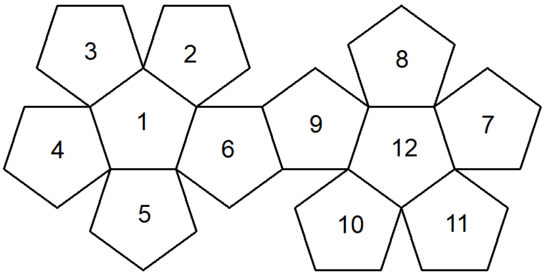
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 10.1:



Bezeichnet man die 12 Flächen des Dodekaeders wie in der Abbildung, dann sind zu jeder der Flächen jeweils fünf Flächen benachbart, dürfen also nicht gleich gefärbt werden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		x	x	x	x	x						
2	x		x			x		x	x			
3	x	x		x			x	x				
4	x		x		x		x				x	
5	x			x		x				x	x	
6	x	x			x				x	x		
7			x	x				x			x	x
8		x	x				x		x			x
9		x				x		x		x		x
10					x	x			x		x	x
11				x	x		x			x		x
12							x	x	x	x	x	

Wählt man beispielsweise für Feld 1 die Farbe *grün*, dann wäre es auch zulässig, das Feld 7 *grün* zu färben; infolge dessen wären aber auch die Felder 8, 11 und 12 gesperrt (in der Tabelle durch „o“ markiert). Außerdem könnte auch noch beispielsweise das Feld 9 *grün* gefärbt werden. Wenn 9 *grün* gefärbt wird, ist aber zusätzlich Feld 10 gesperrt.

Wählt man für Feld 2 die Farbe *gelb*, dann wäre es zulässig, Feld 4 *gelb* zu färben; infolge dessen wären aber auch die Felder 5, 7 und 11 gesperrt (7 ist schon *grün* gefärbt). Außerdem könnte auch noch beispielsweise das Feld 10 *gelb* gefärbt werden. Wenn 10 *gelb* gefärbt wird, ist aber zusätzlich Feld 12 gesperrt.

Wählt man für das Feld 3 die Farbe *hellblau*, dann wäre es zulässig, auch Feld 5 *hellblau* zu färben; infolge dessen wären aber auch die Felder 6, 10 und 11 gesperrt (10 ist schon *gelb* gefärbt). Es bleibt noch das Feld 12, das für die Färbung mit *hellblau* infrage kommt.

Schließlich sind noch die Felder 6, 8 und 11 nicht gefärbt. Eine Kontrolle zeigt, dass deren gemeinsame Färbung mit *orange* zulässig ist.

Durch den beschriebenen Algorithmus wurde dargestellt, wie eine Färbung erfolgen kann. Dabei wurde deutlich, dass bei den ersten Schritten auch alternative Entscheidungen möglich gewesen wären.

Nach der Entscheidung, Feld 1 *grün* zu färben, gab es 6 Auswahlmöglichkeiten für ein nicht-benachbartes Feld, das ebenfalls *grün* gefärbt werden soll. Hierdurch gab es Einschränkungen, die dazu führten, dass als drittes Feld für *grün* nur noch zwei Möglichkeiten bestanden. Im ersten Schritt gab es also $6 \cdot 2 = 12$ Auswahlmöglichkeiten (nach der Entscheidung für Feld 1).

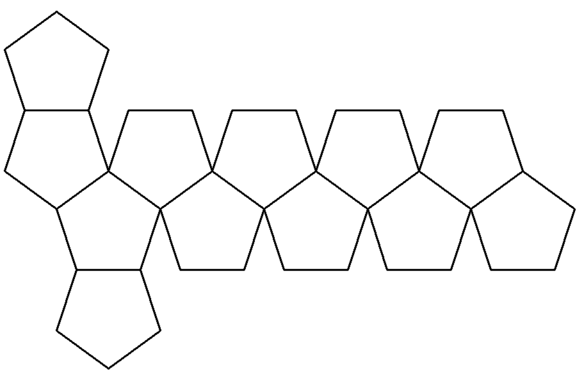
Nach der Entscheidung, Feld 2 *gelb* zu färben, gab es es 5 Auswahlmöglichkeiten für ein nicht-benachbartes Feld, das ebenfalls *gelb* gefärbt werden soll. Hierdurch gab es Einschränkungen, die dazu führten, dass als drittes Feld für *gelb* nur noch zwei Möglichkeiten bestanden. Im zweiten Schritt gab es also 5 · 2 = 10 Auswahlmöglichkeiten (nach der Entscheidung für Feld 2).

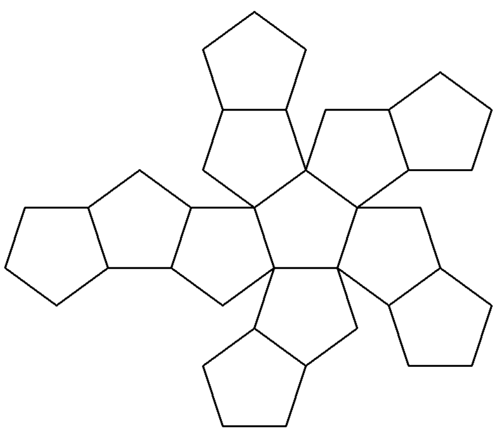
Nach der Entscheidung, Feld 3 *hellblau* zu färben, gab es es 4 Auswahlmöglichkeiten für ein nicht-benachbartes Feld, das ebenfalls *hellblau* gefärbt werden soll. Hierdurch gab es Einschränkungen, die dazu führten, dass als drittes Feld für *hellblau* nur eine Möglichkeit bestand. Im dritten Schritt gab es also nur 4 Auswahlmöglichkeiten (nach der Entscheidung für Feld 3).

Insgesamt gab es also für die Färbung 12 · 10 · 4 = 480 Alternativen. (Eigentlich natürlich mehr, denn für die erste Farbe gab es 12 Vorentscheidungsmöglichkeiten, mit welchem Feld man beginnt, für die zweite blieben noch 9, für die dritte dann nach 6 Möglichkeiten, welche Felder man als nächstes färben möchte).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		x	x	x	x	x		o		o	o	o
2	x		x		o	x	o	x	x		o	o
3	x	x		x		o	x	x	o	o	o	
4	x		x		x	o	x	o	o		x	o
5	x	o		x		x	o	o	o	x	x	
6	x	x	o	o	x		o		x	x		o
7		o	x	x	o	o		x		o	x	x
8	o	x	x	o	o		x		x	o		x
9		x	o	o	o	x		x		x	o	x
10	o		o		x	x	o	o	x		x	x
11	o	o	o	x	x		x		o	x		x
12	o	o		o		o	x	x	x	x	x	

(2) Einfache Alternativen erhält man, wenn man ein liegendes Dodekaeder längs des mittleren Streifens aus 10 regelmäßigen 5-Ecken aufschneidet oder wenn man von der oben liegenden Fläche fünf Streifen nach unten aufschneidet. Bzgl der Färbung kann man so vorgehen wie in (1) beschrieben.

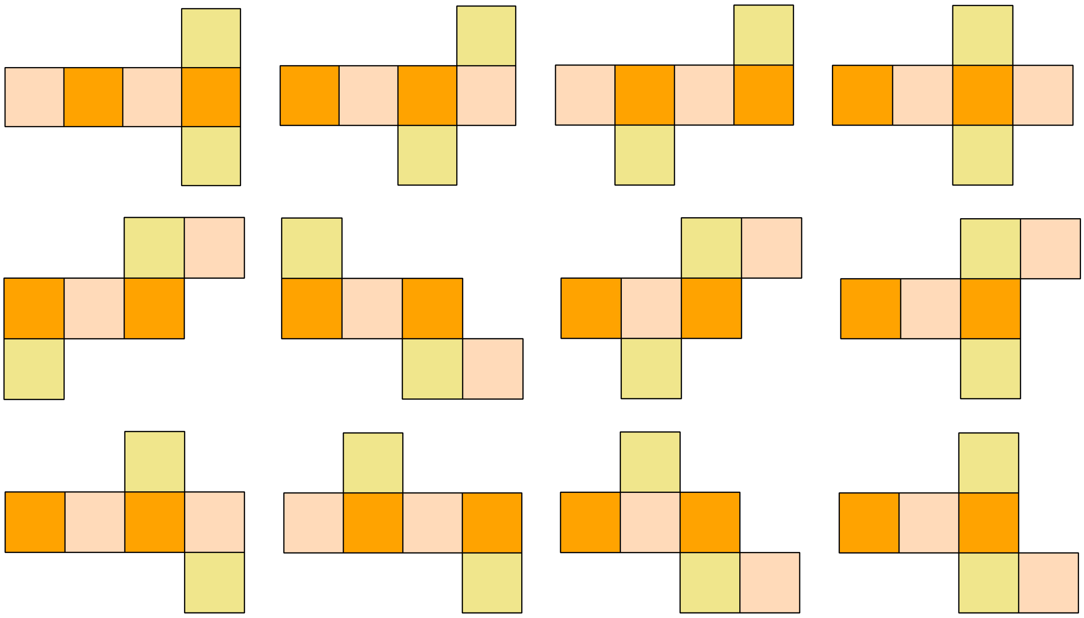




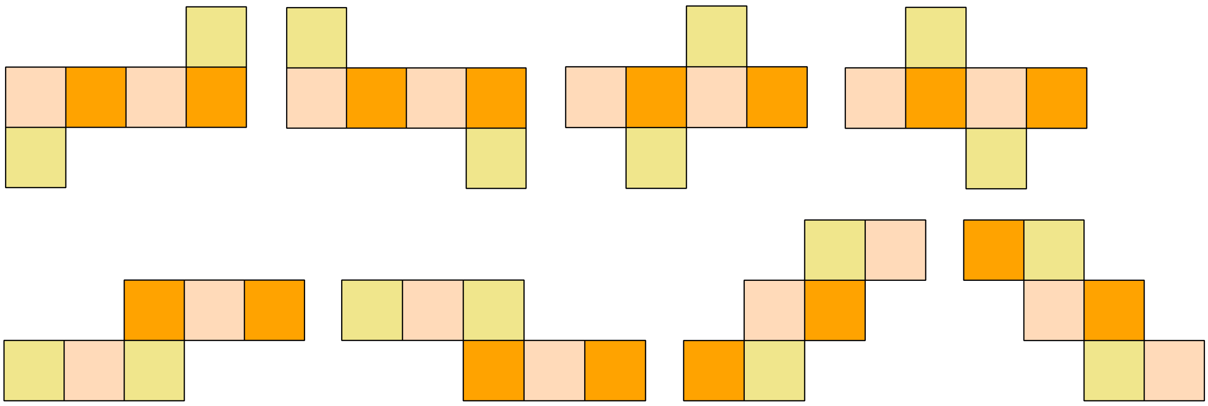
zu A 10.2:

Bezeichnet man die Eckpunkte der Grundfläche eines Hexaeders mit *A*, *B*, *C*, *D* (wie üblich im Gegenuhrzeigersinn), dann kann jede der sechs Flächen eines Netzes auf vier Arten als Grundfläche ausgewählt werden, d. h., für die sechs Flächen *eines* Typs gibt es 4 · 6 = 24 Möglichkeiten.

Dies gilt allerdings nur für die Netze, die *nicht* punktsymmetrisch sind, d. h., für die folgenden 12 von den insgesamt 20 Netzen, die durch eine 180°-Drehung *nicht* in sich selbst überführt werden.

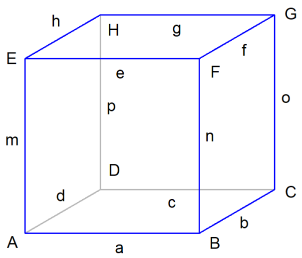


Bei den folgenden 8 punktsymmetrischen Netzen kann jede der sechs Flächen nur auf zwei Arten als Grundfläche ausgewählt werden, d. h., für die sechs Flächen eines Typs gibt es 2 · 6 = 12 Möglichkeiten.



Insgesamt gibt es also 12 · 6 · 4 + 8 · 6 · 2 = 384 verschiedene „Aufgaben“, die Hexaedernetze zu beschriften.

zu A 10.3:



Um die Wege besser beschreiben zu können, sind in der Abbildung die 8 Eckpunkte und 12 Kanten beschriftet. Die möglichen kürzesten Wege von A nach G verlaufen jeweils über den Mittelpunkt einer nicht benachbarten Kante. Im Buch sind die sechs Wege wie folgt nummeriert:

(1) $A - M_n - G$; (2) $A - M_e - G$; (3) $A - M_b - G$; (4) $A - M_c - G$; (5) $A - M_p - G$; (6) $A - M_h - G$

Die 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 möglichen Kombinationen für den Rundweg sind

(1) + (2)’, (1) + (3)’, (1) + (4)’, (1) + (5)’, (1) + (6)’,

(2) + (3)’, (2) + (4)’, (2) + (5)’, (2) + (6)’,

(3) + (4)’, (3) + (5)’, (3) + (6)’,

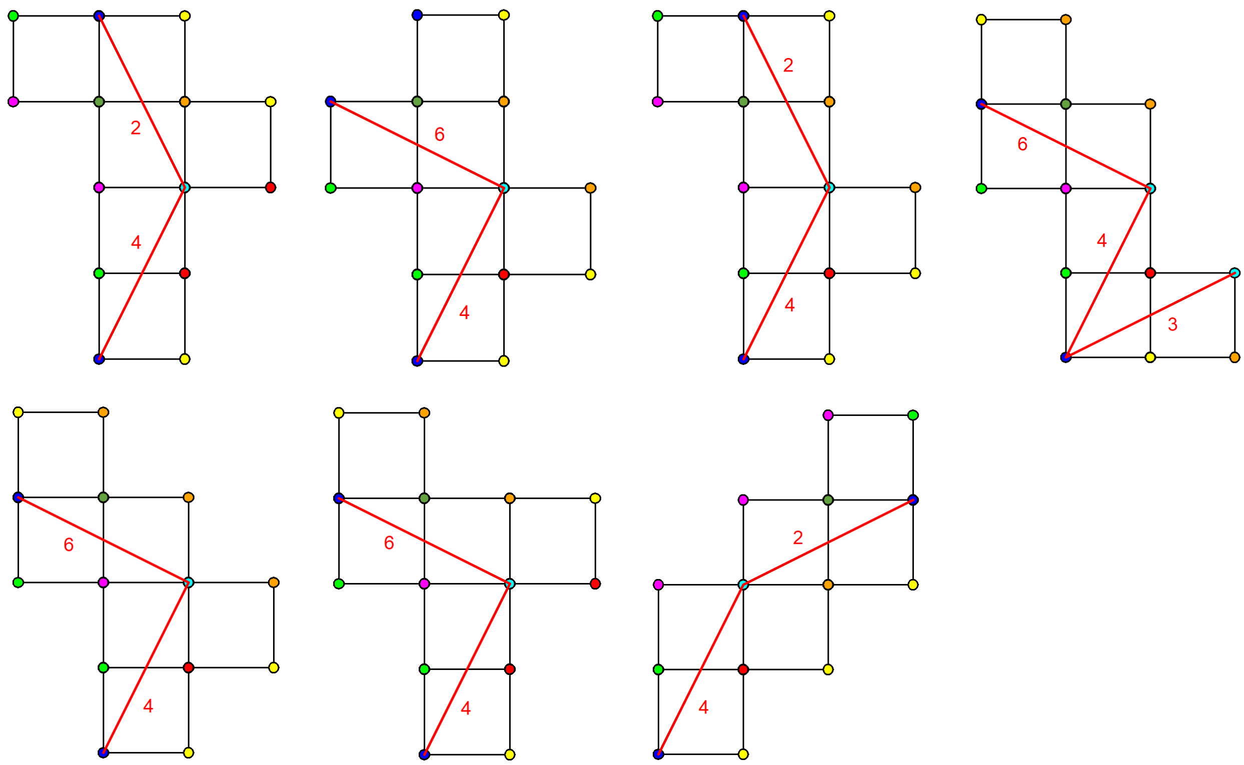
(4) + (5)’, (4) + (6)’,

(5) + (6)’.

wobei die umgekehrten Wege von G nach A mit einem Strich versehen sind.

Hinweis: Wenn man die umgekehrte Reihenfolge, also beispielsweise (2) + (1)’, als eigenen Rundweg ansieht, handelt es sich um insgesamt 30 Rundwege.

(2)



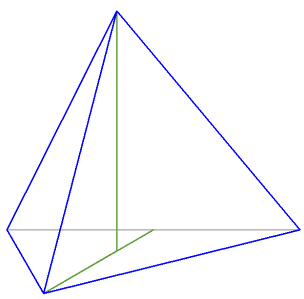
zu A 10.4:

Bei der ersten Sequenz sieht man die drei möglichen Ansichten der Ecke, an der die drei Flächen mit roter, pinker und blauer Färbung aneinander stoßen.

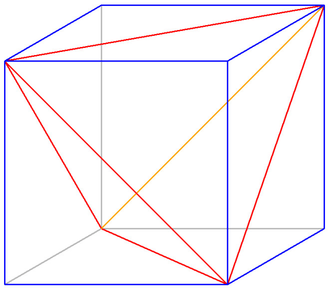
Da der Würfel 8 Ecken hat, gibt es 8 · 3 = 24 mögliche Schrägbilder.

Bei der beiden folgenden Sequenzen sieht man die 8 Ecken des Würfels mit den jeweils drei zusammentreffenden Flächen.

zu A 10.5:

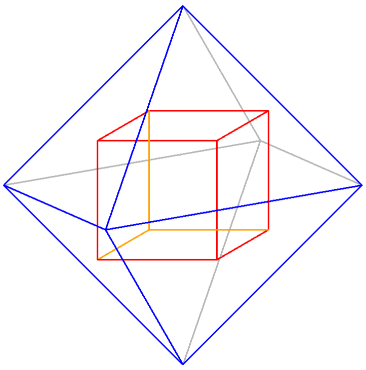


zu A 10.6:

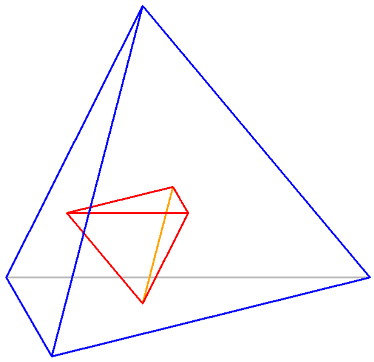


zu A 10.7:

(1)

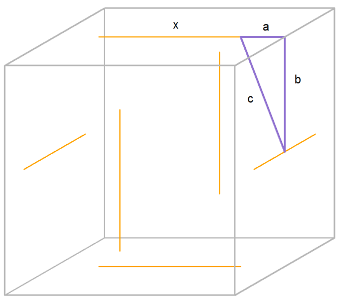


(2)



zu A 10.8:

Dass die Strecken die Seitenlänge *x* haben müssen, ergibt sich durch eine einfache Überlegung mithilfe des Satzes von Pythagoras. Dazu betrachte man z. B. das rechtwinklige Dreieck, das entsteht, wenn man die Strecke oben bis zur Kante oben rechts verlängert (Kathete *a*), und den Schnittpunkt dieser Verlängerung mit der Kante dann mit dem Mittelpunkt der Strecke der rechten Seitenfläche verbindet (Kathete *b*). Die Hypotenuse *c* dieses rechtwinkligen Dreiecks ist die Höhe des dort entstehenden gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge *x*.



Die Verlängerung der Strecke mit Seitenlänge *x* hat die Länge $a = \frac{1}{2} \cdot (1 - x)$, für die Verbindung zur Seitenmitte der Strecke in der rechten Seitenfläche gilt $b = \frac{1}{2}$, und die Hypotenuse die Seitenlänge: $c = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3}$. Aus $a^2 + b^2 = c^2$, ergibt sich $\frac{1}{4} \cdot (1 - x)^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot x^2$, d. h.,

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x = 1 \Leftrightarrow (x + \tfrac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$$

also $x = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$.

zu A 10.9:

Zeichnet man analog zu **A 10.7** in der Verlängerung der oben liegenden Kante (Bezeichnung: *s*) ein rechtwinkliges Dreieck ein, dann gilt:

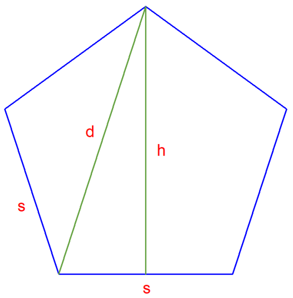
Kathete (oben): $a = \frac{1}{2} \cdot (1 - s)$, Kathete (rechts): $b = \frac{1}{2}$

Für die Hypotenuse *c* gilt nach dem Satz von Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \cdot (1-s)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot (2 - 2s + s^2)$

Andererseits gilt für eine Höhe *h* im regelmäßigen 5-Eck:

$h^2 = (\Phi \cdot s)^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 = ((\Phi + 1) - \frac{1}{4}) \cdot s^2 = (\frac{\sqrt{5}+3}{2} - \frac{1}{4}) \cdot s^2 = \frac{2\sqrt{5}+5}{4} \cdot s^2$

Aus $h^2 = c^2$ folgt dann weiter

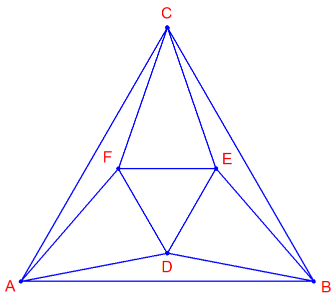


$(2\sqrt{5} + 5) \cdot s^2 = 2 - 2s + s^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{5} + 4) \cdot s^2 = 2 - 2s \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 2) \cdot s^2 = 1 - s \Leftrightarrow$

$(\sqrt{5} - 2) \cdot (\sqrt{5} + 2) \cdot s^2 = (\sqrt{5} - 2) - (\sqrt{5} - 2) \cdot s \Leftrightarrow s^2 + (\sqrt{5} - 2) \cdot s = \sqrt{5} - 2 \Leftrightarrow \left(s + \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, also

$s = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-2}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$

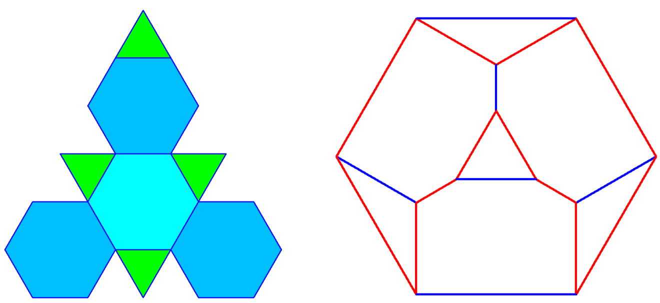
zu A 10.10:



Beispielsweise verläuft der folgende Weg über alle Kanten:

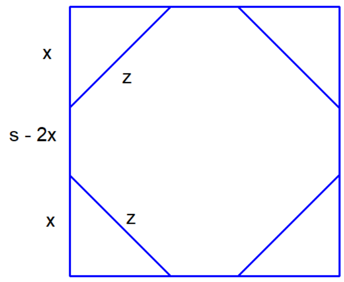
A – C – F – A – D – B – E – D – F – E – C – B – A

zu A 10.11:



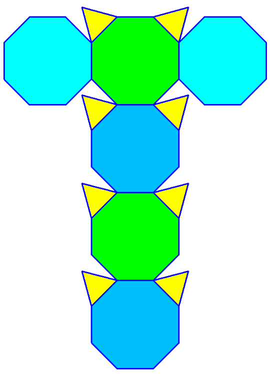
Im rechts abgebildeten Schlegel-Diagramm ist ein möglicher Hamilton-Weg rot eingetragen.

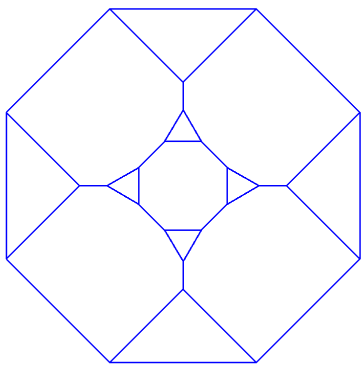
zu A 10.12:

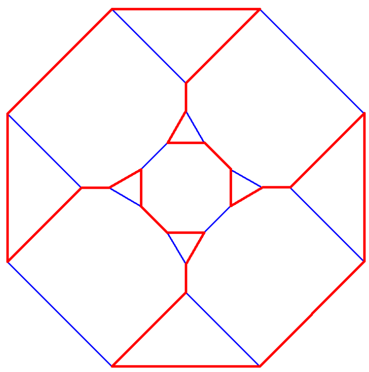


Schneidet man bei einem Quadrat der Seitenlänge s an den vier Ecken jeweils ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit Kathete x und Hypotenuse z ab, dann sind die Seiten der Länge $s - 2x$ und z gleich lang, wenn gilt: $s - 2x = x \cdot \sqrt{2}$. Die Abschnitte von s stehen dann also im Verhältnis $x : x \cdot \sqrt{2} : x$, also wie $1 : \sqrt{2} : 1$.

zu A 10.13:

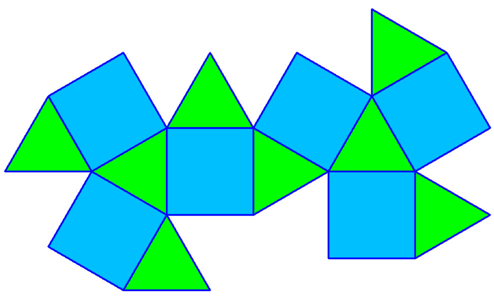


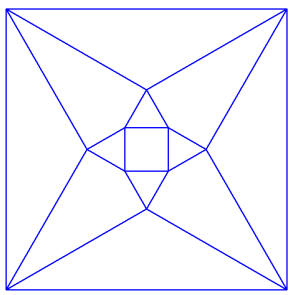


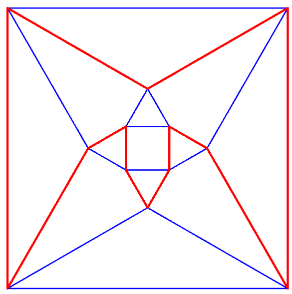


Im rechts abgebildeten Schlegel-Diagramm ist ein möglicher Hamilton-Weg rot eingetragen.

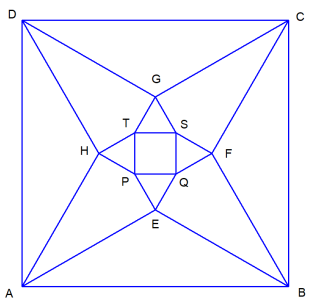
zu A 10.14:







Im rechts abgebildeten Schlegel-Diagramm ist ein möglicher Hamilton-Weg rot eingetragen.



Ein möglicher Euler-Graph könnte wie folgt aussehen:

A – D – H – A – B – F – C – B – E – Q – F – S – Q – P – T – S – G – C – D – G – T – H – P – E – A

zu A 10.15:

(1) Ein Oktaeder hat *e* = 6 Ecken, *k* = 12 Kanten, *f* = 8 Flächen.

Durch die Schnitte vervierfacht sich die Anzahl *e* der Ecken $(e = 6 \to e = 24)$. Die Anzahl *k* der Kanten vermehrt sich um das Vierfache der bisherigen Anzahl *e* der Ecken, also um $6 \cdot 4 = 24$ $(k = 12 \to k = 36)$. Die Anzahl *f* der Flächen wird um die bisherige Anzahl *e* der Ecken größer, also um 6 $(f = 8 \to f = 14)$.

Die Euler'sche Polyederformel bleibt erfüllt: $e - k + f = 24 - 36 + 14 = 2$.

(2) Ein Dodekaeder hat *e* = 20 Ecken, *k* = 30 Kanten, *f* = 12 Flächen.

Durch die Schnitte verdreifacht sich die Anzahl *e* der Ecken $(e = 20 \to e = 60)$. Die Anzahl *k* der Kanten vermehrt sich um das Dreifache der bisherigen Anzahl *e* der Ecken, also um $20 \cdot 3 = 60$ $(k = 30 \to k = 90)$. Die Anzahl *f* der Flächen wird um die bisherige Anzahl *e* der Ecken größer, also um 20 $(f = 12 \to f = 32)$.

Die Euler'sche Polyederformel bleibt erfüllt: $e - k + f = 60 - 90 + 32 = 2$.

(3) Ein Dodekaeder hat *e* = 20 Ecken, *k* = 30 Kanten, *f* = 12 Flächen.

Durch die Schnitte verdreifacht sich beim Dodekaederstumpf die Anzahl *e* der Ecken, aber je zwei Ecken fallen dabei zusammen $(e = 20 \to e = 30)$. Die Anzahl *k* der Kanten vermehrt sich beim Dodekaederstumpf um das Dreifache der bisherigen Anzahl *e* der Ecken, also um $20 \cdot 3 = 60$, aber die bisherigen Kanten entfallen $(k = 30 \to k = 60)$. Die Anzahl *f* der Flächen wird um die bisherige Anzahl *e* der Ecken größer, also um 20 $(f = 12 \to f = 32)$.

Die Euler'sche Polyederformel bleibt erfüllt: $e - k + f = 30 - 60 + 32 = 2$.

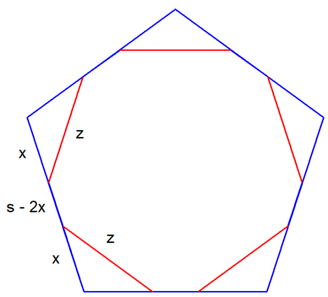
(4) Ein Ikosaeder hat *e* = 12 Ecken, *k* = 30 Kanten, *f* = 20 Flächen.

Durch die Schnitte verfünffacht sich die Anzahl *e* der Ecken $(e = 12 \to e = 60)$. Die Anzahl *k* der Kanten vermehrt sich um das Fünffache der bisherigen Anzahl *e* der Ecken, also um $12 \cdot 5 = 60$ $(k = 30 \to k = 90)$. Die Anzahl *f* der Flächen wird um die bisherige Anzahl *e* der Ecken größer, also um 12 $(f = 20 \to f = 32)$.

Die Euler'sche Polyederformel bleibt erfüllt: $e - k + f = 60 - 90 + 32 = 2$.

zu A 10.16:

Durch das Abschneiden der Ecken des Dodekaeders entsteht aus dem regelmäßigen 5-Eck mit Seitenlänge *s* ein Zehneck mit den Seiten *z* und *s* – 2*x*



Die Seiten des 10-Ecks sind gleich lang, wenn die Bedingung *z* = *s* – 2*x* erfüllt ist.

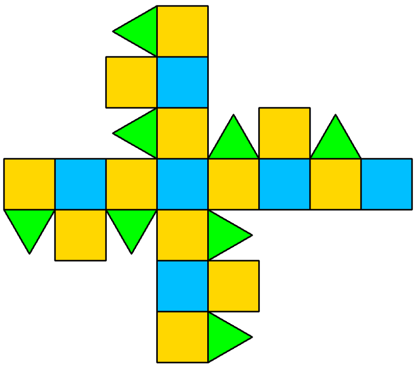
Aus $\cos(36°) = \frac{\frac{z}{2}}{x} = \frac{z}{2x} = \frac{1}{2}\Phi \iff z = x \cdot \Phi$ folgt: $s - 2x = x \cdot \Phi$. Die Seite des regelmäßigen 5-Ecks muss also im Verhältnis x : x · Φ : x, also im Verhältnis 1 : Φ : 1 geteilt werden.

zu A 10.17:

(1) Schneidet man die Ecken eines Oktaeders jeweils bis zu den Kantenmitten ab, dann entstehen dort jeweils quadratische Schnittflächen und von den vorherigen Dreiecksflächen bleibt jeweils nur das Mittendreieck bestehen.

(2) Schneidet man die Ecken eines Ikosaeders jeweils bis zu den Kantenmitten ab, dann entstehen dort jeweils 5-eckige Schnittflächen und von den vorherigen Dreicksflächen bleibt jeweils nur das Mittendreieck bestehen.

zu A 10.18:



Das Rhombenkuboktaeder hat die Eigenschaft, dass sich die Oberfläche aus drei zueinander orthogonalen Bändern von Quadraten zusammensetzt, die jeweils die Form eines regelmäßigen 8-Ecks haben. Daher ist es am einfachsten, diesen Körper aus einem regelmäßigen Hexaeder herzustellen: Zunächst führt man vier senkrechte Schnitte parallel zu den senkrechten Kanten durch, sodass ein Prisma mit 8-eckiger Grundfläche entsteht. Dann erzeugt man durch Schnitte ein zweites Band von acht Quadraten und schließlich – dazu senkrecht – ein drittes Band.

zu A 10.19:

Laut Wikipedia versteht man unter den Herrnhuter Sternen mathematische Sternkörper, die aus einem Rhombenkuboktaeder als Grundkörper mit aufgesetzten Pyramiden bestehen; hinsichtlich des Grundkörpers gibt es auch noch andere Varianten. Da der Grundkörper aus 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreicken besteht (vgl. **A 10.18**), mit insgesamt 24 Ecken und 48 Kanten, ergibt sich durch die aufgesetzten Pyramiden die folgende Bilanz:

Durch die Pyramiden erhöht sich die Anzahl *e* der Ecken um die Anzahl der Flächen des Rhombenkuboktaeders $(e = 24 \to e = 24 + 26 = 50)$. Die Anzahl *k* der Kanten verdoppelt sich $(k = 48 \to k = 96)$. Die dreieckigen Grundflächen werden jeweils durch drei Pyramiden-Seitenflächen ersetzt, die quadratischen Grundflächen jeweils durch vier Pyramiden-Seitenflächen $(f = 8 + 18 = 24 \to f = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 18 = 96)$.

Die Euler'sche Polyederformel wird bei diesem nicht-konvexen Körper nicht erfüllt: $e - k + f = 50 - 96 + 96 \neq 2$.

zu A 10.20:

- Tetraeder (n = 3):

Ordnet man 1 + 2 + 3 = 6 Tetraeder in Dreiecksform an, dann passen in die Lücken 1 + 2 = 3 Oktaeder. Es bleibt aber dann noch eine Lücke, in die genau ein Tetraeder passt. Dann liegt eine „zweite Ebene“ in Dreiecksform vor, auf der man 1 + 2 = 3 Tetraeder und 1 Oktaeder und schließlich noch 1 Tetraeder stellen bzw. einfügen kann, sodass insgesamt ein Tetraeder mit 27-fachem Volumen des Ausgangs-Tetraeders entsteht.

Bilanz: $27 \cdot T = [(1+2+3)+1+(1+2)+1] \cdot T + [(1+2)+1] \cdot O \Leftrightarrow 16 \cdot T = 4 \cdot O \Leftrightarrow 4 \cdot T = 1 \cdot O$

- Tetraeder (n = 4):

$64 \cdot T = [(1+2+3+4)+(1+2)+(1+2+3)+1+(1+2)+1] \cdot T + [(1+2+3)+(1+2)+1] \cdot O$

$\Leftrightarrow 64 \cdot T = 24 \cdot T + 8 \cdot O \Leftrightarrow 40 \cdot T = 10 \cdot O \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4 \cdot T = 1 \cdot O$

- Tetraeder (allgemein):

Ordnet man $1+2+3+...+n$ Tetraeder in Dreiecksform an, dann passen in die Lücken $1+2+3+...+(n-1)$ Oktaeder. Es bleiben noch $1+2+3+...+(n-2)$ Lücken, in die ein Tetraeder eingefügt werden muss.

Dann liegt eine „zweite Ebene“ in Dreiecksform vor, auf der man $[1+2+3+...+(n-1)]+[1+2+3+..+(n-3)]$ Tetraeder und $1+2+3+...+(n-2)$ Oktaeder stellen bzw. einfügen muss usw.

Insgesamt entsteht ein Tetraeder mit n^3-fachem Volumen des Ausgangs-Tetraeders.

Gesamtzahl der benötigten kleinen Tetraeder:

$[1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n)] \cdot T + [1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+(n-2))] \cdot T$

In der ersten eckigen Klammer steht die Summe der ersten n Dreieckszahlen, in der zweiten die Summe der ersten n – 2 Dreieckszahlen . Dies kann man mithilfe der Tetraederzahlen ausdrücken (vgl. *Mathematik ist schön*, Kap. 16):

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n) = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{1}{6} \cdot (n^3+3n^2+2n)$ und

$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+(n-2)) = \frac{1}{6} \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \frac{1}{6} \cdot (n^3-3n^2+2n)$

Gesamtzahl der benötigten kleinen Oktaeder

$[1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+(n-1))] \cdot O = \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot O = \frac{1}{6} \cdot (n^3-n) \cdot O$

Bilanz: $n^3 \cdot T = \frac{1}{6} \cdot (2n^3+4n) \cdot T + \frac{1}{6} \cdot (n^3-n) \cdot O \Leftrightarrow n^3 \cdot T - \frac{1}{3} \cdot (n^3+2n) \cdot T = \frac{1}{6} \cdot (n^3-n) \cdot O \Leftrightarrow$

$\frac{2}{3} \cdot (n^3-n) \cdot T = \frac{1}{6} \cdot (n^3-n) \cdot O \Leftrightarrow 4 \cdot T = 1 \cdot O$

- Oktaeder (n = 3):

Ordnet man 9 halbe Oktaeder in Quadratform an, dann passen in die Lücken 12 Tetraeder. In die Lücken zwischen den Tetraedern kann man 4 Oktaeder einfügen. Es liegt dann eine „zweite Ebene“ vor, aus der 4 halbe Oktaeder herausschauen. Zwischen diese passen 4 Tetraeder und in die Lücken zwischen die Tetraeder kann 1 Oktaeder eingefügt werden, sodass ein halbes Oktaeder mit 27-fachem Volumen eines halben Oktaeders entsteht.

Bilanz: $27 \cdot \frac{1}{2} \cdot O = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot O + 12 \cdot T + 4 \cdot O + 4 \cdot T + 1 \cdot O$, also $4 \cdot O = 16 \cdot T$, d. h. $O = 4 \cdot T$.

- Oktaeder (allgemein):

Ordnet man n^2 halbe Oktaeder in Quadratform an, dann passen in die Lücken $2 \cdot n \cdot (n-1)$ Tetraeder. In die Lücken zwischen den Tetraedern kann man $(n-1)^2$ Oktaeder einfügen. Es liegt dann eine „zweite Ebene“ vor, aus der $(n-1)^2$ halbe Oktaeder herausschauen. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis zuletzt 1 Oktaeder eingefügt werden kann. Insgesamt entsteht ein halbes Oktaeder, dessen Volumen dem n^3-fachen Volumen eines halben Oktaeders entspricht.

Bilanz: $n^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot O = n^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O + 2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot T + (n-1)^2 \cdot O + 2 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot T + (n-2)^2 \cdot O + ... + 4 \cdot T + 1 \cdot O$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen so viele ganze Oktaeder:
$1 + 4 + ... + (n-1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n-1) \cdot n \cdot (2n-1) = \frac{1}{6} \cdot (2n^3 - 3n^2 + n) = \frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$, zusammen mit dem ersten Summanden sind dies $\frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{6} \cdot n$ ganze Oktaeder.

Außerdem stehen rechts so viele Tetraeder:

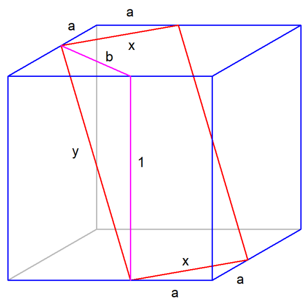
$$2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + ... + 2 \cdot n \cdot (n-1) = 2 \cdot \left[(2^2 - 2) + (3^2 - 3) + (4^2 - 4) + ... + (n^2 - n)\right]$$
$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n - 6) - \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n - 2)\right] = 2 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{3} \cdot n\right] = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n^2 - 1)$$

Hieraus ergibt sich für die Bilanz:

$\left(\frac{1}{2} \cdot n^3 - \frac{1}{3} \cdot n^3 - \frac{1}{6} \cdot n\right) \cdot O = \left(\frac{1}{6} \cdot n^3 - \frac{1}{6} \cdot n\right) \cdot O = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot O = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n^2 - 1) \cdot T$, also $\frac{1}{6} \cdot O = \frac{2}{3} \cdot T$,

d. h. $O = 4 \cdot T$

zu A 10.21:



Die Seitenlänge des Hexaeders wird als 1 angenommen; für die Rechteckseite x, die in der Boden- bzw. Deckfläche des Würfels liegt, gilt $x^2 = 2a^2$

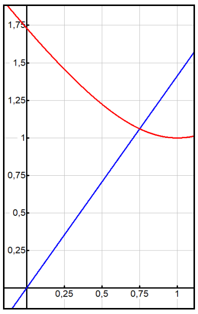
Die Länge y der anderen Rechteckseite kann wie folgt bestimmt werden: Diese Seite y ist Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten die Länge 1 und b haben, wobei $b^2 = 2 \cdot (1 - a)^2$, also

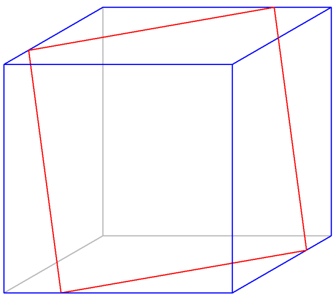
$y^2 = 2 - 4a + 2a^2 + 1^2 = 3 - 4a + 2a^2$

Es gilt: $x^2 = y^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3 - 4a + 2a^2 \Leftrightarrow 4a = 3 \Leftrightarrow a = 0{,}75$

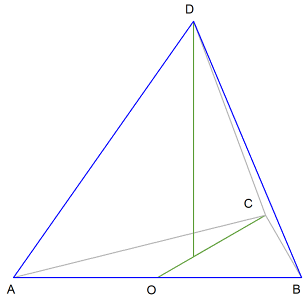
d. h., stellt man die beiden Seitenlängen des Rechtecks als Funktionsgraphen dar, dann schneiden sich die beiden Graphen bei $a = 0{,}75$.

Die beiden Seiten des Rechtecks haben dann die Seitenlänge $x = y = 0{,}75 \cdot \sqrt{2} \approx 1{,}060$. Dies ist das größtmögliche Quadrat, das man in einem Würfel finden kann.





zu A 10.22:



Es ist sinnvoll, ein Koordinatensystem so zu legen, dass der Ursprung *O* im Mittelpunkt der vorne liegenden Kante liegt. Ein Schnitt senkrecht zur Tischplatte und parallel zur vorne liegenden Kante schneidet das Tetraeder im vorderen Teil in vier Punkten, im hinteren Teil in drei Punkten. Diese Eckpunkte erhält man, indem man mit einem beweglichen Punkt *P* vom Punkt *O* aus in Richtung auf Punkt *C* wandert (also in Richtung der *y*-Achse) und dabei jeweils die Koordinaten der Punkte mit gleicher *y*-Koordinate auf den Strecken *AC*, *BC*, *AD* und *BD bzw. DC* bestimmt.

Für die Punkte *A* und *B* werden ganzzahlige Koordinaten gewählt: *A* (-1 | 0 | 0), *B* (1 | 0 | 0); dann ergibt sich *C* (0 | $\sqrt{3}$ | 0) und *D* (0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\frac{2}{3}\sqrt{6}$).

Die „Wanderung" von O nach C kann mithilfe der vektoriellen Darstellung $OC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

beschrieben werden, mit $0 \le k \le 1$; bei $k = \frac{1}{3}$ erreicht man den Fußpunkt der Körperhöhe des Tetraeders.

$AC: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$; entsprechend ist dann $BC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Bei $AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ muss der Richtungsvektor so angepasst werden, dass man beim

Parameterwert $k = \frac{1}{3}$ im Punkt D ankommt, also $AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$; entsprechend angepasst werden

muss die Darstellung von *BD*: $BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Bei der Parameterdarstellung von *DC* muss beachtet werden, dass man sich bei $k = \frac{1}{3}$ in *D* befindet und bei

k = 1 in C: Die Darstellung $DC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$ muss daher verändert werden, indem man der

„Aufhängepunkt" der Geraden durch *D* und *C* nach links verlegt, sodass die *y*-Koordinate null wird:

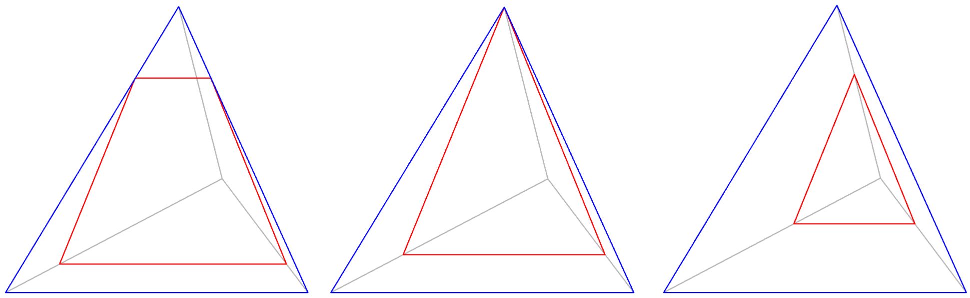
$EC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Kontrollrechnung für $k = \frac{1}{3}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix}$, für $k = 1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

- Für $0 \le k < \frac{1}{3}$ erhält man ein gleichschenkliges Trapez mit den Eckpunkten $P_1(-1+k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid 0)$ auf AC, $P_2\ (1-k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid 0)$ auf BC, $P_3\ (1-3k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid k \cdot 2\sqrt{6})$ auf BD und $P_4\ (-1+3k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid k \cdot 2\sqrt{6})$ auf AD.

- Für $\frac{1}{3} \le k \le 1$ erhält man ein gleichschenkliges Dreieck mit den Eckpunkten $Q_1(-1+k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid 0)$ auf AC, $Q_2\ (1-k \mid k \cdot \sqrt{3} \mid 0)$ auf BC und $Q_3(0 \mid k \cdot \sqrt{3} \mid \sqrt{6} - k \cdot \sqrt{6})$ auf DC.

Schrägbilder für $k = 0{,}25$; $k = \frac{1}{3}$ und $k = 0{,}6$ (dabei wurden Strecken, die orthogonal zur Gesichtsfeldebene verlaufen, unter einem Winkel von 60° gegenüber Strecken abgetragen, die parallel zur Gesichtsfeldebene liegen; die Länge wurde auf die Hälfte verkürzt):



Der Flächeninhalt der Schnittfiguren ergibt sich wie folgt:

- Trapez

Länge m der Mittellinie = Mittelwert der Differenz der x-Koordinaten der Punkte P_2 und P_1 bzw. P_3 und P_4

$= \frac{1}{2} \cdot [(2-2k) + (2-6k)] = 2 - 4k$

Länge der Höhe h des Trapezes = z-Koordinate der Punkte P_3 und P_4 = $k \cdot 2\sqrt{6}$

Flächeninhalt: $A_{Trapez} = (2-4k) \cdot k \cdot 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6} \cdot (1-2k) \cdot k$ für $0 \le k < \frac{1}{3}$

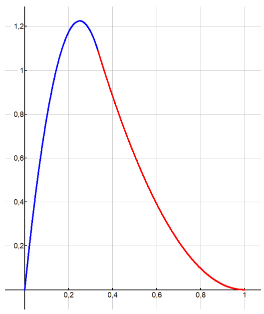
- Dreieck

Länge s der Grundseite = Differenz der x-Koordinaten der Punkte Q_2 und Q_1 = $2 - 2k$

Länge der Höhe h des Dreiecks = z-Koordinate des Punktes Q_3 = $\sqrt{6} - k \cdot \sqrt{6}$

Flächeninhalt: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot (2-2k) \cdot (1-k) = \sqrt{6} \cdot (1-k)^2$ für $\frac{1}{3} \le k \le 1$

Der Graph der abschnittsweise definierten Funktion $A(k)$ sieht wie folgt aus:

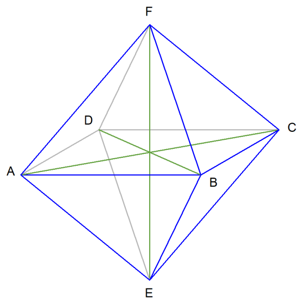


Man beweise selbst, dass der Übergang stetig und differenzierbar ist und dass das Maximum für $k = 0{,}25$ angenommen wird.

zu A 10.23:

Legt man das abgebildete regelmäßige Oktaeder mit Seitenlänge 2 so in ein Koordinatensystem, dass der Mittelpunkt des Oktaeders im Ursprung liegt, die *x*-Achse nach rechts, die *y*-Achse nach hinten und die *z*-Achse nach oben weist, dann haben die Eckpunkte die folgenden Koordinaten:

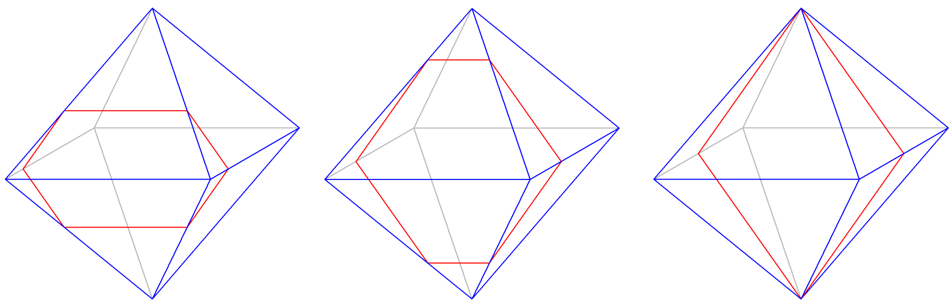
A (-1 | -1 | 0), *B* (1 | -1 | 0), *C* (1 | 1 | 0), *D* (-1 | 1 | 0), *E* (0 | 0 | $-\sqrt{2}$), *F* (0 | 0 | $\sqrt{2}$).



Beim Schnitt senkrecht zur Ebene durch *A*, *B*, *C*, *D* und parallel zu *AB* ergeben sich 6-Ecke als Schnittfiguren, beim Schnitt durch *E* und *F* entsteht ein Viereck (eine Raute!). Die Eckpunkte der 6-Ecke liegen auf den Kanten *AE*, *BE*, *BC*, *BF*, *AF* und *AD.*

Die Koordinaten der sechs Punkte erhält man durch entsprechende Parameterdarstellungen der Geraden. Im Folgenden wird nur der Schnitt im vorderen Teil des Oktaeders betrachtet ($0 \le k \le 1$)

Man erhält die folgenden Schrägbilder für k = 0,4; k = 0,7 und k = 1:



A (-1 | -1 | 0), *B* (1 | -1 | 0), *C* (1 | 1 | 0), *D* (-1 | 1 | 0), *E* (0 | 0 | $-\sqrt{2}$), *F* (0 | 0 | $\sqrt{2}$).

P_1 auf *AE*: (-1+k | -1+k | $-k \cdot \sqrt{2}$), P_2 auf *BE*: (1–k | -1+k | $-k \cdot \sqrt{2}$), P_3 auf *BC*: (1 | -1+2k | 0),
P_4 auf *BF*: (1–k | -1+k | $k \cdot \sqrt{2}$), P_5 auf *AF*: (-1+k | -1+k | $k \cdot \sqrt{2}$), P_6 auf *AD*: (-1 | -1+2k | 0).

Der Flächeninhalt der 6-Ecke ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt der Trapeze oberhalb oder unterhalb der Ebene durch *A*, *B*, *C*, *D*.

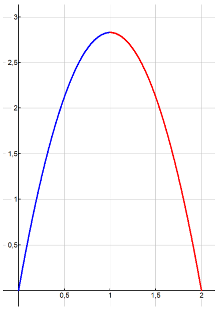
Länge *m* der Mittellinie = Mittelwert der Differenz der *x*-Koordinaten der Punkte P_3 und P_6 bzw. P_4 und P_5

$= \frac{1}{2} \cdot [2 + (2 - 2k)] = 2 - k$

Länge der Höhe *h* des Trapezes = *z*-Koordinate der Punkte P_4 und P_5 = $k \cdot \sqrt{2}$

Flächeninhalt: $2 \cdot A_{Trapez} = 2 \cdot (2 - k) \cdot k \cdot \sqrt{2}$ für $0 \le k \le 1$.

Der zugehörige Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel; der zweite Teil der Parabel wurde (aus o. a. Symmetriegründen) ergänzt.



Zusatz: Das Sechseck hat gleichlange Seiten, wenn die Längen der Strecken P_4P_5 und P_5P_6 übereinstimmen, also wenn gilt: $k = 0{,}5$; denn

$$\left|P_4P_5\right|^2 = (-1+k-1+k)^2 + 0^2 + 0^2 = (2k-2)^2 = 4\cdot(k-1)^2$$

$$\left|P_5P_6\right|^2 = (-1+1-k)^2 + (-1+2k+1-k)^2 + (-k\cdot\sqrt{2})^2 = k^2 + k^2 + 2k^2 = 4k^2$$