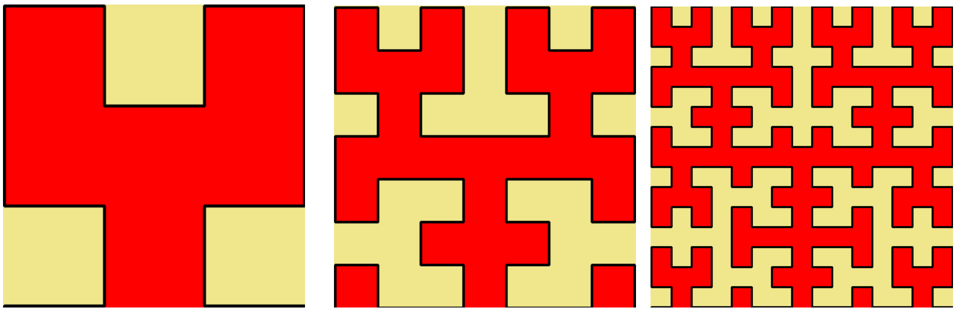
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 11.1:



n = 2: $r_2 = 6$, $g_2 = 3$, also 6 von $(2^n - 1)^2 = 9$ sind rot gefärbt

n = 3: $r_3 = 28$, $g_3 = 21$, also 28 von 49 sind rot gefärbt

Die 49 = $(2^n - 1)^2$ Kästchen setzen sich zusammen aus 2 Hilbert-Kurven mit $r_2 = 6$ rot und $g_2 = 3$ gelb gefärbten Kästchen, aus 2 Hilbert-Kurven mit $g_2 = 3$ rot und $r_2 = 6$ gelb gefärbten Kästchen sowie in der Mitte $2^n - 1 = 7$ rot gefärbte Kästchen (waagerecht) und je $2^{n-1} - 1 = 3$ rot und gelb gefärbte Kästchen (senkrecht), also insgesamt

rot: $r_3 = 2 \cdot r_2 + 2 \cdot g_2 + (2^n - 1) + (2^{n-1} - 1) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 7 + 3 = 28$ Kästchen

gelb: $g_3 = 2 \cdot g_2 + 2 \cdot r_2 + 0 + (2^{n-1} - 1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 0 + 3 = 21$ Kästchen

n = 4:

rot: $r_4 = 2 \cdot r_3 + 2 \cdot g_3 + (2^n - 1) + (2^{n-1} - 1) = 2 \cdot 28 + 2 \cdot 21 + 15 + 7 = 120$ Kästchen

gelb: $g_4 = 2 \cdot g_3 + 2 \cdot r_3 + 0 + (2^{n-1} - 1) = 2 \cdot 21 + 2 \cdot 28 + 0 + 7 = 105$ Kästchen

Da sich die Anzahl der rot und gelb gefärbten Kästchen nur um $2^n - 1$ unterscheidet, spielt dieser Unterschied bei wachsendem n keine Rolle mehr:

Anteil der Differenz = $\dfrac{2^n - 1}{(2^n - 1)^2} = \dfrac{1}{2^n - 1} \to 0$ für $n \to \infty$.

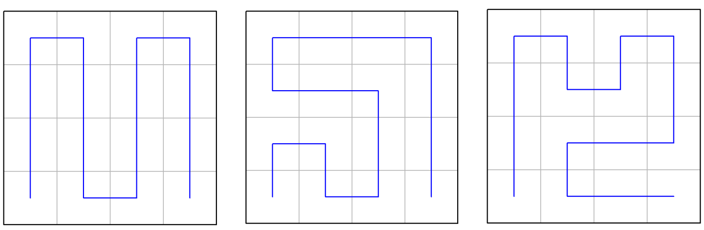
zu A 11.2:

Bei der ersten Variation wird die gegenüber der Peano-Form gespiegelte S-Form so oft hintereinandergesetzt (und verbunden), bis der Rand erreicht ist, dann daneben in entgegengesetzter Richtung zurückgeführt usw. (statt: 2-mal vorwärts – rechts drehen – 2-mal vorwärts – links drehen – 2-mal vorwärts jetzt: rechts drehen – 2-mal vorwärts – links drehen – 2-mal vorwärts – rechts drehen – 2-mal vorwärts)

Bei der zweiten Variation wird eine andere Mäanderform dazu verwendet, durch die neun Felder der Ausgangskurve zu laufen: rechts drehen – 2-mal vorwärts – links drehen – 2-mal vorwärts – links drehen – 1-mal vorwärts – links drehen – 1-mal vorwärts – rechts drehen – 1-mal vorwärts – rechts drehen – 1-mal vorwärts.

zu A 11.3:

Beispiele:



zu A 11.4:

Bestimmung der Gesamt-„Breite" b_n:

$b_2 = \frac{1}{2} \cdot s$; $b_4 = \frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{4} \cdot s$; $b_8 = \frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{4} \cdot s + \frac{1}{8} \cdot s$; … also $b_{2^n} = s \cdot \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \right)$.

Hieraus folgt: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(b_{2^n} \right) = s$ und analog für die Folge der Gesamt-„Höhen": $\lim\limits_{n \to \infty} \left(h_{2^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s$

Um ein Einheitsquadrat zu füllen, müssen nur die horizontalen Strecken mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gestaucht werden.

zu A 11.5:

Für die **Länge der Kurve** ergibt sich:

Die Kurve 1. Ordnung besteht aus 4 · 5 = 20 = 4 + 4² = 4 · (1 + 4) Strecken von je einer Kästchen-Einheit (KE), das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $3 \cdot \sqrt{2} = (2^2 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE.

Hieraus ergibt sich für den Umfang: $u_1 = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{10}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Dasselbe Ergebnis kann man natürlich auch direkt an der (grün ausgefüllten) Figur ablesen: Die Umfangslinie besteht aus 20 Strecken der Länge $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{2}$.

Die Kurve 2. Ordnung besteht aus 4 · 20 + 4 = 84 = 4 + 4² + 4³ = 4 · (1 + 4 + 4²) Strecken von je einer Kästchen-Breite, das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2 \cdot 3 + 1) \cdot \sqrt{2} = (2^3 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE.

Hieraus ergibt sich für den Umfang: $u_2 = \frac{84}{7 \cdot \sqrt{2}} = 6 \cdot \sqrt{2}$.

Entsprechend besteht die Kurve 3. Ordnung aus 4 · 84 + 4 = 340 = 4 + 4² + 4³ + 4^4 = 4 · (1 + 4 + 4² + 4³) Strecken von je einer Kästchen-Breite, das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2^4 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE.

Hieraus ergibt sich für den Umfang: $u_3 = \frac{340}{15 \cdot \sqrt{2}} = \frac{34}{3} \cdot \sqrt{2}$.

Allgemein besteht eine Kurve n-ter Ordnung aus

4 + 4² + … + 4^n + 4^{n+1} = 4 · (1 + 4 + … + 4^n) = $4 \cdot \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4}{3} \cdot (4^{n+1} - 1)$ Strecken von je einer Kästchen-Breite, das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2^{n+1} - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE.

Hieraus ergibt sich für den Umfang: $u_n = \frac{4 \cdot (4^{n+1} - 1)}{3 \cdot (2^{n+1} - 1) \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4^{n+1} - 1)}{3 \cdot (2^{n+1} - 1)} \cdot \sqrt{2}$

Mit größer werdendem n wächst die Länge der Kurve über alle Grenzen hinaus.

Für den **Flächeninhalt** der von der Kurve eingeschlossenen Fläche gilt:

Die erste Figur besteht aus 9 + 4 = 13 = 2^4 – 3 Kästchen; das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $3 \cdot \sqrt{2} = (2^2 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE, also einen Flächeninhalt von 2 · (2² – 1)² = 18 KE². Hieraus ergibt sich dann der Flächeninhalt der eingeschlossenen Figur: $A_1 = \frac{13}{18}$.

Die zweite Figur besteht aus 4 · (9 + 4) + 9 = 61 = 2^6 – 3 Kästchen; das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2 \cdot 3 + 1) \cdot \sqrt{2} = (2^3 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE, also einen Flächeninhalt von 2 · (2³ – 1)² = 98 KE². Hieraus ergibt sich dann der Flächeninhalt der eingeschlossenen Figur: $A_2 = \frac{61}{98}$.

Die dritte Figur besteht aus 4 · 61 + 9 = 253 = 2^8 – 3 Kästchen; das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2^4 - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE, also einen Flächeninhalt von 2 · $(2^4 - 1)^2$ = 450 KE². Hieraus ergibt sich dann der Flächeninhalt der eingeschlossenen Figur: $A_3 = \frac{253}{450}$.

Allgemein schließt eine Kurve n-ter Ordnung 2^{2n+2} – 3 Kästchen ein; das umgebende Quadrat hat eine Seitenlänge von $(2^{n+1} - 1) \cdot \sqrt{2}$ KE, also einen Flächeninhalt von 2 · $(2^{n+1} - 1)^2$ KE².

Hieraus ergibt sich für den Flächeninhalt: $A_n = \frac{2^{2n+2} - 3}{2 \cdot (2^{n+1} - 1)^2} = \frac{2^{2n+2} - 3}{2^{2n+3} - 2^{n+3} + 2}$.

Für wachsendes n wird dieser Term im Wesentlichen von den Potenzen 2^{2n+2} im Zähler und 2^{2n+3} im Nenner bestimmt, also: $A_n \approx \frac{2^{2n+2}}{2^{2n+3}} = \frac{1}{2}$.

zu A 11.6:

Die Ausgangsfigur besteht aus einen 5-zackigen Stern, der dadurch entstanden sein könnte, dass man auf einem regelmäßigen 5-Eck mit Seitenlänge 1 jeweils Zacken (spitzwinklige goldene Dreiecke mit Basis 1 und Schenkel Φ) gezeichnet hat.

Der Umfang der 1. Figur beträgt also: $\boxed{u_1 = 10\Phi}$.

Die Fläche der gesamten Figur setzt sich zusammen aus 2 stumpfwinkligen goldenen Dreiecken mit einer Basis der Länge Φ und Schenkeln der Länge 1 (im innen liegenden 5-Eck) und 6 spitzwinkligen goldenen Dreiecken mit einer Basis der Länge 1 und Schenkeln der Länge Φ (5 Zacken und 1 innen im 5-Eck).

Für die Flächeninhalte gilt: $A_{stumpf} = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \sin(36°)$ und $A_{spitz} = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \sin(72°) \approx 0{,}769$, wobei $A_{spitz} = \Phi \cdot A_{stumpf}$, also $A_{stumpf} = (\Phi - 1) \cdot A_{spitz}$

Daher ergibt sich für die 1. Figur der Gesamtflächeninhalt $A_1 = (6 + 2 \cdot (\Phi - 1)) \cdot A_{spitz}$, also

$\boxed{A_1 = (4 + 2 \cdot \Phi) \cdot A_{spitz}}$

Bei der **2. Figur** kommen auf den 5 Zacken des Sterns 5 · 2 = 10 kleine spitzwinklige goldene Dreiecke hinzu, deren Basis die Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ hat und die Schenkel die Länge $\frac{1}{\Phi}$; denn eine Zacken-Seite der 1. Figur hat die Länge $\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = (\Phi - 1) + (2 - \Phi) + (\Phi - 1) = \Phi$. Mit jeder zusätzlichen „Zacke" vergrößert sich also der Umfang um $\frac{2}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2} = \frac{2\Phi - 1}{\Phi^2}$ **.**

Hinsichtlich des Umfangs ergibt sich also: $\boxed{u_2 = 10\Phi + 5 \cdot 2 \cdot \frac{2\Phi - 1}{\Phi^2}}$

Der Flächeninhalt der hinzugekommenen spitzwinkligen goldenen Dreiecke mit einer Basis die Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ hat und mit Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi}$ ist $\frac{1}{\Phi^4}$ -mal so groß wie der Flächeninhalt der Zacken der Ausgangsfigur, da die Streckenlängen jeweils mit dem Faktor $\frac{1}{\Phi^2}$ gestaucht werden. Der Flächeninhalt der Figur vergrößert sich also im Vergleich zur Ausgangsfigur um $5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\Phi^4} \cdot A_{spitz}$, also

$\boxed{A_2 = ((4 + 2 \cdot \Phi) + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{\Phi^4}) \cdot A_{spitz}}$.

Bei der **3. Figur** kommen noch einmal 5 · 8 = 5 · 2³ = 40 kleinere spitzwinklige goldene Dreiecke hinzu, deren Basis die Länge $\frac{1}{\Phi^4}$ hat und die Schenkel die Länge $\frac{1}{\Phi^3}$. Mit jedem dieser Dreiecke wächst der Umfang um $\frac{2}{\Phi^3} - \frac{1}{\Phi^4} = \frac{2\Phi - 1}{\Phi^4}$.

Hinsichtlich des Umfangs ergibt sich also:

$\boxed{u_3 = 10\Phi + 5 \cdot 2 \cdot \frac{2\Phi - 1}{\Phi^2} + 5 \cdot 2^3 \cdot \frac{2\Phi - 1}{\Phi^4}}$

Der Flächeninhalt der hinzukommenden spitzwinkligen goldenen Dreiecke nimmt gegenüber den Dreiecken der 2. Figur um $5 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{\Phi^8} \cdot A_{spitz}$ zu, also

$$\boxed{A_3 = ((4+2\cdot\Phi)+5\cdot 2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}+5\cdot 2^3\cdot\tfrac{1}{\Phi^8})\cdot A_{spitz}}$$

Bei der **4. Figur** kommen 5 · 32 = 5 · 2^5 noch kleinere spitzwinklige goldene Dreiecke hinzu, deren Basis die Länge $\frac{1}{\Phi^6}$ hat und die Schenkel die Länge $\frac{1}{\Phi^5}$.

Der Umfang wächst also um $5\cdot 2^5\cdot\left(\frac{2}{\Phi^5}-\frac{1}{\Phi^6}\right)=5\cdot 2^5\cdot\frac{2\Phi-1}{\Phi^6}$, der Flächeninhalt um $5\cdot 2^5\cdot\frac{1}{\Phi^{12}}\cdot A_{spitz}$, usw.

Setzt man dies fort, dann ergibt sich für den Gesamtumfang der Figur:

$$u=10\Phi+\left(5\cdot 2\cdot\tfrac{2\Phi-1}{\Phi^2}+5\cdot 2^3\cdot\tfrac{2\Phi-1}{\Phi^4}+5\cdot 2^5\cdot\tfrac{2\Phi-1}{\Phi^6}+\ldots\right)=10\Phi+5\cdot 2\cdot\tfrac{2\Phi-1}{\Phi^2}\cdot\left(1+2^2\cdot\tfrac{1}{\Phi^2}+2^4\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}+\ldots\right)$$

Die in der Klammer stehenden Summanden wachsen mit dem Faktor $\frac{2^2}{\Phi^2}\approx 1{,}53$, d. h., der Umfang wächst über alle Schranken hinaus.

Für den Gesamt-Flächeninhalt ergibt sich

$$A=\lim_{n\to\infty}A_n=\left((4+2\cdot\Phi)+5\cdot 2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}+5\cdot 2^3\cdot\tfrac{1}{\Phi^8}+5\cdot 2^5\cdot\tfrac{1}{\Phi^{12}}+\ldots\right)\cdot A_{spitz}$$
$$=\left((4+2\cdot\Phi)+5\cdot 2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}\cdot\left(1+2^2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}+2^4\cdot\tfrac{1}{\Phi^8}+\ldots\right)\right)\cdot A_{spitz}$$
$$=\left((4+2\cdot\Phi)+5\cdot 2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{\Phi^4}}\right)\cdot A_{spitz}=\left((4+2\cdot\Phi)+5\cdot 2\cdot\tfrac{1}{\Phi^4}\cdot\frac{\Phi^4}{\Phi^4-4}\right)\cdot A_{spitz}$$
$$=\left((4+2\cdot\Phi)+\frac{10}{\Phi^4-4}\right)\cdot A_{spitz}$$
$$\approx 10{,}74\cdot A_{spitz}\approx 8{,}263$$

Die Hausdorff-Dimension der Figur ist $\frac{\log(4)}{\log(\Phi^2)}\approx 1{,}44$, denn die einzelnen Strecken werden im nächsten Schritt durch vier Strecken ersetzt, deren Länge $1/\Phi^2$-mal so lang ist wie die vorangehende.

zu A 11.7:

Ausgangsfigur $A_1 = 5$,

$A_2 = 5/9 \cdot A_1 = 25/9$, $A_3 = 5/9 \cdot A_2$, allgemein: $A_n=\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\cdot A_1$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$

Anzahl der Strecken $a_1 = 4 \cdot 3 = 12$, Umfang: $u_1 = 12$

$a_2 = 4 \cdot (12 – 1) + (12 – 4) = 5 \cdot 12 – 8 = 5 \cdot a_1 – 8 = 52$, $u_2 = a_2/3 = 52/3$

$a_3 = 4 \cdot (52 – 1) + (52 – 4) = 5 \cdot a_2 – 8 = 252$, $u_3 = a_3/9 = 252/9$

$$a_n=5\cdot a_{n-1}-8=2\cdot 5^n+2\,,\; u_n=\frac{a_n}{3^{n-1}}=\frac{2\cdot 5^n+2}{3^{n-1}}=\frac{10\cdot 5^{n-1}}{3^{n-1}}+\frac{2}{3^{n-1}}=10\cdot\left(\tfrac{5}{3}\right)^{n-1}+\frac{2}{3^{n-1}}\to\infty$$

Die Hausdorff-Dimension der Figur ist $\frac{\log(5)}{\log(3)}\approx 1{,}465$, denn die einzelnen Quadrate werden im nächsten Schritt durch fünf Quadrate ersetzt, deren Grundseite 1/3-mal so lang ist wie die vorangehende.

zu A 11.8:

Ein regelmäßiges 5-Eck mit Seitenlänge $s_0 = 1$ LE (nicht abgebildet) wird ersetzt durch 5 regelmäßige 5-Ecke, für deren Seitenlänge s_1 gilt:

$$(1+\tfrac{1}{\Phi}+1)\cdot s_1=s_0\;\Leftrightarrow\;(1+\Phi-1+1)\cdot s_1=s_0\;\Leftrightarrow\;(\Phi+1)\cdot s_1=s_0\;\Leftrightarrow\;s_1=\frac{s_0}{\Phi+1}\approx 0{,}382\text{ usw.}$$

Für die Hausdorff-Dimension gilt $\frac{\log(5)}{\log(1+\Phi)} \approx 1{,}672$, denn die einzelnen 5-Ecke werden im nächsten Schritt durch fünf 5-Ecke ersetzt, deren Grundseite 1/(1+Φ)-mal so lang ist wie die vorangehende.

Ein regelmäßiges 6-Eck mit Seitenlänge s_0 = 1 LE (nicht abgebildet) wird ersetzt durch 6 regelmäßige 6-Ecke, für deren Seitenlänge s_1 gilt:

$3 \cdot s_1 = s_0 \Leftrightarrow s_1 = \frac{s_0}{3}$ usw.

Für die Hausdorff-Dimension gilt $\frac{\log(6)}{\log(3)} \approx 1{,}631$, denn die einzelnen 6-Ecke werden im nächsten Schritt durch sechs 6-Ecke ersetzt, deren Grundseite 1/3-mal so lang ist wie die vorangehende.

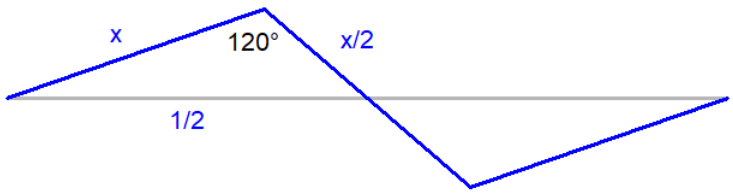
zu A 11.9:

In einem Quadrat wird in der Mitte ein Quadrat ausgeschnitten, dessen Seitenlänge ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangsquadrats ist. Im nächsten Schritt liegen also 8 Quadrate vor, deren Seitenlänge ein Drittel der Ausgangslänge ist, usw.

Für die Hausdorff-Dimension gilt $\frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1{,}893$, denn die einzelnen Quadrate werden im nächsten Schritt durch acht Quadarte ersetzt, deren Grundseite 1/3-mal so lang ist wie die vorangehende.

zu A 11.10:

Gesucht ist ein Dreieck mit den folgenden Eigenschaften:



Nach dem Kosinussatz ergibt sich bzgl. des 120°-Winkels:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}x \cdot \cos(120°)$ und wegen $\cos(120°) = -\frac{1}{2}$ folgt

$\frac{1}{4} = \frac{7}{4}x^2 \Leftrightarrow 7x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{7}}$

Für den gesuchten Winkel α ergibt sich mithilfe des Sinus-Satzes:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(120°)} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{7}}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = 19{,}106605\ldots° \approx 19{,}1°$$