Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 9.1:

Aus $\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} = 1 \cdot \Phi - 1$ folgt:

$$\Phi^{-2} = \Phi^{-1} \cdot \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \cdot (\Phi - 1) = 1 - \Phi^{-1} = 1 - (\Phi - 1) = 2 - 1 \cdot \Phi$$

$$\Phi^{-3} = \Phi^{-1} \cdot \Phi^{-2} = \Phi^{-1} \cdot (2 - \Phi) = 2 \cdot \Phi^{-1} - 1 = 2 \cdot (\Phi - 1) - 1 = 2 \cdot \Phi - 3$$

$$\Phi^{-4} = \Phi^{-1} \cdot \Phi^{-3} = \Phi^{-1} \cdot (2 \cdot \Phi - 3) = 2 - 3 \cdot \Phi^{-1} = 2 - 3 \cdot (\Phi - 1) = 5 - 3 \cdot \Phi$$

allgemein gilt mit den Koeffizienten der Fibonacci-Folge ($f_0 = 0$), $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, ...

$$\Phi^{-1} = f_2 \cdot \Phi - f_1 ,\ \Phi^{-2} = f_3 - f_2 \cdot \Phi ,\ \Phi^{-3} = f_3 \cdot \Phi - f_4 ,\ \Phi^{-4} = f_5 - f_4 \cdot \Phi ,\ \ldots$$

allgemein: $\Phi^{-2n} = f_{2n+1} - f_{2n} \cdot \Phi$ und $\Phi^{-(2n-1)} = f_{2n-1} \cdot \Phi - f_{2n}$, also: $\Phi^{-k} = (-1)^k \cdot (f_{k+1} - f_k \cdot \Phi)$.

Hinweis: Man kann die Definition der Fibonacci-Zahlen auch auf negative Indizes erweitern; dann ergibt sich:

$f_{-1} = 1$, $f_{-2} = -1$, $f_{-3} = 2$, $f_{-4} = -3$, $f_{-5} = 5$, ... , also $f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n$.

Hiermit ergibt sich:

$$\Phi^{-1} = f_{-1} \cdot \Phi + f_{-2} ,\ \Phi^{-2} = f_{-2} \cdot \Phi + f_{-3} ,\ \Phi^{-3} = f_{-3} \cdot \Phi + f_{-4} ,\ \Phi^{-4} = f_{-4} \cdot \Phi + f_{-5} ,\ \ldots$$

also ebenfalls die Rekursionsvorschrift: $\Phi^n = f_n \cdot \Phi + f_{n-1}$.

zu A 9.2:

$$\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \ldots = \frac{1}{\Phi} \cdot \left(1 + \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} + \ldots\right) = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\frac{\Phi - 1}{\Phi}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\Phi}{\Phi - 1} = \frac{1}{\Phi - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\Phi}} = \Phi$$

zu A 9.3:

$$\Phi + 1 + 1 + \tfrac{1}{\Phi} = \Phi + 1 + 1 + (\Phi - 1) = 2\Phi + 1 = \Phi^3$$

$$\Phi^2 + \Phi + \Phi + 1 = \Phi \cdot \left(\Phi + 1 + 1 + \tfrac{1}{\Phi}\right) = \Phi \cdot \Phi^3 = \Phi^4$$

zu A 9.4:

Nach dem Satz von Pythagoras gilt für die Hypotenuse c im Dreieck links:

$$c = \sqrt{\Phi^2 + \left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^2} = \sqrt{\Phi^2 + (\Phi - 1)^2} = \sqrt{\Phi^2 + (\Phi^2 - 2\Phi + 1)} = \sqrt{2\Phi^2 - 2\Phi + 1} = \sqrt{2 \cdot (\Phi + 1) - 2\Phi + 1} = \sqrt{3}$$

und für die Kathete b im Dreieck rechts:

$$b = \sqrt{\Phi^2 - 1^2} = \sqrt{(\Phi + 1) - 1} = \sqrt{\Phi}$$

zu A 9.5:

Die Seitenlängen des Rechtecks stehen im Verhältnis $1 : (\Phi - 1)$, also $1 : \frac{1}{\Phi}$, d. h. im Verhältnis $\Phi : 1$.

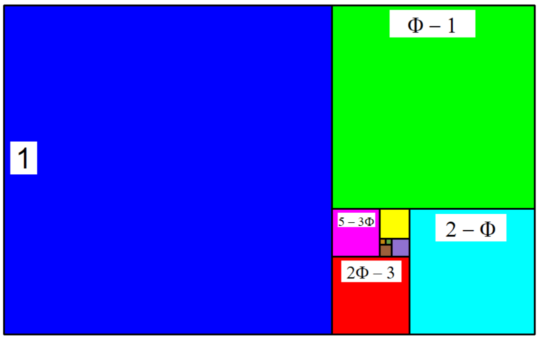
zu A 9.6:

(1) Nur dann, wenn die Verlängerung der Diagonale des horizontal gezeichneten Rechtecks genau durch den oberen rechten Eckpunkt des vertikal gezeichneten Rechtecks verläuft, liegen zwei zueinander ähnliche rechtwinklige Dreiecke vor. Die Katheten des kleineren Dreiecks stehen im Verhältnis $1 : \Phi$, die des größeren im Verhältnis $\Phi : (\Phi + 1)$. Da $\Phi^2 = \Phi + 1$ gilt, ist dieses Verhältnis gleich $\Phi : \Phi^2$, also ebenfalls gleich $1 : \Phi$.

(2) $e^2 = (\Phi+1)^2 + \Phi^2 = (\Phi^2 + 2\Phi + 1) + \Phi^2 = 2\Phi^2 + 2\Phi + 1 = 2 \cdot (\Phi + 1) + 2\Phi + 1 = 4\Phi + 3$, also $e = \sqrt{4\Phi + 3}$.
Außerdem gilt: $e = e_1 + e_2$ mit $e_1^2 = \Phi^2 + 1^2 = (\Phi + 1) + 1 = \Phi + 2$ und
$e_2^2 = (\Phi - 1)^2 + 1^2 = (\Phi^2 - 2\Phi + 1) + 1 = \Phi^2 - 2\Phi + 2 = (\Phi + 1) - 2\Phi + 2 = 3 - \Phi$, also: $e = \sqrt{\Phi + 2} + \sqrt{3 - \Phi}$.

zu A 9.7:

Wie im Buch ausgeführt, hat das erste abgetrennte Quadrat (blau) die Seitenlänge 1 und daher den Flächeninhalt 1, das zweite abgetrennte Quadrat (grün) die Seitenlänge $\Phi - 1$ und den Flächeninhalt $(\Phi - 1)^2 = \frac{1}{\Phi^2}$.



Das dritte Quadrat (hellblau) hat die Seitenlänge $1 - (\Phi - 1) = 2 - \Phi$ und den Flächeninhalt $(2 - \Phi)^2 = (\Phi^{-2})^2 = \Phi^{-4}$ (vgl. **A 9.1**).

Das vierte Quadrat (rot) hat die Seitenlänge $(\Phi - 1) - (2 - \Phi) = 2\Phi - 3$ und den Flächeninhalt $(2\Phi - 3)^2 = (\Phi^{-3})^2 = \Phi^{-6}$ (vgl. **A 9.1**).

Das fünfte Quadrat (pink) hat die Seitenlänge $(2 - \Phi) - (2\Phi - 3) = 5 - 3\Phi$ und den Flächeninhalt $(5 - 3\Phi)^2 = (\Phi^{-4})^2 = \Phi^{-8}$ (vgl. **A 9.1**).

zu A 9.8:

Der Wurzelterm $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \ldots}}}}}$ erfüllt die Bedingung $a = \sqrt{1 - a}$. Hieraus erhält man durch Quadrieren $a^2 = 1 - a$.

Diese quadratische Gleichung hat die positive Lösung $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1 = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$.

zu A 9.9:

Der Wurzelterm $\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \ldots}}}}}$ erfüllt die Bedingung $b = \sqrt{n + b}$. Hieraus erhält man durch Quadrieren $b^2 = n + b$.

Diese quadratische Gleichung hat die positive Lösung $b = \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$.

Beispielsweise ergibt sich für $n = 2$: $b = \frac{1+\sqrt{8+1}}{2} = 2$, d. h. $2 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}$,

für $n = 6$ ergibt sich: $b = \frac{1+\sqrt{24+1}}{2} = 3$, d. h. $3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}}$,

für $n = 12$ ergibt sich: $b = \frac{1+\sqrt{48+1}}{2} = 4$, d. h. $4 = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}}}}$

für $n = 20$ ergibt sich: $b = \frac{1+\sqrt{80+1}}{2} = 5$, d. h. $5 = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}}}$ usw.

Allgemein gilt: $k = \sqrt{k\cdot(k-1)+\sqrt{k\cdot(k-1)+\sqrt{k\cdot(k-1)+\sqrt{k\cdot(k-1)+\sqrt{k\cdot(k-1)+\ldots}}}}}$

zu A 9.10:

Die Größe der Winkel kann auch mithilfe der Winkelsumme im Dreieck erschlossen werden: Aus $\alpha = 108°$ ergibt sich $2\beta = 180° - 108° = 72°$, also $\beta = 36°$. Hieraus folgt dann: $\delta = 108° - \beta = 72°$, und weiter dann: $\gamma = 180° - 2\cdot\delta = 36°$, also $\beta = \gamma$, d. h., die von einem Eckpunkt ausgehenden Diagonalen teilen den Winkel in drei gleich große Teilwinkel.

zu A 9.11:

(1) Im spitzwinkligen goldenen Dreieck mit den Seitenlängen 1 und Φ ergibt sich aus dem Sinussatz:

$\frac{\sin(36°)}{1} = \frac{\sin(72°)}{\Phi}$, also $\sin(72°) = \Phi\cdot\sin(36°)$.

Im stumpfwinkligen goldenen Dreieck mit den Seitenlängen 1 und Φ ergibt sich aus dem Sinussatz:

$\frac{\sin(36°)}{1} = \frac{\sin(108°)}{\Phi}$, also $\sin(108°) = \sin(72°) = \Phi\cdot\sin(36°)$.

Wendet man den Kosinussatz im spitzwinkligen goldenen Dreieck an, so findet man:

$\Phi^2 = 1^2 + \Phi^2 - 2\cdot\Phi\cdot\cos(72°) \Leftrightarrow 2\cdot\Phi\cdot\cos(72°) = 1 \Leftrightarrow \cos(72°) = \frac{1}{2\cdot\Phi} = \frac{1}{2}\cdot(\Phi-1)$ und

$1^2 = \Phi^2 + \Phi^2 - 2\cdot\Phi^2\cdot\cos(36°) \Leftrightarrow 1 = 2\Phi^2\cdot(1-\cos(36°)) \Leftrightarrow \cos(36°) = 1 - \frac{1}{2\Phi^2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot(2-\Phi) = \frac{1}{2}\cdot\Phi$

Und im stumpfwinkligen Dreieck ergibt sich:

$\Phi^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot\cos(108°) \Leftrightarrow \cos(108°) = \frac{1}{2}\cdot(2-\Phi^2) = \frac{1}{2}\cdot(2-\Phi-1) = \frac{1}{2}\cdot(1-\Phi)$ und

$1^2 = \Phi^2 + 1^2 - 2\cdot\Phi\cdot\cos(36°) \Leftrightarrow 2\cdot\Phi\cdot\cos(36°) = \Phi^2 \Leftrightarrow \cos(36°) = \frac{1}{2}\cdot\Phi$.

(2) Durch die Höhe im spitzwinkligen goldenen Dreieck ergibt sich: $\sin(18°) = \cos(72°) = \frac{\frac{1}{2}}{\Phi} = \frac{1}{2}\cdot(\Phi-1)$ und

im stumpfwinkligen goldenen Dreieck: $\cos(36°) = \sin(54°) = \frac{\frac{\Phi}{2}}{1} = \frac{1}{2}\cdot\Phi$.

(3) Aus (1) und (2) sowie aus $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ folgt:

$\sin^2(36°) = 1 - \cos^2(36°) = 1 - \frac{1}{4}\cdot\Phi^2 = 1 - \frac{1}{4}\cdot(\Phi+1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\cdot\Phi = \frac{3-\Phi}{4}$, also

$\cos(54°) = \sin(36°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-\Phi}$.

$\cos^2(18°) = 1 - \sin^2(18°) = 1 - \frac{1}{4} \cdot (\Phi - 1)^2 = 1 - \frac{1}{4} \cdot (2 - \Phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \Phi$, also

$\cos(18°) = \sin(72°) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\Phi}$

Hieraus ergibt sich für den Tangens der Winkel:

$\tan(18°) = \frac{\Phi - 1}{\sqrt{2+\Phi}} = \sqrt{\frac{(\Phi-1)^2}{2+\Phi}} = \sqrt{\frac{2-\Phi}{2+\Phi}}$ und entsprechend der Kehrwert für tan(72°),

$\tan(54°) = \frac{\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} = \sqrt{\frac{\Phi^2}{3-\Phi}} = \sqrt{\frac{1+\Phi}{3-\Phi}}$ und entsprechend der Kehrwert für tan(36°).

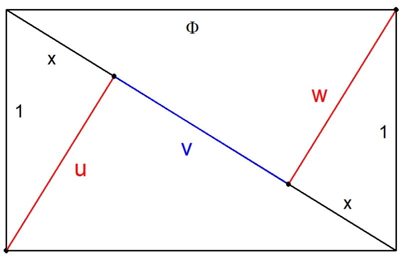
	18°	36°	54°	72°
sin	$\frac{1}{2} \cdot (\Phi - 1)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-\Phi}$	$\frac{1}{2} \cdot \Phi$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\Phi}$
cos	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2+\Phi}$	$\frac{1}{2} \cdot \Phi$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3-\Phi}$	$\frac{1}{2} \cdot (\Phi - 1)$
tan	$\sqrt{\frac{2-\Phi}{2+\Phi}}$	$\sqrt{\frac{3-\Phi}{1+\Phi}}$	$\sqrt{\frac{1+\Phi}{3-\Phi}}$	$\sqrt{\frac{2+\Phi}{2-\Phi}}$

Hinweis: Auch andere Darstellungen sind möglich, z. B.

$\tan(36°) = \frac{\sqrt{3-\Phi}}{\Phi} = \sqrt{\frac{3-\Phi}{\Phi^2}} = \sqrt{\frac{3}{\Phi^2} - \frac{1}{\Phi}} = \sqrt{3 \cdot (2-\Phi) - (\Phi - 1)} = \sqrt{7 - 4\Phi}$,

$\tan(18°) = \sqrt{\frac{2-\Phi}{2+\Phi}} \cdot \sqrt{\frac{2-\Phi}{2-\Phi}} = \sqrt{\frac{(2-\Phi)^2}{4-\Phi^2}} = \sqrt{\frac{4-4\Phi+\Phi^2}{4-(\Phi+1)}} = \sqrt{\frac{4-4\Phi+(\Phi+1)}{4-(\Phi+1)}} = \sqrt{\frac{5-3\Phi}{3-\Phi}}$

zu A 9.12:



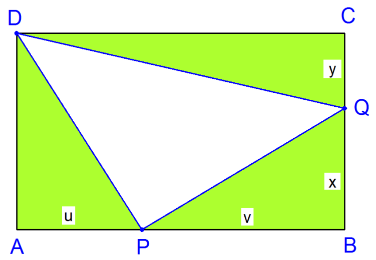
Aus Symmetriegründen gilt: $u = w$.

Die im goldenen Rechteck auftretenden rechtwinkligen Dreiecke sind zueinander ähnlich, d. h. für die Verhältnisse der Seiten gilt:

$x : u : 1 = u : (v + x) : \Phi$, d. h. $\frac{x}{1} = \frac{u}{\Phi} = u \cdot (\Phi - 1)$ und $\frac{u}{1} = \frac{v+x}{\Phi}$. Ersetzt man x in der zweiten Gleichung durch $u \cdot (\Phi - 1)$, dann ergibt sich:

$u = \frac{v + u \cdot (\Phi - 1)}{\Phi} \Leftrightarrow u \cdot \Phi = v + u \cdot \Phi - u \Leftrightarrow v - u = 0 \Leftrightarrow u = v$

zu A 9.13:



- 1. Teil des Beweises

Für die doppelten Flächeninhalte der Dreieck wird die Gleichheit vorausgesetzt, also

$u \cdot (x + y) = v \cdot x = y \cdot (u + v)$.

Aus $u \cdot (x + y) = y \cdot (u + v)$ folgt durch Umformung:

$\frac{u}{u+v} = \frac{y}{x+y}$, d. h., die Seiten *AB* und *CB* sind im selben Verhältnis geteilt. Betrachtet man jeweils die Kehrwerte, so kann man dies auch so beschreiben: $\frac{u+v}{u} = \frac{x+y}{y} \Leftrightarrow 1+\frac{v}{u} = 1+\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{v}{u} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{u}{v} = \frac{y}{x}$

Aus $u \cdot (x + y) = v \cdot x$ ergibt sich: $\frac{u}{v} = \frac{x}{x+y}$, zusammen mit der Bedingung $\frac{u}{v} = \frac{y}{x}$ bedeutet dies:

$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$, d. h., die längere Teilstrecke von *BC* verhält sich zur kürzeren Teilstrecke wie die längere Teilstrecke zur Gesamtstrecke, d. h., *BC* ist im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt. Insgesamt folgt hieraus auch, dass auch die Strecke AB im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt ist.

Alternativ kann man auch die beiden letzten Terme betrachten $\frac{v}{u+v} = \frac{y}{x}$ und mit $\frac{u}{v} = \frac{y}{x}$ kombinieren:

$\frac{v}{u+v} = \frac{u}{v}$, d. h., *AB* ist im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt.

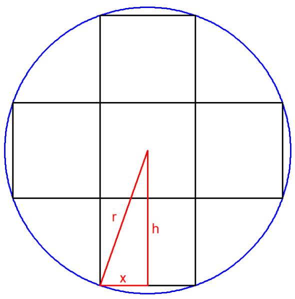
- 2. Teil des Beweises

Vorausgesetzt wird die Teilung der Strecken *AB* und *CB* im Verhältnis des goldenen Schnitts, also

$\frac{u}{v} = \frac{v}{u+v} = \frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$.

Hieraus folgt: $u \cdot (x + y) = v \cdot x$ (äußere Terme) und $v \cdot x = y \cdot (u + v)$ (innere Terme), also die Flächengleichheit der Dreiecke.

zu A 9.14:



Für die Gesamtfläche der sich orthogonal schneidenden Rechtecke gilt:

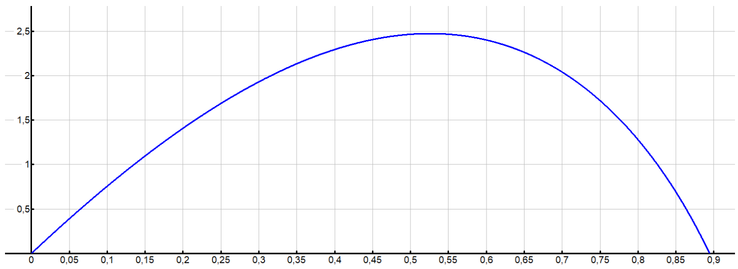
$A = 2 \cdot 2x \cdot 2h - (2x)^2 = 4x \cdot (2h - x)$

Zwischen Radius *r* und den Seiten *x*, *h* besteht die Beziehung (Nebenbedingung):

$r^2 = h^2 + x^2$, also $h = \sqrt{r^2 - x^2}$. Setzt man dies ein, so erhält man einen Funktionsterm, der nur von x abhängt (da r konstant):

$$A(x) = 4x \cdot (2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - x)$$

Numerische Lösung: Das Maximum dieser Funktion liegt bei $x \approx 0{,}526 \cdot r$, hieraus folgt $h \approx 0{,}851 \cdot r$ und das Verhältnis $h : x \approx 1{,}618$.



Um die Lösung exakt zu bestimmen, betrachte man den Winkel α, den r und h im rot eingetragenen rechtwinkligen Dreieck miteinander bilden. Hier gilt:

$\sin(\alpha) = \frac{x}{r}$ und $\cos(\alpha) = \frac{h}{r}$, also $x = r \cdot \sin(\alpha)$ und $h = r \cdot \cos(\alpha)$ und hiermit

$A = 2 \cdot 2x \cdot 2h - (2x)^2 = 4x \cdot (2h - x) = 4 \cdot r \cdot \sin(\alpha) \cdot (2 \cdot r \cdot \cos(\alpha) - r \cdot \sin(\alpha))$, also

$A = 4r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot [\, 2 \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha)\,] = 4r^2 \cdot [\, 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin^2(\alpha)\,] = 4r^2 \cdot [\sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha)\,]$

Für die Funktion $f(\alpha)$ mit $f(\alpha) = \sin(2\alpha) - \sin^2(\alpha)$ gilt:

$f'(\alpha) = \cos(2\alpha) \cdot 2 - 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = 2 \cdot \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)$

Die notwendige Bedingung $f'(\alpha) = 0$ ist erfüllt, wenn $\tan(2\alpha) = 2$, also wenn $2\alpha \approx 63{,}43°$, d. h., $\alpha \approx 31{,}72°$.

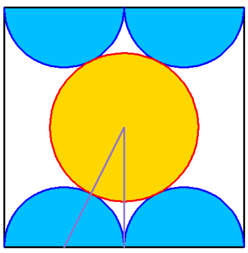
Dies ist aber gerade das Seitenverhältnis im goldenen Rechteck: $\tan(\alpha) = \frac{x}{h} = \frac{1}{\Phi}$ mit $\alpha \approx 31{,}72°$.

Formale Lösung der Gleichung $\tan(2\alpha) = 2$: $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} = 2 \Leftrightarrow \tan(\alpha) = 1 - \tan^2(\alpha)$

Die quadratische Gleichung $t^2 + t = 1$ hat die positive Lösung $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\Phi}$.

(Die hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums überprüfe man selbst.)

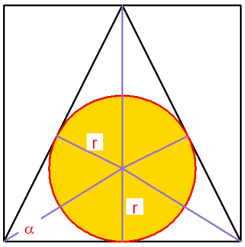
zu A 9.15:



Im eingetragenen rechtwinkligen Dreieck gilt nach dem Satz von Pythagoras für den unbekannten Radius r:

$$1^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow r = \tfrac{\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\Phi}$$

zu A 9.16:



Für den Winkel α in der Figur gilt: $\tan(\alpha) = 2$, also $\alpha \approx 63{,}43°$.

Den Mittelpunkt des Inkreises erhält man mithilfe der Winkelhalbierenden. Im rechtwinkligen Dreieck unten gilt: $\tan(\frac{1}{2}\alpha) = r$, also $r = \tan(31{,}72°) = \frac{1}{\Phi}$ (zur formalen Lösung vgl. Lösung von **A 9.14**)

zu A 9.17:

(1) In allen drei Dreiecken ist ein spitzer Winkel von 36° vorhanden; daher kann man die Flächeninhaltsformel für Dreiecke anwenden, wenn zwei Schenkel und der eingeschlossene Winkel bekannt sind.
Für das spitzwinklige goldene Dreieck mit Schenkeln der Länge Φ am 36°-Winkel gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \Phi^2 \cdot \sin(36°)$. Für das blaue Teildreieck mit den Schenkeln der Länge 1 und Φ am 36°-Winkel gilt: $A_{\Delta_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi \cdot \sin(36°)$. Für das grüne Dreieck mit zwei Schenkeln der Länge 1 am 36°-Winkel gilt: $A_{\Delta_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(36°)$. Die Flächeninhalte der drei Dreiecke stehen also im Verhältnis $\Phi^2 : \Phi : 1$, also $A_\Delta : A_{\Delta_1} : A_{\Delta_2} = \Phi : 1 : \frac{1}{\Phi}$.

(2) Betrachtet wird ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck mit der Basis der Länge Φ und den Schenkeln der Länge 1. Bzgl. des 36°-Winkels gilt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \Phi \cdot 1 \cdot \sin(36°)$. Für das blaue Teildreieck mit den Schenkeln der Länge 1 und $\frac{1}{\Phi}$ am 36°-Winkel gilt: $A_{\Delta_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \sin(36°)$. Für das grüne Dreieck mit zwei Schenkeln der Länge 1 am 36°-Winkel gilt: $A_{\Delta_2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(36°)$. Die Flächeninhalte der drei Dreiecke stehen also im Verhältnis $A_\Delta : A_{\Delta_1} : A_{\Delta_2} = \Phi : \frac{1}{\Phi} : 1$.

zu A 9.18:

Die blau gefärbten 36°-144°-Rauten setzen sich aus zwei spitzwinkligen goldenen Dreiecken mit Schenkeln der Länge 1 und daher einer Basis (= kürzere der beiden Diagonalen der Raute) der Länge $\frac{1}{\Phi}$ zusammen.

Die grün gefärbten 72°-108°-Rauten setzen sich aus zwei stumpfwinkligen goldenen Dreiecken mit Schenkeln der Länge 1 und daher einer Basis (= kürzere der beiden Diagonalen der Raute) der Länge Φ zusammen.

zu A 9.19:

Wenn das Quadrat links den Gesamtflächeninhalt 5 hat, dann hat dieses Quadrat die Seitenlänge $\sqrt{5}$.

Diese Seitenlänge setzt sich zusammen aus der Breite a und der Höhe b eines Rechtecks, also $a + b = \sqrt{5}$.

Andererseits gilt: $b + 1 = a$ (vgl. innen liegende Seite der Rechtecke), also $(b+1) + b = \sqrt{5} \Leftrightarrow b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi}$.

Hieraus folgt für die Breite der Rechtecke: $b = \Phi$ (denn $a \cdot b = 1$).

Die Trapeze in der rechts stehenden Abbildung haben die gleiche Höhe; daher ist die Mittellinie der Trapeze genauso lang wie die Breite a der Rechtecke in der Abbildung links.

zu A 9.20:

(1) Die beiden Radien ergänzen sich zu 1: $r_0 + r_1 = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} = \frac{\Phi+1}{\Phi^2} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2} = 1$. Nach dem Vier-Kreise-Satz gilt für die Radien der sich gegenseitig berührenden Kreise:

$$2 \cdot \left[\left(\frac{1}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\right)^2\right] = \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{R}\right]^2, \text{ also } 2 \cdot \left[\Phi^2 + \Phi^4 + \left(\frac{1}{r_2}\right)^2 + 1^2\right] = \left[\Phi + \Phi^2 + \frac{1}{r_2} - 1\right]^2.$$

Diese quadratische Gleichung kann nach r_2 aufgelöst werden. Aus der Symmetrie der gegebenen Situation ergibt sich, dass die beiden Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung übereinstimmen müssen. Daher ist bei der Anwendung des Vieta'schen Wurzelsatzes (vgl. *Mathematik ist schön*, Seite 275) ein einfacherer Weg möglich:

$$x_1 + x_2 = 2x_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right) = 2 \cdot (\Phi + \Phi^2 - 1) = 2 \cdot (\Phi + (\Phi+1) - 1) = 2 \cdot 2\Phi, \text{ also } r_2 = \tfrac{1}{2\Phi} = \tfrac{1}{2} \cdot r_0.$$

(2) Gemäß der Rekursionsformel für Pappos-Ketten ergibt sich:

$$\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{r_0} + \frac{1}{R-r_0} - \frac{(n+1)^2}{R} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{\Phi}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\Phi}} - \frac{(n+1)^2}{1} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{\Phi}} + \frac{1}{\frac{1}{\Phi^2}} - \frac{(n+1)^2}{1}$$
$$= (n+1)^2 \cdot \Phi + \Phi^2 - (n+1)^2 = (n+1)^2 \cdot \Phi + (\Phi+1) - (n+1)^2 = [(n+1)^2 + 1] \cdot \Phi - [(n+1)^2 - 1]$$

zu A 9.21:

(1) Das blau gefärbte Rechteck hat die Seitenlängen 1 und $\frac{1}{\Phi}$, das grün gefärbte daher die Breite $1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$. Da es sich ebenfalls um ein goldenes Rechteck handelt, hat dieses Rechteck die Höhe $\frac{1}{\Phi}$; der Flächeninhalt beträgt daher $\frac{1}{\Phi^3}$. Das hellblau gefärbte Rechteck hat die Höhe $1 - \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$, also die Breite $\frac{1}{\Phi^3}$ und somit den Flächeninhalt $\frac{1}{\Phi^5}$ usw.

Da das Quadrat mithilfe dieser goldenen Rechtecke ausgefüllt werden kann, ist die Parkettierung mit den kleiner werdenden goldenen Rechtecken eine Veranschaulichung der Gleichung $\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi^5} + \ldots = 1$.

(Formaler Beweis der Gleichung mithilfe der Summenformel für geometrische Reihen:

$\frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi^5} + \ldots = \frac{1}{\Phi} \cdot \left(1 + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^4} + \ldots\right) = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\Phi}} = 1$)

(2) Staucht man die goldenen Rechtecke in der Abbildung links mit dem Faktor $\frac{1}{\Phi}$, so erhält man die Abbildung rechts; aus den goldenen Rechtecken werden Quadrate, deren Summe ein goldenes Rechteck mit der Breite 1 und der Höhe $\frac{1}{\Phi}$ ergibt.

zu A 9.22:

(1) Das blau gefärbte Rechteck hat die Höhe $b_0 = 1$ und daher (wegen des vorgegebenen Formats) die Breite $a_0 = b_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Der rechts übrig bleibende Rechteckstreifen hat dann die Breite

$a_1 = b_0 - a_0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}293$. Ein Rechteck mit dieser Breite hat im vorgegebenen Format die Höhe $b_1 = \sqrt{2} \cdot a_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414$. Es passen also zwei solcher Rechtecke übereinander (grün und hellblau gefärbt). Oben rechts bleibt also eine rechteckige Fläche der Breite $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ und der Höhe

$b_2 = b_0 - 2 \cdot b_1 = 1 - 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) = 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}172$. Das rot (und das pink) gefärbte Rechteck hat also diese Höhe und daher die Breite $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}-4}{2} \approx 0{,}121$. Auch hier passen zwei Rechtecke des Formats – diesmal nebeneinander. Nachdem auch das pink gefärbte Rechteck eingezeichnet ist, bleibt eine rechteckige Fläche der Breite $a_3 = a_1 - 2 \cdot a_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}-4}{2} = \frac{10-7\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}050$ und der Höhe $3 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}172$.

Das gelb und das oliv gefärbte Rechteck im vorgegebenen Format haben die Höhe $b_3 = \sqrt{2}\cdot a_3 = \sqrt{2}\cdot\frac{10-7\sqrt{2}}{2} = 5\cdot\sqrt{2}-7 \approx 0{,}071$. Oben rechts bleibt also eine rechteckige Fläche der Breite $\frac{10-7\sqrt{2}}{2}$ und der Höhe $b_4 = b_2 - 2\cdot b_3 = \left(3-2\cdot\sqrt{2}\right) - 2\cdot\left(5\cdot\sqrt{2}-7\right) = 17-12\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}029$. Die braun gefärbten Rechtecke haben also diese Höhe und daher die Breite $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(17-12\cdot\sqrt{2}\right) = \frac{17\sqrt{2}-24}{2} \approx 0{,}042$.

Die Berechnung erfolgt also nach folgendem Algorithmus:

$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b_0$	→	$a_1 = b_0 - a_0$		$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b_2$	→	$a_3 = a_1 - 2\cdot a_2$		$a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b_4$	→
↑		↓		↑		↓		↑	
$b_0 = 1$		$b_1 = \sqrt{2}\cdot a_1$	→	$b_2 = b_0 - 2\cdot b_1$		$b_3 = \sqrt{2}\cdot a_3$	→	$b_4 = b_2 - 2\cdot b_3$	

Im Einzelnen ergibt sich:

k	0	1	2	3	4	5
a_k	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}-4}{2}$	$\frac{10-7\sqrt{2}}{2}$	$\frac{17\sqrt{2}-24}{2}$	…
b_k	1	$\sqrt{2}-1$	$3-2\cdot\sqrt{2}$	$5\cdot\sqrt{2}-7$	$17-12\cdot\sqrt{2}$	…
A_k	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\cdot\sqrt{2}-4}{2}$	$\frac{17\cdot\sqrt{2}-24}{2}$	$\frac{99\cdot\sqrt{2}-140}{2}$	$\frac{577\cdot\sqrt{2}-816}{2}$	…

(2) Für das Format $1:\sqrt{3}$ ergibt sich analog der folgende Algorithmus:

$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot b_0$	→	$a_1 = b_0 - a_0$		$a_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot b_2$	→	$a_3 = a_1 - 2\cdot a_2$		$a_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot b_4$	→
↑		↓		↑		↓		↑	
$b_0 = 1$		$b_1 = \sqrt{3}\cdot a_1$	→	$b_2 = b_0 - b_1$		$b_3 = \sqrt{3}\cdot a_3$	→	$b_4 = b_2 - b_3$	
blau		grün		hellblau/rot		pink		gelb/oliv	

(3) Für das Format $1:1{,}6 = 5:8$ ergibt sich ein abbrechender Algorithmus:

$a_0 = \frac{5}{8}\cdot b_0 = \frac{5}{8}$	→	$a_1 = b_0 - a_0 = \frac{3}{8}$		$a_2 = \frac{5}{8}\cdot b_2 = \frac{1}{4}$	→	$a_3 = a_1 - a_2 = \frac{1}{8}$
↑		↓		↑		↓
$b_0 = 1$		$b_1 = \frac{8}{5}\cdot a_1 = \frac{3}{5}$	→	$b_2 = b_0 - b_1 = \frac{2}{5}$		$b_3 = \frac{8}{5}\cdot a_3 = \frac{1}{5}$
blau		grün		hellblau		rot/pink

zu A 9.23:

(1) Die kürzere Seite der Länge und die längere Seiteeines goldenen Rechtecks ergeben zusammen die Seite des äußeren Quadrats, z. B. mit Seitenlänge 1. Da $\frac{1}{\Phi}+\frac{1}{\Phi^2}=1$ haben also die vier äußeren Rechtecke die Seitenlängen $a_1 = \frac{1}{\Phi^2} \approx 0{,}382$ und $b_1 = \frac{1}{\Phi} \approx 0{,}618$ und jeweils den Flächeninhalt $A_1 = a_1\cdot b_1 = \frac{1}{\Phi^3}$.

Im Innern der vier grün gefärbten goldenen Rechtecke liegt ein Quadrat mit Seitenlänge $d_2 = b_1 - a_1 = \frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2} = \frac{\Phi-1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^3} \approx 0{,}236$. Die vier hellblau gefärbten goldenen Rechtecke haben also die Seitenlängen $b_2 = \frac{1}{\Phi}\cdot\frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^4} \approx 0{,}146$ und $a_2 = \frac{1}{\Phi^2}\cdot\frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^5} \approx 0{,}090$ und jeweils den Flächeninhalt $A_2 = a_2\cdot b_2 = \frac{1}{\Phi^9}$.

Im Innern der vier hellblau gefärbten goldenen Rechtecke liegt ein Quadrat mit Seitenlänge $d_3 = \frac{1}{\Phi^4} - \frac{1}{\Phi^5} = \frac{1}{\Phi^3}\cdot\left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2}\right) = \frac{1}{\Phi^3}\cdot\frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^6}$. Die vier rot gefärbten goldenen Rechtecke haben also die Seitenlängen $b_3 = \frac{1}{\Phi}\cdot\frac{1}{\Phi^6} = \frac{1}{\Phi^7}$ und $a_3 = \frac{1}{\Phi^2}\cdot\frac{1}{\Phi^6} = \frac{1}{\Phi^8}$ und jeweils den Flächeninhalt $A_3 = a_3\cdot b_3 = \frac{1}{\Phi^{15}}$. usw.

Seitenlänge Quadrat	$d_1 = 1$	$d_2 = b_1 - a_1 = \frac{1}{\Phi^3}$	$d_3 = b_2 - a_2 = \frac{1}{\Phi^6}$	$d_4 = b_3 - a_3 = \frac{1}{\Phi^9}$
Breite	$a_1 = \frac{1}{\Phi^2} \cdot d_1 = \frac{1}{\Phi^2}$	$a_2 = \frac{1}{\Phi^2} \cdot d_2 = \frac{1}{\Phi^5}$	$a_3 = \frac{1}{\Phi^2} \cdot d_3 = \frac{1}{\Phi^8}$	$a_4 = \frac{1}{\Phi^2} \cdot d_4 = \frac{1}{\Phi^{11}}$
Höhe	$b_1 = \frac{1}{\Phi} \cdot d_1 = \frac{1}{\Phi}$	$b_2 = \frac{1}{\Phi} \cdot d_2 = \frac{1}{\Phi^4}$	$b_3 = \frac{1}{\Phi} \cdot d_3 = \frac{1}{\Phi^7}$	$b_4 = \frac{1}{\Phi} \cdot d_4 = \frac{1}{\Phi^{10}}$
Flächeninhalt	$A_1 = a_1 \cdot b_1 = \frac{1}{\Phi^3}$	$A_2 = a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{\Phi^9}$	$A_3 = a_3 \cdot b_3 = \frac{1}{\Phi^{15}}$	$A_4 = a_4 \cdot b_4 = \frac{1}{\Phi^{21}}$

Allgemein gilt:

Wenn $\frac{1}{\Phi^n} - \frac{1}{\Phi^{n+1}} = \frac{1}{\Phi^{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2}\right) = \frac{1}{\Phi^{n-1}} \cdot \frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^{n+2}}$ die Seitenlänge eines Quadrats ist, dann haben die vier goldenen Rechtecke im Innern dieses Quadrats die Seitenlängen $\frac{1}{\Phi^{n+3}}$ und $\frac{1}{\Phi^{n+4}}$; der Flächeninhalt dieser Rechtecke beträgt jeweils $\frac{1}{\Phi^{2n+7}}$. Das nächste Quadrat hat dann die dann die Seitenlänge $\frac{1}{\Phi^{n+3}} - \frac{1}{\Phi^{n+4}} = \frac{1}{\Phi^{n+2}} \cdot \left(\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^2}\right) = \frac{1}{\Phi^{n+2}} \cdot \frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^{n+5}}$.

Da die Quadratfläche auf diese Weise parkettiert werden kann, gilt die Beziehung:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{\Phi^3} + \frac{1}{\Phi^9} + \frac{1}{\Phi^{15}} + \frac{1}{\Phi^{21}} + \ldots\right) = 4 \cdot \frac{1}{\Phi^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\Phi^6}} = 4 \cdot \frac{1}{\Phi^3} \cdot \frac{\Phi^6}{\Phi^6 - 1} = 4 \cdot \frac{\Phi^3}{\Phi^6 - 1} = 4 \cdot \frac{2\Phi+1}{8\Phi+4} = 1$$

(2) Die Parkettierung des Quadrats der Seitenlänge 1 erfolgt so, dass vier goldene Rechtecke jeweils um ein Quadrat ergänzt werden, dessen Seitenlänge genauso lang ist wie die kürzere Seite des goldenen Rechtecks. Ist also a_1 die Seitenlänge der kürzeren Seite des goldenen Rechtecks, dann hat die längere Seite die Seitenlänge $b_1 = \Phi \cdot a_1$ und es gilt: $2a_1 + b_1 = 1$, also $2a_1 + \Phi a_1 = 1$, d. h. $a_1 = \frac{1}{2+\Phi}$, $b_1 = \frac{\Phi}{2+\Phi}$.

Der Rahmen aus grün gefärbten Quadraten und goldenen Rechtecken hat daher den Flächeninhalt:

$$A_1 = 4 \cdot \left(a_1^2 + a_1 \cdot b_1\right) = 4 \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + b_1\right) = 4 \cdot a_1 \cdot \left(a_1 + b_1\right) = 4 \cdot \frac{1}{2+\Phi} \cdot \frac{1+\Phi}{2+\Phi} = 4 \cdot \frac{\Phi^2}{(2+\Phi)^2} = 4 \cdot \frac{\Phi^2}{4+4\Phi+\Phi^2} = 4 \cdot \frac{\Phi^2}{5+5\Phi} = \frac{4}{5} \cdot \frac{\Phi^2}{1+\Phi} = \frac{4}{5}$$

Das Innere des grün gefärbten Rahmens hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{5}$.

Für den hellblauen Rahmen aus Quadraten und goldenen Rechtecken gilt dann weiter:

$a_2 = \frac{1}{2+\Phi} \cdot b_1 = \frac{\Phi}{(2+\Phi)^2} = \frac{\Phi}{5+5\Phi} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\Phi}{1+\Phi} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\Phi}{\Phi^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\Phi}$ und daher $b_2 = a_2 \cdot \Phi = \frac{1}{5}$, der Flächeninhalt des Rahmens ist gleich $A_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$. usw.

Da die Quadratfläche auf diese Weise parkettiert werden kann, gilt die Beziehung:

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{25} + \frac{4}{125} + \ldots = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} = 1$$

zu A 9.24:

Ein goldenes Rechteck mit den Seitenlängen 1 und Φ wird zerlegt in ein Quadrat der Seitenlänge 1 zwei goldene Rechtecke der Höhe $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$ und der Breite $\frac{1}{\Phi^2}$. Zwischen den beiden goldenen Rechtecken liegt ein Rechteck der Breite $1 - 2 \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{\Phi^2 - 2}{\Phi^2} = \frac{\Phi+1-2}{\Phi^2} = \frac{\Phi-1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^3}$ und der Höhe $\frac{1}{\Phi}$. Von diesem Rechteck wird ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{1}{\Phi^3}$ abgetrennt (hellblau gefärbt); darüber liegt dann ein dunkel-orange gefärbtes Rechteck mit der Breite $\frac{1}{\Phi^3}$ und der Höhe $\frac{1}{\Phi} - \frac{1}{\Phi^3} = \frac{\Phi^2 - 1}{\Phi^3} = \frac{\Phi+1-1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi^2}$, also ebenfalls ein goldenes Rechteck.

Die Zerlegung des ursprünglich gegebenen goldenen Rechtecks mit Flächeninhalt Φ erfolgt also in zwei Quadrate mit Flächeninhalt 1 und $\left(\frac{1}{\Phi^3}\right) = \frac{1}{\Phi^6}$, zwei goldene Rechtecke mit Flächeninhalt $\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^3}$ und ein goldenes Rechteck mit Flächeninhalt $\frac{1}{\Phi^3} \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{\Phi^5}$.

Kontrollrechnung: $1+\frac{1}{\Phi^6}+2\cdot\frac{1}{\Phi^3}+\frac{1}{\Phi^5}=1+(13-8\Phi)+2\cdot(2\Phi-3)+(5\Phi-8)=\Phi$

Im nächsten Schritt werden dann die drei goldenen Rechtecke der ersten Zerlegung wiederum in gleicher Weise zerlegt.

zu A 9.25:

Figur links: Wenn die beiden blau gefärbten Quadrate die Seitenlänge Φ haben, dann hat der umbeschriebene Kreis den Radius $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\Phi^2+(2\Phi)^2}=\frac{\Phi}{2}\cdot\sqrt{5}$. Die rechts und links von den blau gefärbten Quadraten gezeichneten Rechtecke haben die Höhe Φ und die Breite $\frac{\Phi}{2}\cdot\sqrt{5}-\frac{\Phi}{2}=\frac{\Phi}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)=\Phi\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\Phi\cdot\frac{1}{\Phi}=1$. Es handelt sich also um goldene Rechtecke.

Figur rechts: Ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge $c = p + q = 1 + \Phi$ hat gemäß dem Höhensatz des Euklid die Höhe $h=\sqrt{p\cdot q}=\sqrt{\Phi}$. Für die Katheten gilt: $a^2=1^2+h^2=1+\Phi=\Phi^2$, also $a=\Phi$, sowie $b^2=\Phi^2+h^2=\Phi^2+\Phi=\Phi\cdot(\Phi+1)=\Phi\cdot\Phi^2=\Phi^3$, also $b=\Phi\cdot\sqrt{\Phi}$.

Berechnung gemäß Kathetensatz: $a^2=p\cdot c=1\cdot(1+\Phi)=\Phi^2$; $b^2=q\cdot c=\Phi\cdot(1+\Phi)=\Phi\cdot\Phi^2=\Phi^3$.

Die Beziehung aus dem Satz von Pythagoras bedeutet hier: $a^2 + b^2 = \Phi^2 + \Phi^3$ und $c^2 = (1 + \Phi)^2 = (\Phi^2)^2 = \Phi^4$, also $\Phi^2 + \Phi^3 = \Phi^4$.

zu A 9.26:

Das Ausgangsdreieck hat den Flächeninhalt $A=\frac{1}{2}\cdot\Phi\cdot1\cdot\sin(72°)=\frac{1}{4}\cdot\Phi\cdot\sqrt{2+\Phi}$ (vgl. **A 9.11**)

Trennt man von einem spitzwinkligen goldenen Dreieck mit einer Basis der Länge 1 und Schenkeln der Länge Φ ein spitzwinkliges goldenes Dreieck mit Schenkeln der Länge 1, also einer Basis der Länge $\Phi-1=\frac{1}{\Phi}$ ab, dann bleibt das grün gefärbte Trapez übrig. Dieses hat also parallele Seiten mit den Längen 1 und $\frac{1}{\Phi}$ und Schenkel der Länge $\frac{1}{\Phi}$. Ein solches Trapez mit drei gleich langen Seiten der Länge $\frac{1}{\Phi}$ hat den folgenden Flächeninhalt:

Zeichnet man eine Diagonale im Trapez, dann entstehen zwei Dreiecke, deren Flächeninhalt man beispielsweise wie folgt berechnen kann:

$$A_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\sin(72°)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\sin(108°)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Phi}\cdot\sin(72°)\cdot(1+\frac{1}{\Phi})=\frac{1}{2}\cdot\sin(72°)=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+\Phi}\,.$$

Von dem verbleibenden spitzwinkligen goldenen Dreieck mit Schenkeln der Länge 1 und der Basis der Länge $\frac{1}{\Phi}$ wird dann wieder ein spitzwinkliges goldenes Dreieck abgetrennt (mit Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi}$ und einer Basis der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$). Das abgetrennte Trapez hat dann drei gleich lange Seiten der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ und eine Basis der Länge $\frac{1}{\Phi}$. Der Flächeninhalt des hellblau gefärbten Trapezes ist dann gleich

$A_2=\frac{1}{\Phi^2}\cdot A_1=\frac{1}{\Phi^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+\Phi}$. Die Gesamtfläche ist

$$A=\left(1+\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi^4}+\ldots\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+\Phi}=\frac{1}{1-\frac{1}{\Phi^2}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+\Phi}=\Phi\cdot\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2+\Phi}\,.$$

zu A 9.27:

Die erste Abbildung zeigt eine Zerlegung der Ausgangsfigur (spitzwinkliges goldenes Dreieck mit einer Basis der Seitenlänge 1 und Schenkeln der Länge Φ) in ein Trapez mit drei gleich langen Seiten der Länge $\frac{1}{\Phi}$ und einer Basis der Länge 1 (grün gefärbt), ein Trapez mit drei gleich langen Seiten der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ und einer Basis der Länge $\frac{1}{\Phi}$ (hellblau gefärbt) sowie einem spitzwinkligen goldenen Dreieck mit einer Basis der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ und Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi}$ (lila gefärbt).

In der zweiten Abbildung wird hieraus eine Zerlegung in zwei zueinander kongruente spitzwinklige goldene Dreiecke mit einer Basis der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ und Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi}$ (lila gefärbt) und drei zueinander kongruenten stumpfwinkligen goldenen Dreiecken mit einer Basis der Länge 1 und Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi}$ (gelb und orange gefärbt).

In der dritten Abbildung sind dann zwei der drei stumpfwinkligen goldenen Dreiecke unterteilt, jeweils in ein stumpfwinkliges goldenes Dreieck mit einer Basis der Länge $\frac{1}{\Phi}$ und Schenkeln der Länge $\frac{1}{\Phi^2}$ (gelb gefärbt) und ein spitzwinkliges goldenes Dreieck, das kongruent ist zu den beiden oben liegenden Dreiecken (daher ebenfalls lila gefärbt).

Der Flächeninhalt dieser drei unterschiedlich zerlegten Figuren ist (vgl. auch **A 9.26**):

Abb. 1 (grün + hellblau + lila):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) + \frac{1}{\Phi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi^2} \cdot \sin(72°) = \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) \cdot \left(1 + \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3}\right) = \Phi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) \approx 0{,}769$$

Abb. 2 (gelb/orange + lila):

$$A = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \sin(108°) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi^3} \cdot \sin(108°) = \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) \cdot \left(\frac{3}{\Phi^2} + \frac{2}{\Phi^3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) \cdot \Phi \approx 0{,}769$$

Abb. 3 (orange + gelb + lila):

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} \cdot \sin(108°) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi^2} \cdot \frac{1}{\Phi^2} \cdot \sin(108°) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Phi^3} \cdot \sin(72°) = \frac{1}{2} \cdot \sin(72°) \cdot \left(\frac{1}{\Phi^2} + \frac{2}{\Phi^4} + \frac{4}{\Phi^3}\right) = \Phi \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(72°)$$

zu A 9.28:

Betrachtet man spitzwinklige goldene Dreiecke mit einer Basis der Länge 1 und Schenkeln der Länge Φ, dann ergibt sich für den Radius des Kreises eine Länge von $1 + \Phi$, also von Φ^2, wie man leicht erkennt, wenn man die Schenkel der inneren spitzwinkligen goldenen Dreiecke verlängert. Der Kreis hat dann eine Fläche von $\Phi^4 \cdot \pi \approx 21{,}53$; der 10-zackige Stern eine Fläche von $20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi^2 \cdot \sin(36°) \approx 15{,}39$. Wenn man den 10-zackigen Stern zu einem regelmäßigen 10-Eck ergänzt, dann kommen noch 10 stumpfwinklige goldene Dreiecke mit Schenkellänge 1 mit einer Gesamtfläche von ca. 4,76 hinzu.

zu A 9.29:

(1) Für jedes der grün gefärbten Dreiecke gilt, dass die Grundseite k-mal so lang ist wie die Grundseite des gelb gefärbten Ausgangsdreiecks und dass die Höhe $(1 + k)$-mal so lang ist wie die Höhe des Ausgangsdreiecks. Ist A der Flächeninhalt des Ausgangsdreiecks, dann ergibt sich für den Flächeninhalt der erweiterten Figur

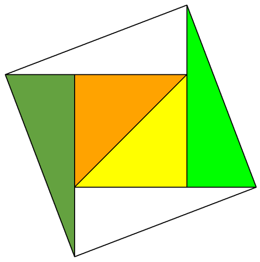
$A + 3 \cdot k \cdot (1 + k) \cdot A = (1 + 3k + 3k^2) \cdot A$

(2) Im Falle $k = \frac{1}{\Phi}$ ist der Flächeninhalt der grün gefärbten Dreiecke (wegen $\frac{1}{\Phi} \cdot (1 + \frac{1}{\Phi}) = (\Phi - 1) \cdot \Phi = 1$) jeweils genauso so groß wie der des gelb gefärbten Ausgangsdreiecks; daher ergibt sich: $1 + 3 \cdot \frac{1}{\Phi} + 3 \cdot \frac{1}{\Phi^2} = 1 + 3 \cdot (\Phi - 1) + 3 \cdot (2 - \Phi) = 4$, d. h., die erweiterte Figur ist 4-mal so groß wie das Ausgangsdreieck.

Im Falle $k = 1$ ist der Flächeninhalt der grün gefärbten Dreiecke dann doppelt so groß wie der des gelb gefärbten Ausgangsdreiecks, und die gesamte Figur ist 7-mal so groß wie das Ausgangsdreieck.

zu A 9.30:

(1) Für jedes der grün gefärbten Dreiecke gilt, dass die Grundseite k-mal so lang ist wie die Grundseite des gelb gefärbten Ausgangsquadrats und die Höhe $(1 + k)$-mal so lang. Der Flächeninhalt eines grün gefärbten Dreiecks ist also $k \cdot (1 + k)$-mal so groß wie der des halben Ausgangsquadrats, vgl. folgende Abbildung.



Ist A der Flächeninhalt des Ausgangsquadrats, dann ergibt sich für den Flächeninhalt der erweiterten Figur

$A + 2 \cdot k \cdot (1 + k) \cdot A = (1 + 2k + 2k^2) \cdot A$

(2) Im Falle $k = \frac{1}{\Phi}$ ergibt sich $1 + 2 \cdot \frac{1}{\Phi} + 2 \cdot \frac{1}{\Phi^2} = 1 + 2 \cdot (\Phi - 1) + 2 \cdot (2 - \Phi) = 3$, d. h., die gesamte Figur ist also 3-mal so groß wie das Ausgangsquadrat.

Im Falle $k = 1$, also $1 + 2k + 2k^2 = 5$ ist die gesamte Figur 5-mal so groß wie das Ausgangsqudrat (wie man auch erkennt, wenn man die Seiten des Ausgangsquadrats jeweils um eine halbe Seitenlänge in die entgegengesetzte Richtung verlängert).

(3) Aus $2k + 2k^2 = 1 \Leftrightarrow k^2 + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ ergibt sich $k = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366$.

zu A 9.31:

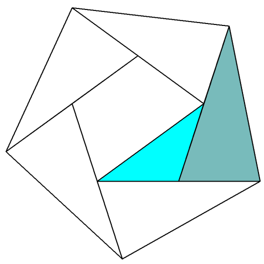
Für den Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks mit Seitenlänge s gilt:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin\left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$

Der Flächeninhalt A des regelmäßigen n-Ecks berechnet sich aus dem Flächeninhalt von n gleichschenkligen Dreiecken, die man erhält, wenn man den Mittelpunkt des n-Ecks mit den Eckpunkten verbindet. Für die Höhe h dieser gleichschenkligen Dreiecke gilt: $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{\frac{s}{2}}{h}$, d. h. $h = \frac{s}{2 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$.

Für den Flächeninhalt A der Ausgangsfigur gilt also: $A = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{2 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)} = \frac{n}{4} \cdot \frac{s^2}{\tan\left(\frac{180°}{n}\right)}$.

Um den Flächeninhalt der hinzukommenden n Dreiecke zu bestimmen, betrachte man die folgende Abbildung. Jedes der außen liegenden Dreiecke kann ein Dreieck im Innern des n-Ecks zugeordnet werden.



Dieses innen liegende Dreieck entsteht, wenn man einen Eckpunkt mit dem nächste und dem übernächsten Eckpunkt verbindet. Dieses stumpfwinklige Dreieck (hellblau gefärbt) hat einen stumpfen Winkel der Größe $180° - \frac{360°}{n}$ und daher den Flächeninhalt A_1 mit

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin\left(180° - \frac{360°}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$

Jedes der graublau gefärbten Dreiecke hat also den Flächeninhalt $A_2 = k \cdot (1 + k) \cdot A_1$.

Um den Faktor zu bestimmen, um den der Flächeninhalt durch die neu hinzugekommenen äußeren Dreiecke wächst, muss der Anteil von A_1 an A ermittelt werden:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}{\frac{n}{4} \cdot s^2} = \frac{2}{n} \cdot \sin\left(\frac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Setzt man den Flächeninhalt der Ausgangsfigur mit 1 FE an, dann ergibt sich für den neu hinzukommenden Flächeninhalt:

$$A_{außen} = n \cdot k \cdot (1+k) \cdot \tfrac{2}{n} \cdot \sin\left(\tfrac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right) = 2 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin\left(\tfrac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

Wegen $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ folgt für $\alpha = \tfrac{180°}{n}$:

$$\sin\left(\tfrac{360°}{n}\right) \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \tan\left(\tfrac{180°}{n}\right) = 2 \cdot \sin^2\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$, also

$$A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

(2) Beim regelmäßigen 5-Eck ergibt sich:

$$A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2(36°) = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3-\Phi}\right)^2 = k \cdot (1+k) \cdot (3-\Phi)$$

Für $k = \frac{1}{\Phi}$ ist $k \cdot (1+k) = 1$. Daher ist dann der Außenbereich $(3 - \Phi) \approx 1{,}382$-mal so groß wie das gelb gefärbte regelmäßige 5-Eck, und die Gesamtfigur ist $(4 - \Phi)$-mal so groß wie die Ausgangsfigur.

Für $k = 1$ ist der Flächeninhalt des Außenbereichs $2 \cdot (3 - \Phi) \approx 2{,}764$-mal so groß wie das innen liegende regelmäßige 5-Eck.

(3) Der Außenbereich ist genauso groß wie die Ausgangsfigur, wenn k die folgende Bedingung erfüllt:
$k \cdot (1+k) \cdot (3-\Phi) = 1 \Leftrightarrow k^2 + k = \frac{1}{3-\Phi} \Leftrightarrow \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3-\Phi} + \frac{1}{4} = \frac{7-\Phi}{12-4\Phi}$ also $k = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7-\Phi}{12-4\Phi}} \approx 0{,}4867$.

(4) Beim regelmäßigen 6-Eck ergibt sich: $A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2(30°) = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \frac{1}{4} = k \cdot (1+k)$

Wenn $k = \frac{1}{\Phi}$, dann ist der Außenbereich genauso groß wie die Ausgangsfigur, und für $k = 1$ ergibt sich, dass der Außenbereich doppelt so groß ist wie das innen liegende Sechseck.

(5) Da $\sin^2(22{,}5°) = \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$; $\sin^2(18°) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{1}{4} \cdot (2 - \Phi)$; $\sin^2(15°) = \frac{1}{4} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$ ergibt sich für $k = \frac{1}{\Phi}$:

$n = 8$: $A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2(22{,}5°) = 2 - \sqrt{2}$

$n = 10$: $A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2(18°) = 2 - \Phi$

$n = 12$: $A_{außen} = 4 \cdot k \cdot (1+k) \cdot \sin^2(15°) = 2 - \sqrt{3}$

zu A 9.32:

Für die (nicht beschriftete) Kathete x gilt: $x^2 = \Phi^2 - 1 = \Phi + 1 - 1 = \Phi$, also $x = \sqrt{\Phi}$. Die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks (und daher auch bei den weiteren Dreiecken der Folge) stehen im Verhältnis $\sqrt{\Phi}$: 1 : Φ (längere Kathete : kürzere Kathete : Hypotenuse).

Da die Hypotenuse der Ausgangsfigur zur längeren Kathete der anschließenden Figur wird, werden die Seiten von Schritt zu Schritt jeweils mit dem Faktor $\sqrt{\Phi}$ vergrößert.

Die drei Seiten des zweiten Dreiecks der Folge haben also die Seitenlängen Φ, $\sqrt{\Phi}$, $\Phi\sqrt{\Phi}$, die des dritten Dreiecks entsprechend $\Phi\sqrt{\Phi}$, Φ, Φ^2 usw.

Daher sind die gleich gefärbten Quadrate auch tatsächlich gleich groß.

zu A 9.33:

(a) Weitere Parkettierungen findet man beispielsweise aus der Zerlegung eines regelmäßigen 10-Ecks durch 36°- und 72°-Rauten, vgl. A 9.18. Diese Rauten setzen sich aus je zwei spitzwinkligen bzw. stumpfwinkligen goldenen Dreiecken zusammen.

(b) Das regelmäßige Zehnecke setzt sich aus je 10 spitzwinkligen und stumpfwinkligen goldenden Dreiecken zusammen. Die stumpfwinkligen Dreiecke sind jeweils Φ-mal so groß wie die spitzwinkligen; daher hat das regelmäßige 10-Eck einen Flächeninhalt wie 10·Φ + 10 = 10 · Φ² spitzwinklige goldene Dreiecke.

Für spitzwinklige goldene Dreiecke mit den Seitenlängen a (kurz) und b (lang) gilt: a : b = 1 : Φ.

Für b = 1 folgt hieraus: a = 1/Φ = Φ – 1 ≈ 0,618.

Der Flächeninhalt eines spitzwinkligen goldenen Dreiecks mit b = 1 berechnet sich dann wegen $(\Phi-1)^2 = \Phi^2 - 2\Phi + 1 = \Phi + 1 - 2\Phi + 1 = 2 - \Phi$ wie folgt:

$$A_{spitz} = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - \tfrac{a^2}{4}} = \tfrac{1}{2} \cdot (\Phi - 1) \cdot \sqrt{1 - \tfrac{2-\Phi}{4}} = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{(2-\Phi)(2+\Phi)} = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3-\Phi} \approx 0{,}294$$

alternative Berechnung: Für stumpfwinklige goldene Dreiecke mit den Seitenlängen b (kurz) und c (lang) gilt: b : c = 1 : Φ. Für b = 1 folgt hieraus: c = Φ ≈ 1,618.

Der Flächeninhalt eines stumpfwinkligen goldenen Dreiecks mit b = 1 berechnet sich dann

$$A_{stumpf} = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \sqrt{1 - \tfrac{\Phi^2}{4}} = \tfrac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \sqrt{1 - \tfrac{\Phi+1}{4}} = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{(\Phi+1)(3-\Phi)} = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{\Phi+2} \approx 0{,}4755$$

Für das Verhältnis der beiden Flächengrößen gilt: $\dfrac{\sqrt{\Phi+2}}{\sqrt{3-\Phi}} = \Phi$, denn

$$\frac{\Phi+2}{3-\Phi} = \Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi + 2 = (\Phi+1)(3-\Phi) \Leftrightarrow \Phi + 2 = 3\Phi - \Phi^2 + 3 - \Phi \Leftrightarrow \Phi + 2 = 3\Phi - \Phi - 1 + 3 - \Phi$$

zu 9.34:

Winkelgrößen: *dart*: 36°, 72°, 36°, 216°, *kite*: 72°, 72°, 144°, 72°

Seitenlängen: Wenn die beiden längeren Seiten die Länge 1 LE haben, dann haben die beiden kürzeren Seiten die Länge 1/Φ = Φ – 1. Wenn die beiden kürzeren Seiten die Länge 1 LE haben, dann haben die beiden längeren Seiten die Länge Φ.

zu 9.35:

Wenn die beiden kürzeren Seiten der blau gefärbten *kites* die Länge 1 LE haben, dann haben die beiden längeren Seiten die Länge Φ. Dann haben die kürzeren Seiten der grün gefärbten *darts* die Seitenlänge ½ LE und die längeren Seiten die Länge ½ · Φ.

Wendet man den Satz zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Dreiecks an, das durch einen Winkel und die beiden anliegenden Schenkel gegeben ist, dann gilt:

$$A_{kite} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \Phi \cdot \Phi \cdot \sin(36°) = \Phi^2 \cdot \sin(36°) \quad \text{und}$$

$$A_{dart} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{2}\Phi) \cdot \sin(36°) = \tfrac{1}{4}\Phi \cdot \sin(36°)$$

Hieraus ergibt sich für das Flächenverhältnis:

$$A_{kite} : A_{dart} = \Phi^2 : \tfrac{1}{4}\Phi = \Phi : \tfrac{1}{4} = 4\Phi : 1 \approx 6{,}47 : 1$$

zu A 9.36:

Wählt man als Länge der beiden kürzeren Seiten 1 LE, dann haben die beiden längeren Seiten die Länge Φ.

Wenn diese Seiten im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt werden, bedeutet dies:

- *dart*

Radius b des blauen Bogens (Mittelpunktswinkel 216°):

b : (1 – b) = (1 – b) : 1 ⇔ b = (1 – b)² ⇔ b = 1 – 2b + b² ⇔ b² – 3b + 1 = 0 ⇔

$b = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{5}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = 1 - \frac{1}{\Phi} \approx 0{,}382$ LE ; Bogenlänge: ca. 1,440 LE

Radius r des roten Bogens (Mittelpunktswinkel 72°):

r : (Φ – r) = (Φ – r) : Φ ⇔ (Φ – r)² = Φ · r ⇔ Φ² – 2Φr + r² = Φ· r ⇔ r² – 3Φr + Φ² = 0 ⇔

$b = \frac{1}{2} \cdot (3 - \sqrt{5}) \cdot \Phi = [1 - \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)] \cdot \Phi = \Phi - 1 \approx 0{,}618$ LE ; Bogenlänge: ca. 0,777 LE

- *kite*

Radius b des blauen Bogens (Mittelpunktswinkel 144°):

b : (1 – b) = 1 : b ⇔ b² = 1 – b ⇔ b² + b – 1 = 0 ⇔

$b = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{\Phi} \approx 0{,}618$ LE ; Bogenlänge: ca. 1,553 LE

Radius r des roten Bogens (Mittelpunktswinkel 72°):

r : (Φ – r) = Φ : r ⇔ (Φ – r) · Φ = r² ⇔ Φ² – Φr = r² ⇔ r² + Φr – Φ² = 0 ⇔

$r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot \Phi = 1$ LE ; Bogenlänge: ca. 1,257 LE

zu A 9.37

- Deflation 10-Eck: b = blau, g = grün

Rekursionsvorschrift: $b_{n+1} = 2 \cdot b_n + g_n$; $g_{n+1} = b_n + g_n$

n	0	1	2	3	4	5	6
b_n	10	20 + 0 = 20	40 + 10 = 50	100 + 30 = 130	260 + 80 = 340	680 + 210 = 890	…
g_n	0	10 + 0 = 10	20 + 10 = 30	50 + 30 = 80	130 + 80 = 210	340 + 210 = 550	…

Betrachtet man die Folgenglieder g_0, b_0, g_1, b_1, g_2, b_2, g_3, b_3, … so hat man genau das 10-Fache der Folge der FIBONACCI-Zahlen. Der Quotient b_n / g_n konvergiert gegen $\Phi \approx 1{,}618$.

- Deflation 10-zackige Sternfigur: b = blau, g = grün

Rekursionsvorschrift: $b_{n+1} = 2 \cdot b_n + g_n$; $g_{n+1} = b_n + g_n$

n	0	1	2	3	4	5	6
b_n	0	0 + 10 = 10	20 + 10 = 30	60 + 20 = 80	160 + 50 = 210	420 + 130 = 550	…
g_n	10	0 + 10 = 10	10 + 10 = 20	30 + 20 = 50	80 + 50 = 130	210 + 130 = 340	…

Betrachtet man die Folgenglieder g_1, b_1, g_2, b_2, g_3, b_3, … so hat man genau das 10-Fache der Folge der FIBONACCI-Zahlen. Der Quotient b_n / g_n konvergiert gegen $\Phi \approx 1{,}618$.

zu A 9.38:

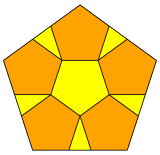
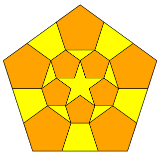
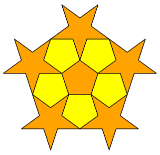
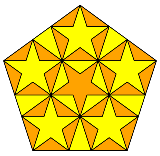
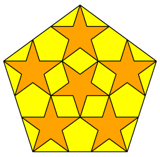
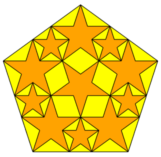
regelmäßiges Fünfeck mit Seitenlänge s: $A_{5Eck} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot s}{\tan(36°)} = \frac{5}{4 \cdot \tan(36°)} \cdot s^2 \approx 1{,}720 \cdot s^2$

regelmäßiger 5-zackiger Stern mit Seitenlänge s: $A_{5Stern} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin(36°) + \frac{5}{4 \cdot \tan(36°)} \cdot (\frac{s}{\Phi})^2 \approx 2{,}127 \cdot s^2$

Boot mit Seitenlänge s: $A_{Boot} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin(36°) + \frac{1}{2} \cdot (\Phi s) \cdot (\Phi s) \cdot \sin(36°) \approx 1{,}357 \cdot s^2$

Diamant mit Seitenlänge s: $A_{Diamant} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot s \cdot \sin(36°) \approx 0{,}588 \cdot s^2$

zu A 9.39:

	Einheit = Seitenlänge der regelmäßigen 5-Ecke orange: $5 \cdot 1{,}720 = 8{,}60$ gelb: $1{,}720 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(36°) \approx 3{,}189$ Verhältnis: 2,7 : 1
	Einheit = Seitenlänge der inneren regelmäßigen 5-Ecke orange: $5 \cdot 1{,}720 + 5 \cdot 1{,}720 \cdot \Phi^2 \approx 31{,}115$ gelb: $2{,}127 + 5 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi \cdot \sin(36°)) + 5 \cdot (\Phi \cdot \sin(72°) \cdot (1 + \Phi \cdot \cos(72°))) \approx 16{,}046$ Verhältnis: 1.94 : 1
	Einheit = Seitenlänge der 5-zackigen Sterne orange: $5 \cdot 2{,}127 + 1{,}720 = 12{,}355$ gelb: $5 \cdot 1{,}720 = 8{,}60$ Verhältnis: 1,44 : 1
	Einheit = Seitenlänge der regelmäßigen 5-Ecke orange: $5 \cdot (1{,}732 - 2{,}127/\Phi^2) + 2{,}127/\Phi^2 \approx 5{,}410$ gelb: $5 \cdot 2{,}127/\Phi^2 + (1{,}732 - 2{,}127/\Phi^2) + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(36°) \approx 6{,}451$ Verhältnis: 1 : 1,19
	Einheit = Seitenlänge der 5-zackigen Sterne orange: $6 \cdot 2{,}127 \approx 12{,}762$ gelb: $5 \cdot 1{,}720 + 10 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi \cdot \sin(36°)) + 5 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(72°)) \approx 15{,}733$ Verhältnis: 1 : 1,23
	Einheit = Seitenlänge der großen 5-zackigen Sterne orange: $6 \cdot 2{,}127 + 5 \cdot 2{,}127/\Phi^2 \approx 16{,}824$ gelb: $5 \cdot (\frac{1}{2} \cdot \sin(72°)) + 10 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \Phi \cdot \sin(36°)) + 5 \cdot (1{,}720 - 2{,}127/\Phi^2) \approx 11{,}671$ Verhältnis: 1,44 : 1