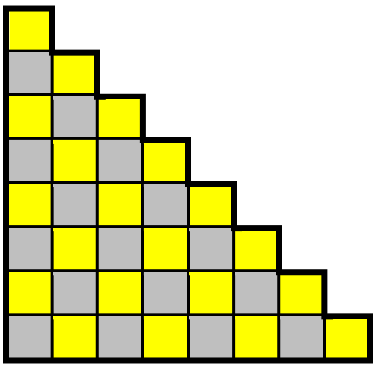
A 1.15

a.

Wenn man die Felder im Stile eines Schachbretts färbt, sind 16 Felder in der einen und 12 in der anderen Farbe gefärbt. Daraus ergibt sich, dass man für die Auslegung mit Tetrominos das T-Element zweimal verwenden muss, wenn man es für die Treppenstufen verwenden möchte.

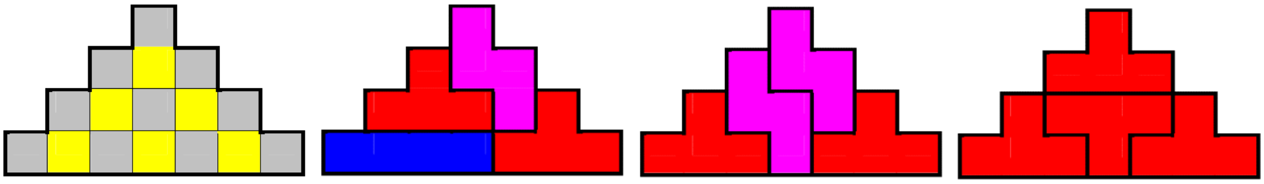
 

Entsprechendes gilt für die zweite Treppe mit 36 Feldern: 20 Felder sind in der einen und 16 Felder in der anderen Farbe gefärbt.

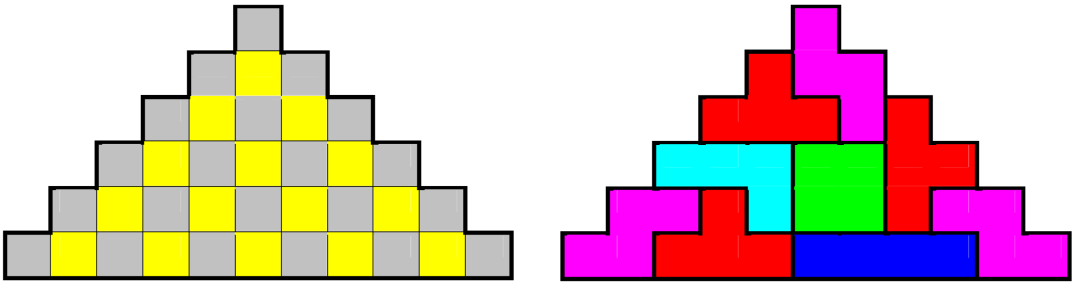


b.

16 Felder: Wenn man Puzzlestücke vom Typ T beim Auslegen der abgebildeten Dreiecksfigur mit 1 + 3 + 5 + 7 = 16 Feldern verwendet, dann müssen 2 oder 4 Exemplare davon benutzt werden, denn von den 16 Feldern sind bei einer Schachbrett-Färbung 1 + 2 + 3 = 6 in der einen und die restlichen 10 in der anderen Farbe. Puzzlestücke vom Typ L oder vom Typ O können beim Parkettieren einer solchen Figur nicht verwendet werden, da sie einzelne Felder abtrennen würden, in die kein Tetromino mehr passt.

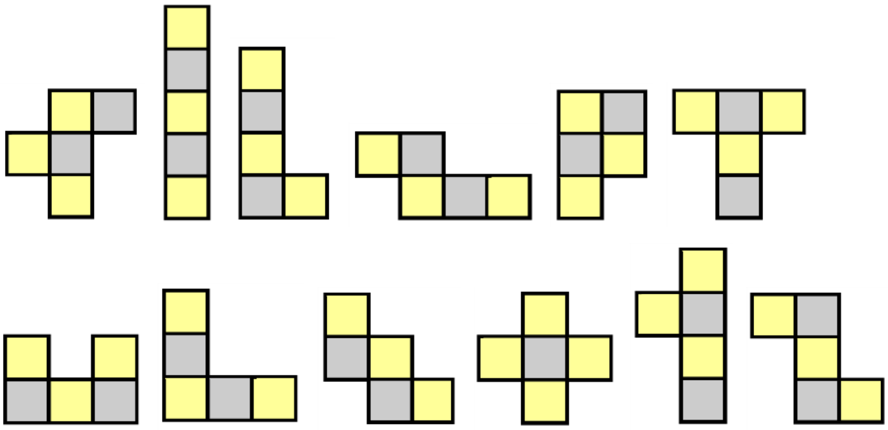


36 Felder: Bei einer Schachbrettfärbung würden von den 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 Feldern 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 in der einen und die restlichen 21 in der anderen Farbe gefärbt. Wegen des Unterschieds sind 3 (oder 5 oder 7) Puzzles vom Typ T notwendig. Da die Figur groß genug ist, können auch Puzzlestücke vom Typ L oder Typ O verwendet werden.



A 1.16

Mit Ausnahme des Elements T, bei dem vier Felder in der einen Farbe und ein Feld in der anderen Farbe gefärbt werden, ist bei allen anderen das Verhältnis 3 zu 2.

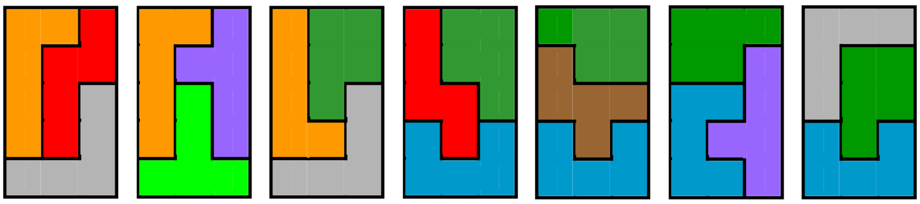


A 1.17

Eine ausführliche Darstellung der Möglichkeiten enthalten die Websites

- https://isomerdesign.com/Pentomino/
- https://gp.home.xs4all.nl/PolyominoSolver/Polyomino.html

A 1.18



A 1.19

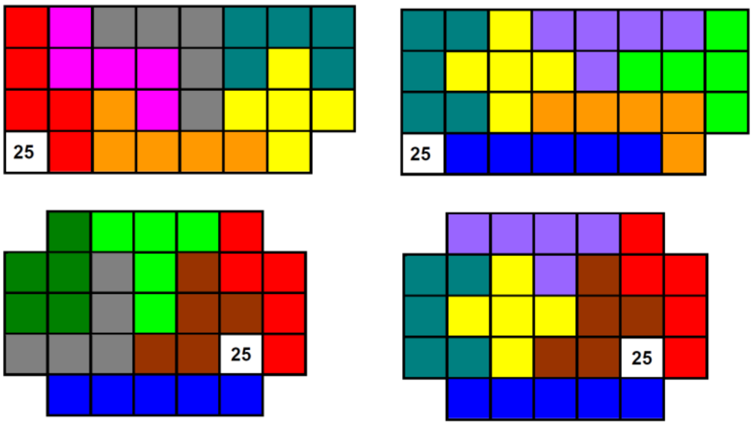
vgl. A 1.17

A 1.20

vgl. A 1.17

A 1.21

Hier zwei je Beispiele für den 25. eines Monats:



A 1.22

vgl. A 1.17

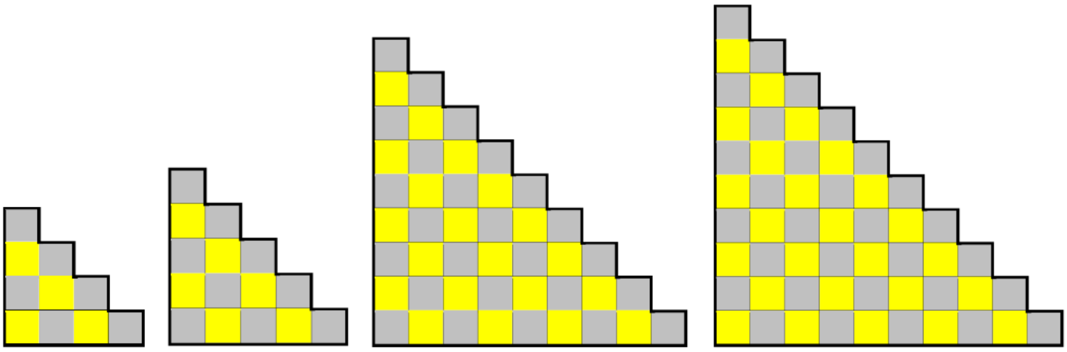
A 1.23

Bei der Dreiecksfigur mit 1 + 2 + 3 + 4 = 10 Feldern sind 1 + 3 = 4 in der einen Farbe und 2 + 4 = 6 in der anderen Farbe.

Bei der Dreiecksfigur mit 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 Feldern sind 2 + 4 = 6 in der einen Farbe und 1 + 3 + 5 = 9 in der anderen Farbe.

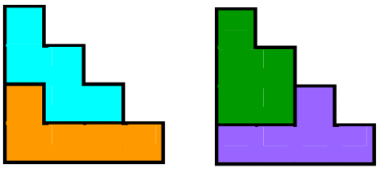
Bei der Dreiecksfigur mit 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 Feldern sind 2 + 4 + 6 + 8 = 20 in der einen Farbe und 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 in der anderen Farbe.

Bei der Dreiecksfigur mit 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 Feldern sind 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 in der einen Farbe und 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 in der anderen Farbe.



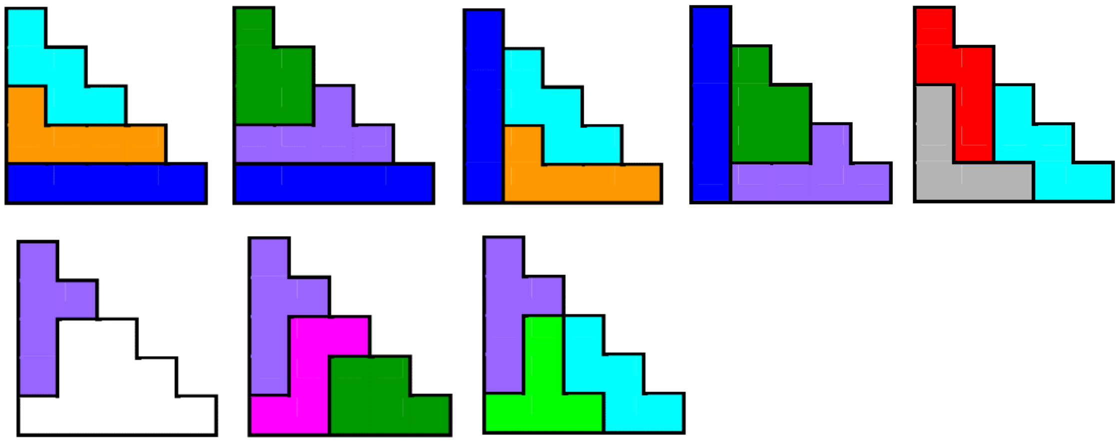
A 1.24

Es gibt 2 Möglichkeiten der Parkettierung der Dreiecksfigur mit 10 Feldern mithilfe von zwei Pentominos.



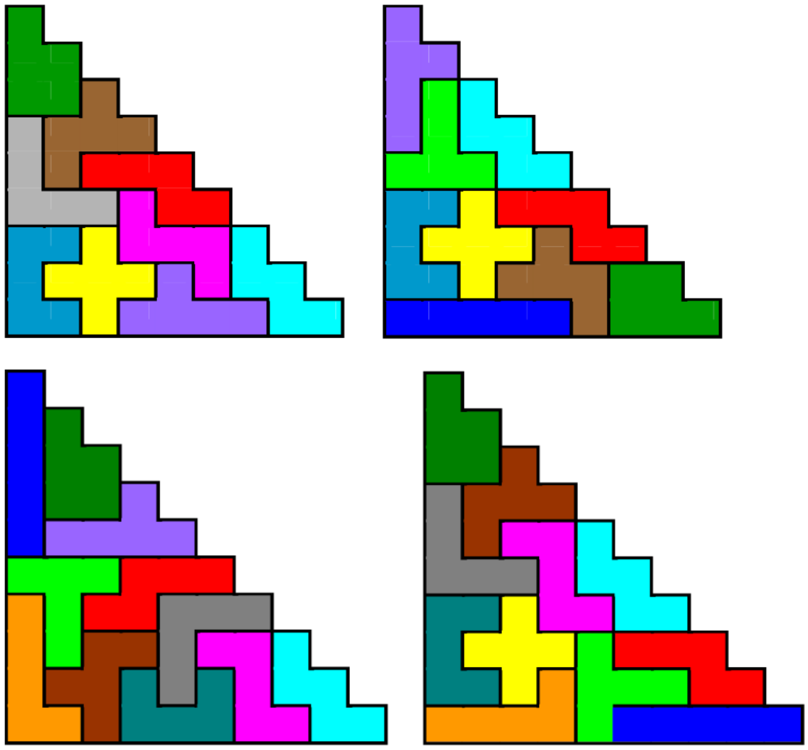
Es gibt 7 Möglichkeiten der Parkettierung der Dreiecksfigur mit 15 Feldern mithilfe von drei Pentominos.

Bei den ersten vier Fällen werden die Parkettierungen der Dreiecksfiguren mit 10 Feldern durch ein Puzzlestück vom Typ I ergänzt. Ein fünfter Typ ist rechts abgebildet. Die letzten beiden Möglichkeiten kann man finden, wenn man beachtet, dass es für die weiß gelassene Teilfigur zwei Möglichkeiten der Parkettierung gibt.

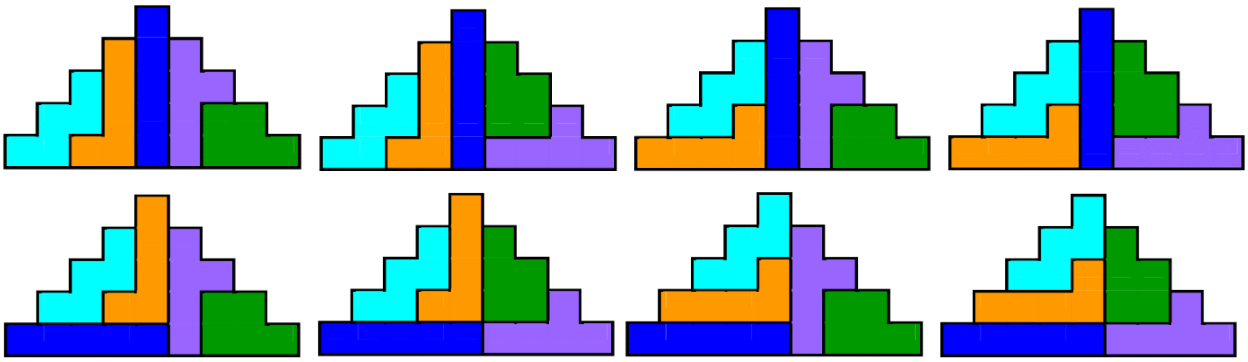


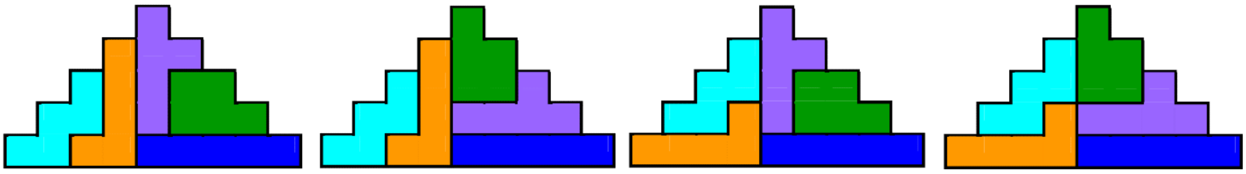
A 1.25

Hier je zwei Beispiele:

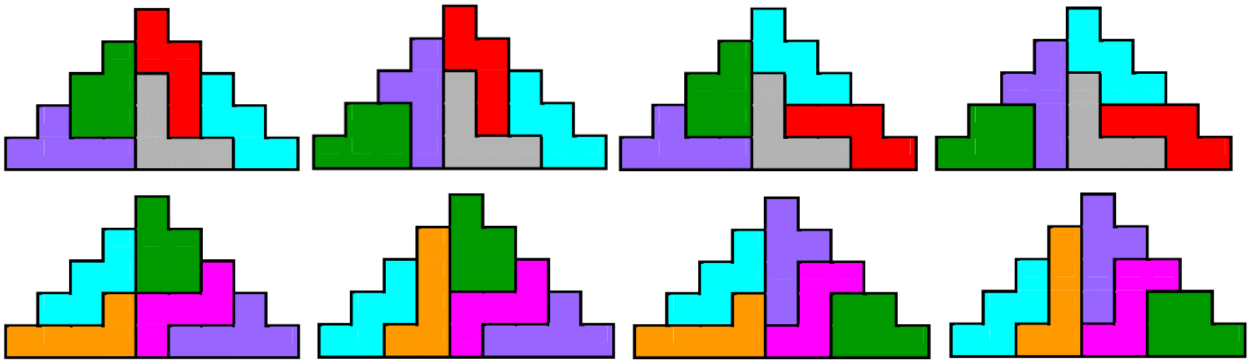


A 1.26



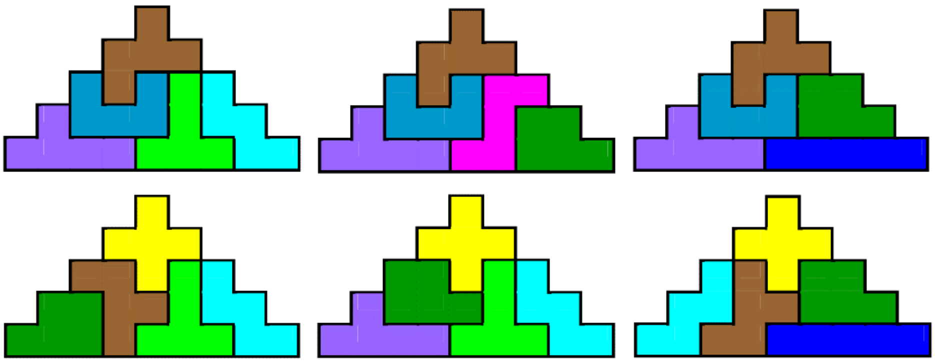


Bei den nächsten Abbildungen werden die oben gefundenen Möglichkeiten zur Parkettierung von Dreiecken mit 10 bzw. 15 Feldern genutzt.

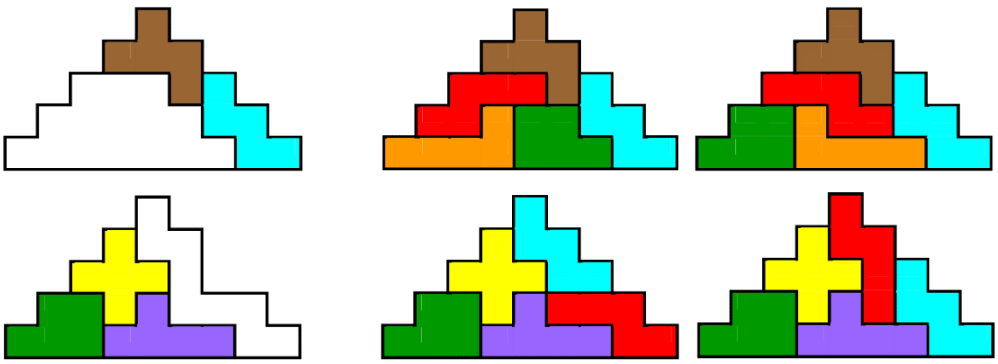


In den nächsten Abbildungen werden Teilflächen auf unterschiedliche Weise parkettiert.

Für die Teilfläche links gibt es vier verschiedene Möglichkeiten, für die Teilfläche rechts drei Möglichkeiten. Diese lassen sich aber nicht unabhängig voneinander kombinieren.



Bei den folgenden Lösungen lässt sich jeweils eine symmetrische Teilfläche spiegeln.



A 1.27