Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 8.1:

Im rechtwinkligen Dreieck *ABC* mit den Katheten *a* und *b* ist die Berechnung der Summe der kürzesten Verbindungen der Eckpunkte zum Fermat-Punkt besonders leicht möglich, da zusätzliche rechtwinklige Dreiecke ergänzt werden können (vgl. Abb. rechts). Gemäß dem Satz des Pythagoras gilt:

$$|AA'|^2 = \left(b + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = b^2 + \sqrt{3} \cdot ab + a^2 \quad \text{und} \quad |BB'|^2 = \left(a + \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}b\right)^2 = a^2 + \sqrt{3} \cdot ab + b^2$$

Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\alpha = 30°$, also $a = \frac{1}{2} \cdot c$ und $b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{3}$, ergibt sich nach Einsetzen für die Summe der kürzesten Verbindungen:

$$|AA'|^2 = \tfrac{3}{4} \cdot c^2 + \tfrac{3}{4} \cdot c^2 + \tfrac{1}{4} \cdot c^2, \text{ also } |AA'| = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{7} = a \cdot \sqrt{7}.$$

Im Falle eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\alpha = 45°$, vgl. Abb. links, also $a = b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{2}$, ergibt sich:

$$|AA'| = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot a = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} \cdot c.$$

Aus der Abb. kann man auch ablesen: $|CC'| = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot c = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot c$, woraus sich auch die Beziehung $1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ ergibt (was durch Quadrieren leicht zu überprüfen ist).

zu A 8.2:

(1) Der Kosinussatz enthält eine Beziehung zwischen einer Dreiecksseite und dem gegenüberliegenden Winkel sowie den beiden Seiten, zwischen den der Winkel liegt: Im Dreieck ABA' liegt der Seite AA' der Winkel β+60° gegenüber. Dieser Winkel liegt zwischen den Seiten $AB = c$ und $BA' = a$ (da Seite im gleichseitigen Dreieck *BA'C*).

Also: $|AA'|^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos(\beta + 60°)$.

Analog erhält man die übrigen Beziehungen.

(2) Beispielsweise ergibt sich mithilfe des Additionstheorems für den Kosinus:

$$\cos(\alpha + 60°) = \cos(\alpha) \cdot \cos(60°) - \sin(\alpha) \cdot \sin(60°) = \tfrac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\alpha).$$

Andererseits gilt bzgl. des Winkels α: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$, also $2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$.

Hieraus folgt dann

$$L^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha + 60°) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \cos(\alpha) - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)$$
$$= b^2 + c^2 - \tfrac{1}{2} \cdot (b^2 + c^2 - a^2) + bc \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha) = \tfrac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + bc \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha)$$

Analog ergeben sich die anderen Gleichungen.

zu A 8.3:

Beispielsweise bilden die Seiten *c*, *u*, *v* ein Dreieck, in dem der Seite *c* ein Winkel von 120° gegenüberliegt.

Gemäß Kosinussatz gilt dann (wegen cos(120°) = – ½)

$c^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos(120°) = u^2 + v^2 + uv$

Analog ergibt sich:

$a^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cdot \cos(120°) = v^2 + w^2 + vw$ und $b^2 = w^2 + u^2 - 2wu \cdot \cos(120°) = w^2 + u^2 + wu$.

Übrigens: Durch Umformung erhält man hieraus weiter

$u^2 + uv + (\frac{1}{2} \cdot v)^2 = (u + \frac{1}{2} \cdot v)^2 = c^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2$, d. h. $u = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2} - \frac{1}{2} \cdot v$ und

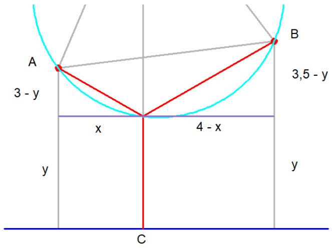
$w^2 + wv + (\frac{1}{2} \cdot v)^2 = (w + \frac{1}{2} \cdot v)^2 = a^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2$, d. h. $w = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2} - \frac{1}{2} \cdot v$

Aus der Kenntnis von L bei gegebenen Seiten *a*, *b*, *c* (und hieraus bestimmtem Winkel α, β oder γ) und wegen $L = u + v + w$ erhält man so eine Gleichung mit der Variablen *v*, die man etwa mithilfe eines CAS lösen kann: $L = u + v + w = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2} - \frac{1}{2} \cdot v + v + \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2} - \frac{1}{2} \cdot v$, also $L = \sqrt{c^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2} + \sqrt{a^2 - \frac{3}{4} \cdot v^2}$

Hiermit kann man dann die Werte von *u* und *w* berechnen.

zu A 8.4:

Zeichnet man eine Parallele zur Bundesstraße durch den Punkt F, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke mit jeweils einem Winkel von 30° am Punkt F.



Mit den Bezeichnungen der Grafik gilt: $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3-y}{x}$ und $\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3{,}5-y}{4-x}$, also

$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x = 3 - y$ und $\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (4 - x) = 3{,}5 - y$. Setzt man in die 2. Gleichung $y = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$ ein, dann ergibt sich

$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x = 3{,}5 - 3 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 - 0{,}5 \Leftrightarrow x \approx 1{,}567$ und hieraus $y \approx 2{,}095 = |CF|$.

Aus $3 - y \approx 0{,}905$ und $x \approx 1{,}567$ folgt mithilfe des Satzes von Pythagoras $|AF| \approx 1{,}809$.

Aus $3{,}5 - y \approx 1{,}405$ und $4 - x \approx 2{,}433$ folgt analog $|BF| \approx 2{,}809$.

zu A 8.5:

Um F zu bestimmen, kann man auch den Umkreis des gleichseitigen Dreiecks über der Strecke *AB* zeichnen. Dieser schneidet das Lot *EC* in *F*.

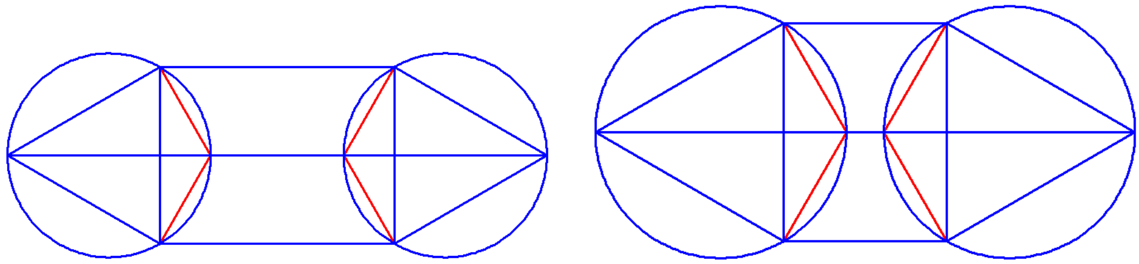
zu A 8.6:

Bezeichnet man mit *r* den Radius des Kreises, dann hat die Ringstraße die Länge $2\pi \cdot r \approx 6{,}28 \cdot r$. Die Entfernung zweier Orte auf der Ringstraße beträgt jeweils $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot r \approx 2{,}094 \cdot r$, ist also ca. 4,7 % länger als die Länge $2 \cdot r$ einer Verbindung über den Mittelpunkt der Insel. (Wenn eine direkte Verbindung zwischen den Orten gebaut würde, hätten diese Strecken jeweils die Länge $\sqrt{3} \cdot r \approx 1{,}732 \cdot r$, was deutlich kürzer wäre, aber wegen der Nähe zu der Uferstraße eine unangemessene Umweltbelastung darstellt, vgl. **A 8.7**.

zu A 8.7:

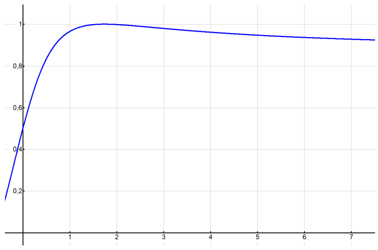
((eigene Recherchen))

zu A 8.8:



zu A 8.9:

Für $a = 1$ und $b = k \cdot a = k$ kann man die möglichen Verhältnisse der Länge des 2. Steiner-Netzes zum Diagonalennetz mithilfe der Funktion f mit $f(k) = \dfrac{\sqrt{3} \cdot k + 1}{2 \cdot \sqrt{1^2 + k^2}}$ im Intervall $1 \le k \le \sqrt{3}$ untersuchen:



Da der Graph in diesem Intervall streng monoton steigend ist, ist der Wert für $k = 1$ am kleinsten (also für ein Quadrat): $f(1) \approx 0{,}966$, also maximal ca. 3,4 % kürzer.

zu A 8.10:

$L_{Diagonalen} = 2 \cdot \sqrt{1^2 + 1{,}5^2} \approx 3{,}606$; $L_{Netz\,1} = \sqrt{3} \cdot 1 + 1{,}5 \approx 2{,}598$; $L_{Netz\,2} = \sqrt{3} \cdot 1{,}5 + 1 \approx 3{,}598$.

$\dfrac{L_{Netz\,1}}{L_{Diagonalen}} \approx \dfrac{2{,}598}{3{,}606} \approx 0{,}721$; $\dfrac{L_{Netz\,2}}{L_{Diagonalen}} \approx \dfrac{3{,}598}{3{,}606} \approx 0{,}998$

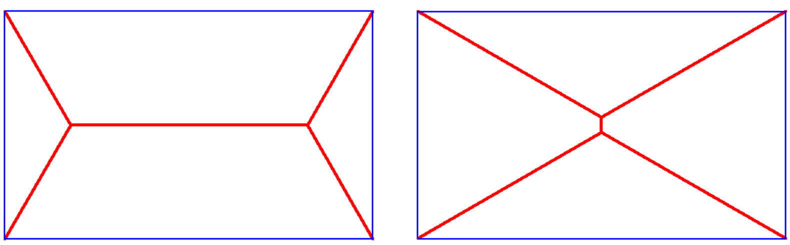
Das erste Steiner-Netz ist ca. 27,9 % kürzer als das Diagonalennetz, das zweite nur ca. 0,2 %.

zu A 8.11:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot a + k \cdot a}{2 \cdot \sqrt{a^2 + (k \cdot a)^2}} = 0{,}9 \iff \left(\sqrt{3} + k\right) \cdot a = 1{,}8 \cdot \sqrt{a^2 \cdot (1 + k^2)} \iff \left(\sqrt{3} + k\right)^2 \cdot a^2 = 3{,}24 \cdot a^2 \cdot \left(1 + k^2\right) \iff$$

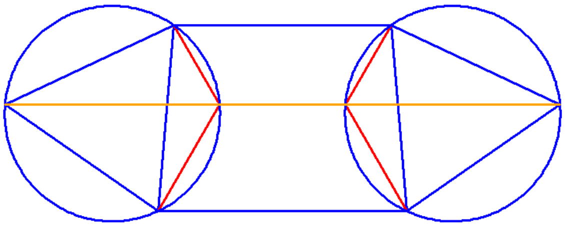
$$3 + 2k \cdot \sqrt{3} + k^2 = 3{,}24 + 3{,}24k^2 \iff k \approx 0{,}073 \quad \text{v} \quad k \approx 1{,}474$$

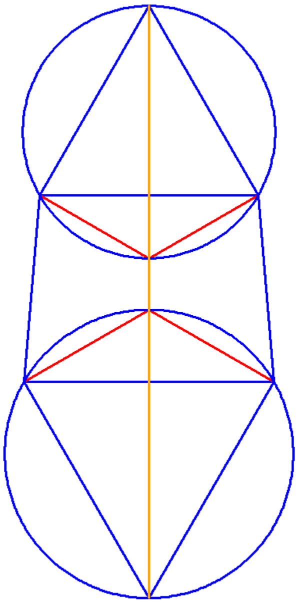
zu A 8.12:



Für $a = 1$ und $b = \Phi$ ergibt sich: $L_{Netz\,1} \approx 3{,}350$, $L_{Netz\,2} \approx 3{,}803$, $L_{Diagonalen} \approx 3{,}804$

zu A 8.13:





zu A 8.14:

Beim speziellen gleichschenkligen Trapez mit α = 60° ist $a - b = c$; dann liegen die zugehörigen Strecken des ersten Steiner-Netzes auf drei der Trapezseiten, also

$L_{\text{Netz}} = 2 \cdot c + b = 2 \cdot a - b$

Für α < 60° sind dies auch die Netze mit minimaler Gesamtlänge.

zu A 8.15:

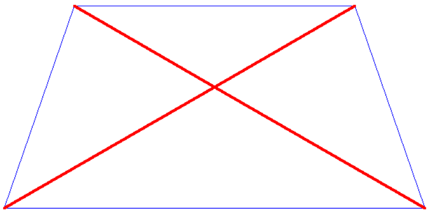
Das zweite Steiner-Netz kann nur gezeichnet werden, wenn $h \geq \frac{1}{2} \cdot (u + v)$, also wenn $h \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b)$.

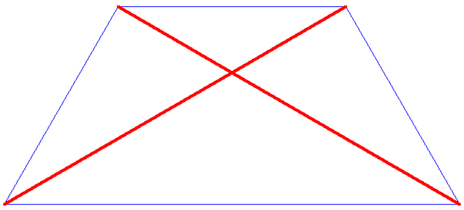
Im Falle $h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b)$, also $a^2 + b^2 - ab = 3c^2$, stimmt es mit dem Diagonalen-Netz überein.

Die beiden folgenden Trapeze erfüllen diese Bedingung:

Beispiel 1 (Abb. links): $a = 6$, $b = 4$, $c = \sqrt{\frac{28}{3}} \approx 3{,}055$

Beispiel 2 (Abb. rechts): $a = 6$, $b = c = 3$ (also α = 60°)

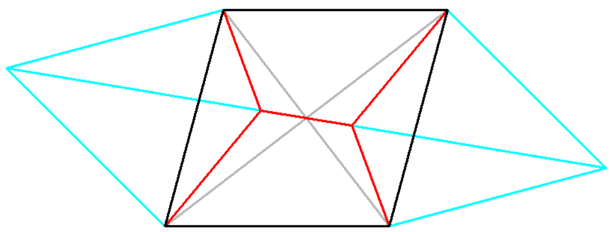


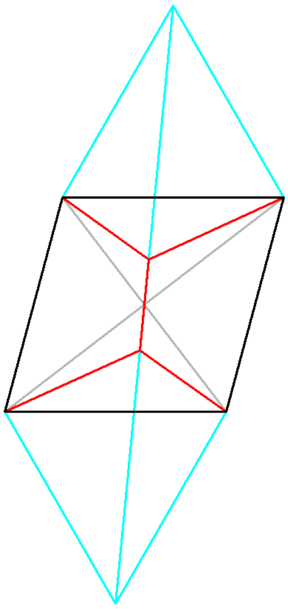


zu A 8.16:

Die beiden Abbildungen zeigen Steiner-Netze für eine Raute mit α = 75°. An den Abbildungen kann man ablesen, dass das alternativ mögliche Netz durch Drehung und Spiegelung der Figur erhalten werden kann.

Daher hat es dieselbe Länge.





zu A 8.17:

Für die rechtwinkligen Dreiecke gilt (vgl. **A 8.1**): Sind a und b die Katheten, dann gilt für die Summe L der minimalen Abstände: $L = \sqrt{a^2 + \sqrt{3} \cdot ab + b^2}$.

Bei den rechtwinkligen Dreiecken, die im Innern der Raute liegen, bilden jeweils die halben Diagonalen diese Katheten.

Die Länge der Diagonalen e und f hängt vom Winkel α ab:

und $f = 2a \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, also $\frac{e}{2} = a \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ und $\frac{f}{2} = a \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

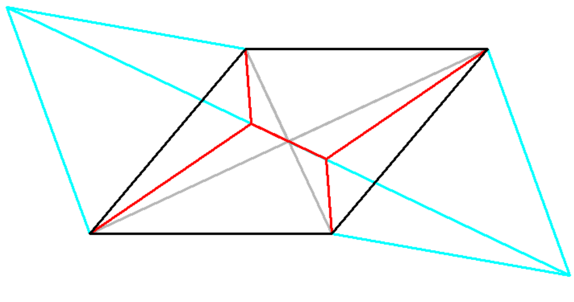
$$L_{Raute} = 2 \cdot L_{Dreieck} = 2 \cdot \sqrt{\left(a \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \sqrt{3} \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(a \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

$$= 2 \cdot a \cdot \sqrt{\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \sqrt{3} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

also: $L_{Raute} = 2 \cdot a \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\alpha)}$

Hierbei wurden verwendet: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$.

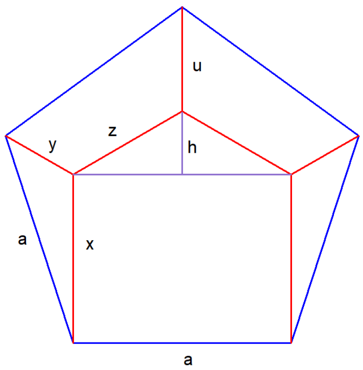
zu A 8.18:



zu A 8.19:

((eigene Aktivität))

zu A 8.20:



Wegen der 120°-Winkel ist das Dreieck mit den Seiten h, z und ½ · a ein halbes gleichseitiges Dreieck , sodass gilt:

$\frac{1}{2}a = h \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \sqrt{3}$, also $z = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Im stumpfwinkligen Dreieck (links und rechts) treten Winkel von 120° und 108° – 90° = 18° auf, sodass der dritte Winkel die Größe 42° hat.

Im Viereck oben (links und rechts) ergeben sich Winkel von 108° – 42° = 66° und 54° = ½ · 108°.

Die Länge der Seiten *x* und *y* kann mithilfe des Sinussatzes berechnet werden:

$x = \frac{a \cdot \sin(42°)}{\sin(120°)}$ und $y = \frac{a \cdot \sin(18°)}{\sin(120°)}$

zu A 8.21:

((eigene Aktivität))

zu A 8.22:

Die auftretenden Strecken sind Seiten von abgeschnittenen regelmäßigen Sechsecken. Ist *a* die Seite des gegebenen Sechsecks (blau) und werden die rot gezeichneten Strecken im Sechseck mit *s* bezeichnet, dann gilt der Zusammenhang:

$a = 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = s \cdot \sqrt{3}$