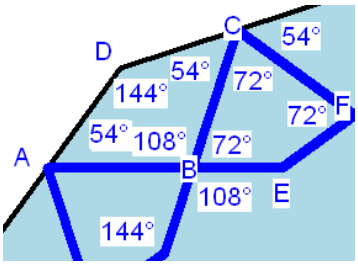
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 13.1:



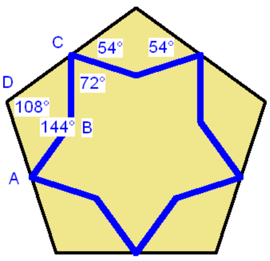
Durch die Linien entstehen im **regelmäßigen Zehneck** zwei Formen symmetrischer Drachen ABCD und BEFC. Die zweite Form setzt sich – wie man an den auftretenden Winkeln abliest – aus zwei spitzwinkligen goldenen Dreiecken zusammen mit der Grundseite BE oder EF und den gleichlangen Schenkeln BC, BE und FC. Die erste Form setzt sich aus zwei gleichschenkligen Dreiecken zusammen mit der Grundseite AB oder BC und Schenkeln AD, BD und CD.

Wählt man als Seitenlänge des regelmäßigen Zehnecks 1 LE, dann ergibt sich mithilfe trigonometrischer Funktionen der folgende Zusammenhang:

$$\sin(36°) = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|}{\frac{1}{2}} = |AB| \approx 0{,}588$$ und wegen $|AB| = |BC| = \Phi\cdot|BE|$ folgt

$|BE| \approx 0{,}363$, also $|AE| \approx 0{,}951$.

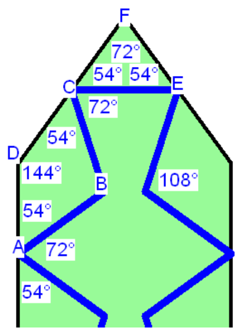
Die beiden Streckenzüge im Innern des 10-Ecks haben jeweils die Länge 10 · 0,951 ≈ 9,51 LE.



Entsprechend ergibt sich beim **regelmäßigen Fünfeck**:

$$\sin(36°) = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AD|}{|AB|} = \frac{\frac{1}{4}}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{\frac{1}{4}}{\sin(36°)} \approx 0{,}425.$$

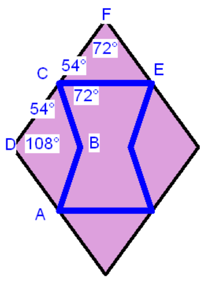
Der Streckenzug im Innern des 5-Ecks hat die Länge 10 · 0,425 ≈ 4,25 LE.



Im **konvexen Sechseck** ergibt sich $\sin(36°) = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|}{|AD|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|}{\frac{1}{2}} = |AB| \approx 0{,}588$

sowie |AB| = |BC| = |CE|.

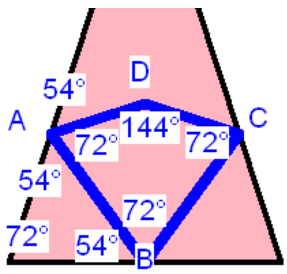
Der Streckenzug im Innern des 6-Ecks hat die Länge 10 · 0,588 ≈ 5,88 LE.



Bei der **Raute** kommt der gleiche Drachen ABCD vor wie beim 5-Eck und das gleiche gleichschenklige Dreieck CEF wie bei symmetrischen 6-Eck, d. h.

|CE| ≈ 0,588 LE und |BC| ≈ 0,425.

Die Gesamtlänge des Streckenzugs im Innern ist 4 · 0,425 + 2 · 0,588 ≈ 2,876 LE.



Beim **konkaven Sechseck** ergibt sich entsprechend |AB| ≈ 0,588 LE und |AD| ≈ 0,363 und somit für beide Streckenzüge jeweils die Gesamtlänge

2 · (0,588 + 0,363) ≈ 1,902 LE.

Symmetrie-Eigenschaften:

10-Eck: achsensymmetrisch zu allen Diagonalen und zu den Verbindungsstrecken der einander gegenüberliegender Seitenmittelpunkte, punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des 10-Ecks,

5-Eck: achsensymmetrisch zu den Achsen, die einen Eckpunkt mit den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten verbinden, punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des 5-Ecks, 6-Eck: achsensymmetrisch zu der Gerade, die die beiden einander gegenüberliegenden „Spitzen“ verbindet sowie zu der dazu senkrecht verlaufenden Geraden durch die Mittelpunkte der links und rechts liegenden Seiten, punktsymmetrisch zum Schnittpunkt dieser beiden Geraden (Mittelpunkt des 6-Ecks),

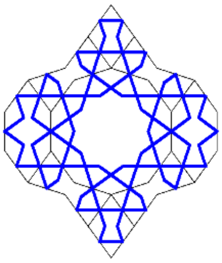
Raute: jeweils achsensymmetrisch zu den Geraden, die einander gegenüberliegende Eckpunkt verbinden, punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Raute,

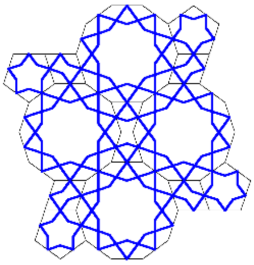
konkaves 6-Eck: achsensymmetrisch zu der vertikal liegenden Geraden durch die Mittelpunkte der oben und unten liegenden Seiten sowie horizontal zu der Diagonale, welche die beiden Eckpunkte an der „Einengung“ verbindet, punktsymmetrisch zum Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

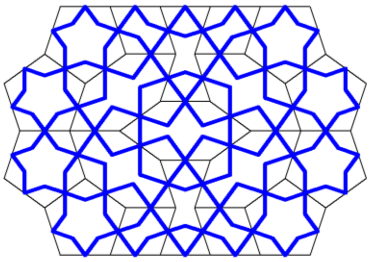
zu A 13.2 – A13.6:

((eigene Aktivitäten))

zu A 13.7:



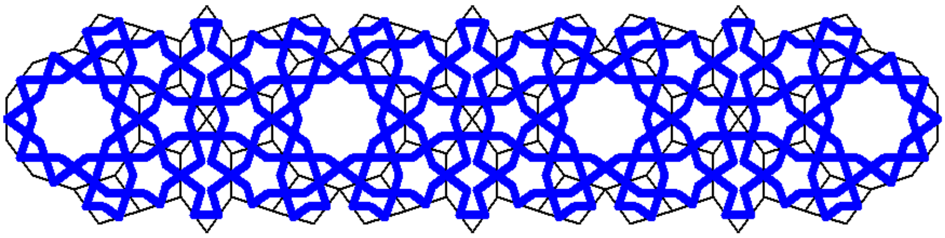




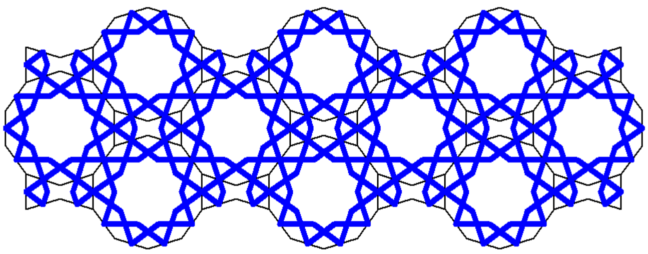
zu A 13.8:

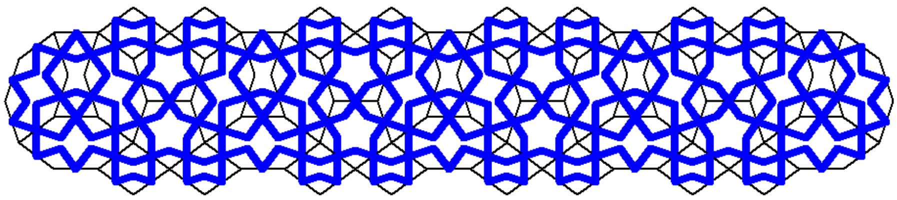
((eigene Aktivitäten))

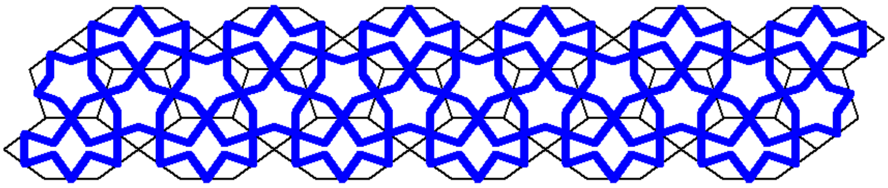
zu A 13.9:



zu **A 13.10:**







zu A 13.11:

Die Situation beim **10-Eck** unterscheidet sich von den nächsten Formen, da hier ein Bogen gezeichnet werden muss, der über zwei Eckpunkte hinweg geht. Daher verlängert man die Seiten des 10-Ecks so, dass ein regelmäßiges 5-Eck entsteht; die so erzeugten Eckpunkte sind dann die Mittelpunkte der 108°-Bögen.

Der Radius beträgt dann $r = 0{,}5 + \frac{\frac{1}{2}}{\cos(36°)} \approx 1{,}118$; die zehn Bögen haben jeweils die Länge

$b = \frac{108°}{360°} \cdot 2\pi r \approx 2{,}107$ (Gesamtlänge 21,07).

Beim **5-Eck** ist $r = 0{,}5$, also haben die fünf Bögen jeweils die Länge $b = \frac{108°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}3 \cdot 2\pi r \approx 0{,}942$

(Gesamtlänge 1,5π).

Beim **konvexen 6-Eck** gehören vier Bögen mit Radius $r = 0{,}5$ zum Sektorwinkel 144° und zwei Bögen den Winkel 72°, d. h., die Bögen haben eine Länge von $b = \frac{144°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}4 \cdot 2\pi r \approx 1{,}257$ bzw.

$b = \frac{72°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}2 \cdot 2\pi r \approx 0{,}628$ (Gesamtlänge: 2π).

Bei der **Raute** gehören je zwei Bögen zum Sektorwinkel 72° bzw. 108°, d. h., die Bögen haben eine Länge von $b = \frac{72°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}2 \cdot 2\pi r \approx 0{,}628$ bzw. $b = \frac{108°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}3 \cdot 2\pi r \approx 0{,}942$ (Gesamtlänge: π).

Beim **konkaven 6-Eck** muss man die rechts und links liegenden Seiten verlängern, um dann vom Schnittpunkt dieser Verlängerungen jeweils einen Kreisbogen zum Sektorwinkel 36° zu zeichnen; diese haben jeweils den Radius $r = \frac{\frac{1}{2}}{\cos(72°)} - 0{,}5 \approx 1{,}118$; diese Bögen haben die Länge

$b = \frac{36°}{360°} \cdot 2\pi r \approx 0{,}702$.

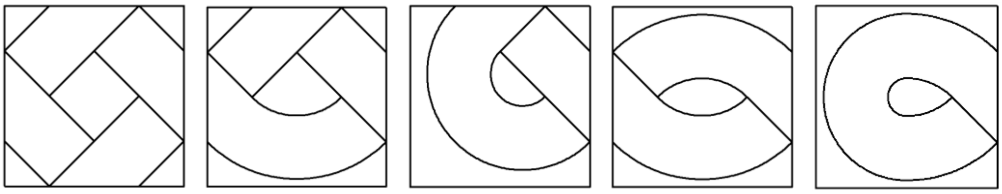
Die vier Kreisbögen in den äußeren Ecken haben jeweils den Radius $r = 0{,}5$ zum Sektorwinkel 72°; diese Bögen haben eine Länge von $b = \frac{72°}{360°} \cdot 2\pi r = 0{,}2 \cdot 2\pi r \approx 0{,}628$.

Die Gesamtlänge aller sechs Bögen ist 3,917.

zu A 13.12:

((eigene Aktivitäten))

zu A 13.13:



Bei der Kombination von Bausteinen der beiden Typen treten den Übergängen Knicke auf, d. h., der Eindruck von geflochtenen Bändern geht verloren.

zu A 13.14:

((eigene Aktivitäten))

zu A 13.15:

Für $h = 2$ für $b = 2, 4, 6$, … entstehen abwechselnd punkt- und achsensymmetrische Figuren (mit einer vertikalen Symmetrieachse), während sich für $b = 3, 5, 7$, … stets Figuren ergeben, die zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen besitzen und daher auch punktsymmetrisch sind.

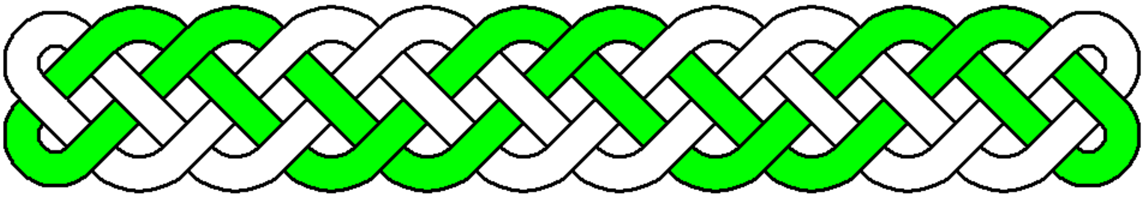
zu A 13.16:

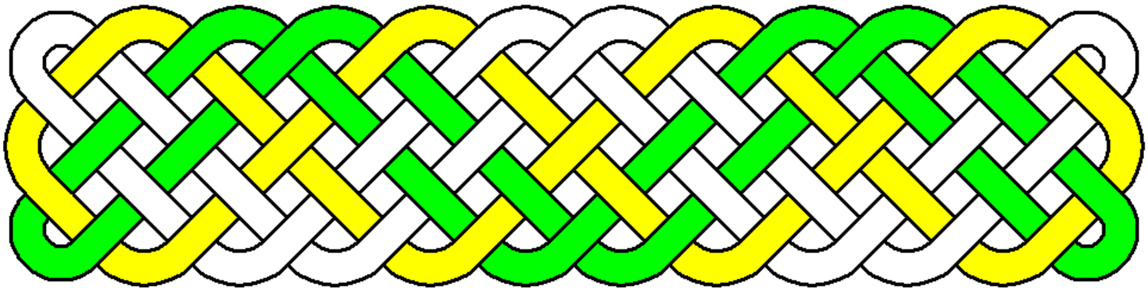
Für h = 3 ergibt sich für b = 3 eine punktsymmetrische Figur, für b = 4 und b = 5 eine Figur mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieachsen, die daher auch punktsymmetrisch sind, für b = 6 ergibt sich eine achsensymmetrische Figur (mit einer vertikalen Symmetrieachse).

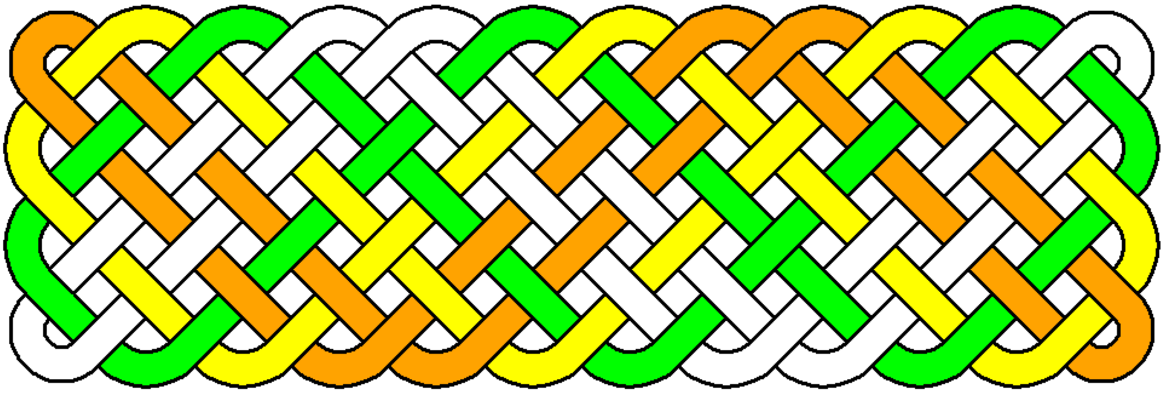
(Falls Sie auch der Spur hinsichtlich der Symmetrieeigenschaften gefolgt sind, haben Sie vielleicht ebenfalls einen Zusammenhang mit der Anzahl der notwendigen Farben herausgefunden.)

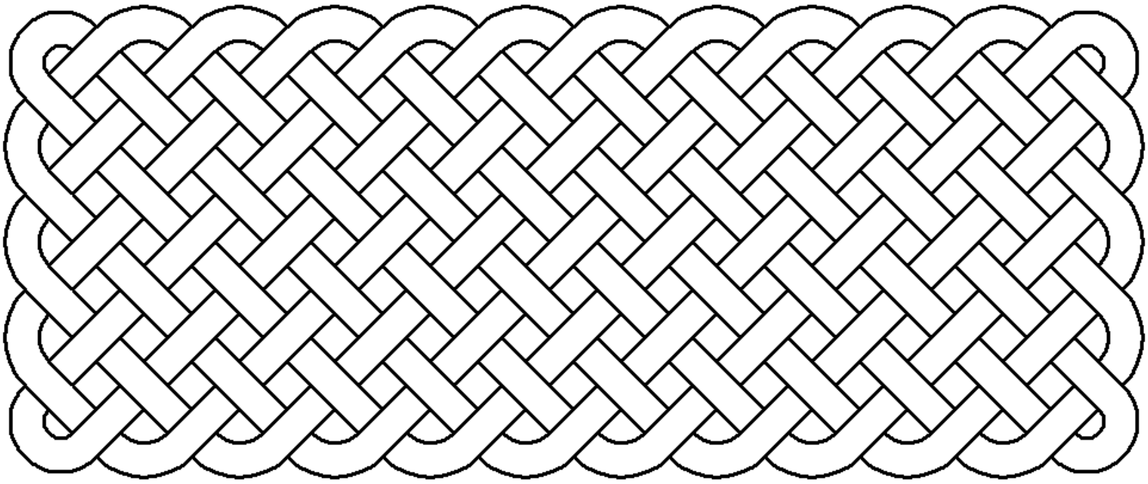
zu A 13.17:

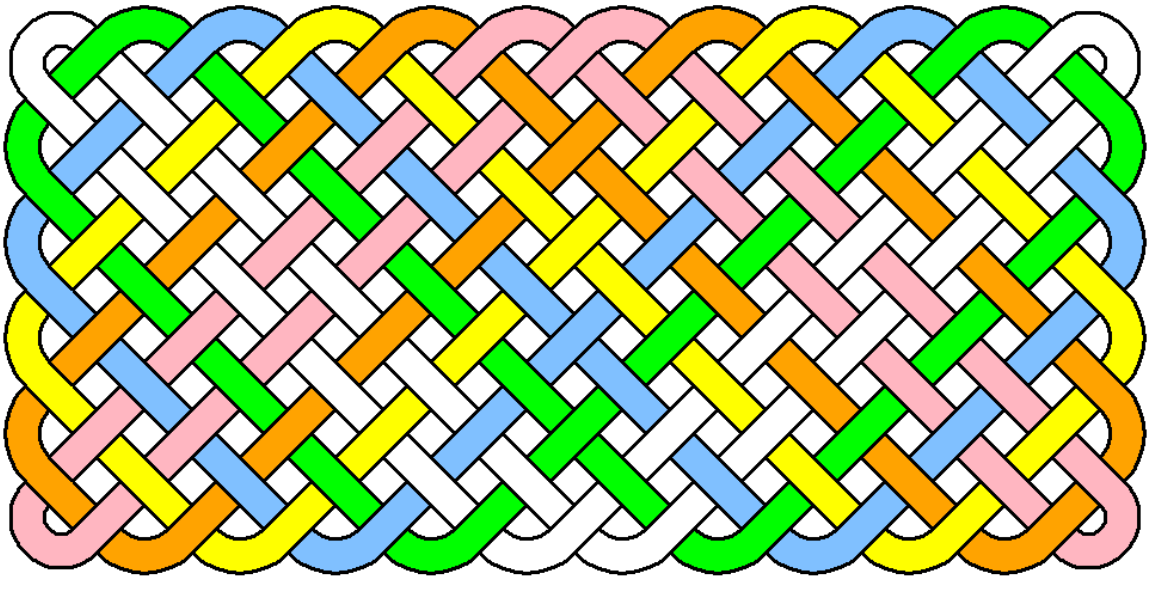
Die Figuren setzen sich aus 2, 3, 4, 1, 6 verschiedenen Bändern zusammen.



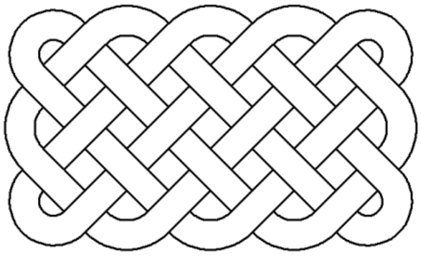


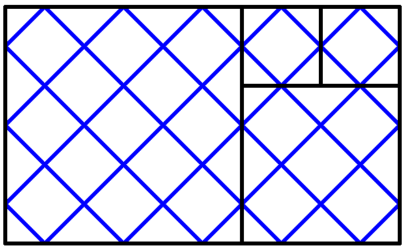






zu A 13.18:

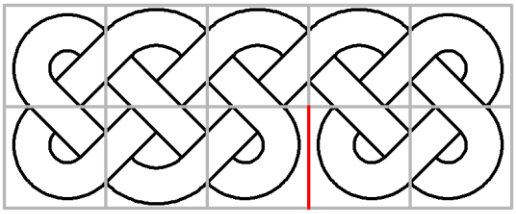


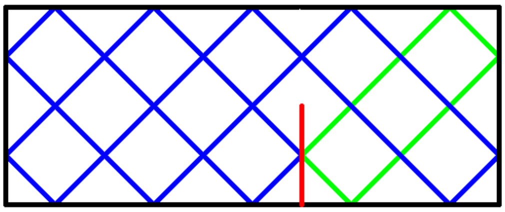


Zeichnet man eine Billardbahn in einer Farbe, dann stellt man fest, dass diese schließlich alle vorkommenden Strecken erfasst und man daher nur eine Farbe benötigt.

zu A 13.19:

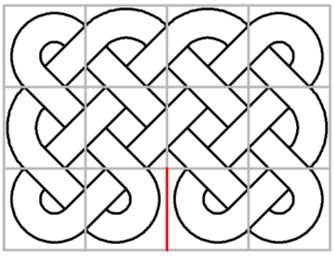
a. Für den linken Teil (3×2-Rechteck) benötigt man nur *eine* Farbe, für den rechten Teil (2×2-Quadrat) zwei Farben – die Farbe im Rechteck wird durch eine der Farben im rechten Teil bestimmt.

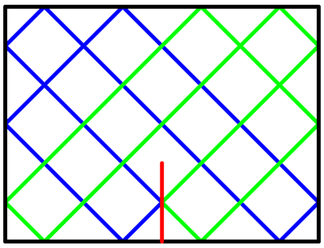


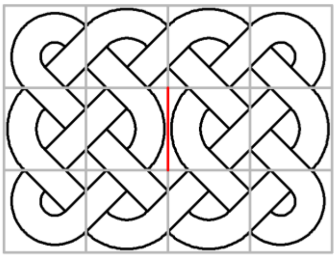


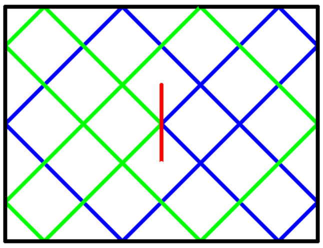
b.

Für den linken und für den rechten Teil (zwei 2×3-Rechtecke) benötigt man eigentlich *jeweils* nur *eine* Farbe, die wegen der doppelten Öffnung jeweils in den anderen Teil hinüberführt.

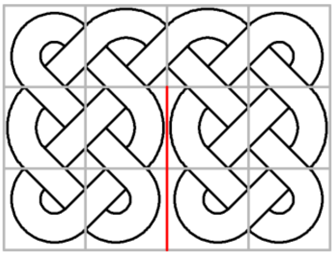


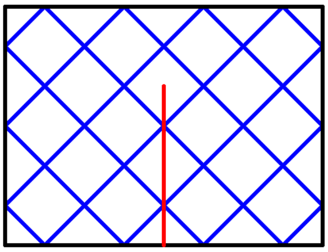


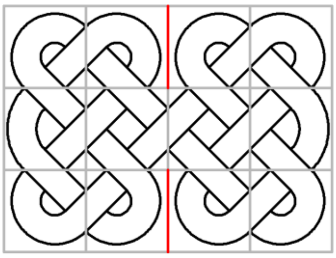


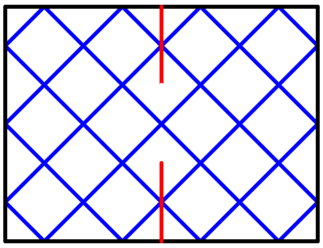


Für den linken und für den rechten Teil (zwei 2×3-Rechtecke) benötigt man jeweils nur *eine* Farbe, die wegen der Öffnung im oberen bzw. im mittleren Bereich übereinstimmen muss.



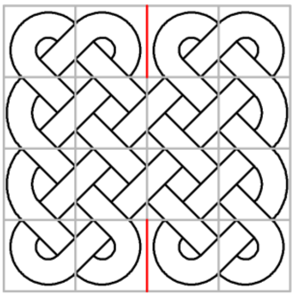






zu A 13.20:

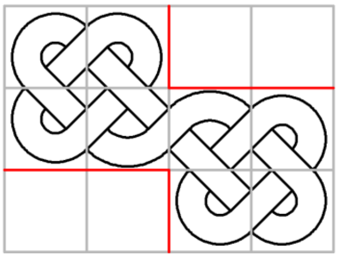
Für den linken und für den rechten Teil (zwei 2×4-Rechtecke) benötigt man *jeweils* zwei Farben; da zwei der Flechtbänder jeweils in ihrer Hälfte liegen, können diese die gleiche Farbe erhalten.

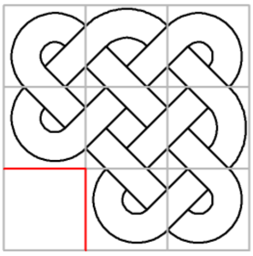


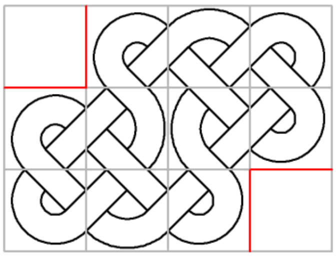
((weitere eigene Aktivitäten))

zu A 13.21:

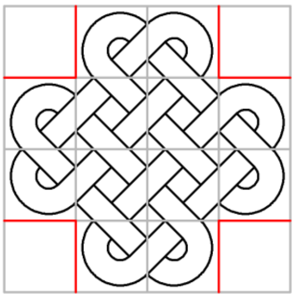
a.

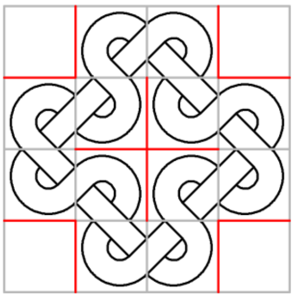


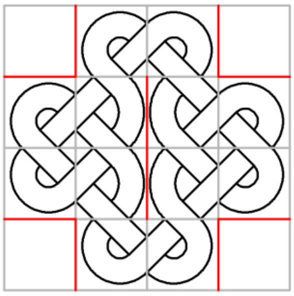




b.

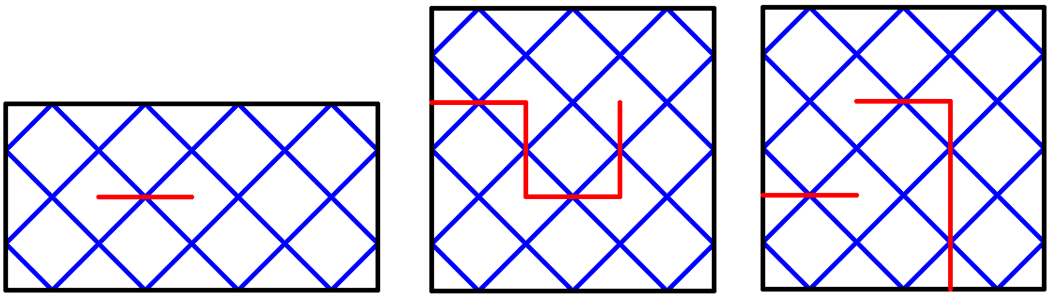






c. ((eigene Aktivitäten))

zu A 13.22:

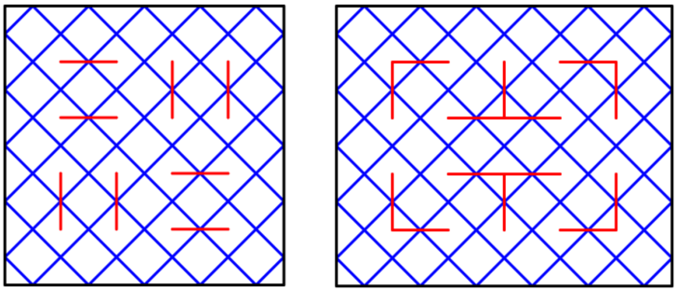


((Flechtmuster selbst))

zu A 13.23:

((eigene Aktivitäten))

A 13.24:



((es sind tatsächlich durchgehende Graphen))

A 13.25:

((eigene Aktivitäten))