Heinz Klaus Strick: Mathematik ist wunderschön (2. Aufl.), Springer-Verlag, ISBN: 978-3-662-61681-9

Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 7.1:

Wenn a eine natürliche Zahl b teilt und b eine natürliche Zahl c teilt, dann teilt auch a die Zahl c.

Beispiel: 2 ist ein Teiler von 6 und 6 ist ein Teiler von 30, daher ist 2 auch ein Teiler von 30.

Beispielgebundene Begründung:

$a = 2$ ist ein Teiler von $b = 6$ bedeutet: Es gibt eine natürliche Zahl d, für die gilt $a \cdot d = b$, nämlich $d = \frac{b}{a} = \frac{6}{2} = 3$. $b = 6$ ist ein Teiler von $c = 30$ bedeutet: Es gibt eine natürliche Zahl e, für die gilt $b \cdot e = c$, nämlich $e = \frac{c}{b} = \frac{30}{6} = 5$.

$a = 2$ ist ein Teiler von $c = 30$ bedeutet: Es gibt eine natürliche Zahl f, für die gilt $a \cdot f = c$, nämlich das Produkt der beiden Zahlen d und e: $a \cdot (d \cdot e) = a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = c = 30$.

zu A 7.2:

Wenn man sich auf die drei Farben (Würfel) beschränkt, bleibt trotzdem: *grün* ➢ *orange* ➢ *gelb* ➢ *grün*.

zu A 7.3:

Da sich nur die Werte der größeren Augenzahlen verschoben haben, bleiben die Kombinationstafeln von der Farbenverteilung gleich: 0 → 0, 1 → 1, 2 → 2, 3 → 4, 4 → 6, 5 → 7, 6 → 8

orange: viermal Augenzahl 6 statt Augenzahl 4, zweimal Augenzahl 0 (unverändert)

gelb: sechsmal Augenzahl 4 statt sechsmal Augenzahl 3

grün: zweimal Augenzahl 8 statt Augenzahl 6, viermal Augenzahl 2 (unverändert)

blau: je dreimal Augenzahl 1 (unverändert) und dreimal Augenzahl 7 statt Augenzahl 5

zu A 7.4:

Efron-2: *orange*: (2, 3, 3, 9, 10, 11) ; *gelb*: (0, 1, 7, 8, 8, 8) ; *grün*: (5, 5, 6, 6, 6, 6) ; *blau*: (4, 4, 4, 4, 12, 12).

	0	1	7	8	8	8
2						
3						
3						
9						
10						
11						

	5	5	6	6	6	6
2						
3						
3						
9						
10						
11						

	4	4	4	4	12	12
2						
3						
3						
9						
10						
11						

	5	5	6	6	6	6
0						
1						
7						
8						
8						
8						

	4	4	4	4	12	12
0						
1						
7						
8						
8						
8						

	4	4	4	4	12	12
5						
5						
6						
6						
6						
6						

	orange	*gelb*	*grün*	*blau*
orange		24:12	18:18	12:22
gelb	12:24		22:12	20:16
grün	18:18	12:22		24:12
blau	22:12	16:20	12:24	

orange ➢ gelb ➢ grün ➢ blau ➢ orange

Efron-3: *orange*: (1, 2, 3, 9, 10, 11) ; *gelb*: (0, 1, 7, 8, 8, 9) ; *grün*: (5, 5, 6, 6, 7, 7) ; *blau*: (3, 4, 4, 5, 11, 12).

	0	**1**	**7**	**8**	**8**	**9**
1						
2						
3						
9						
10						
11						

	5	**5**	**6**	**6**	**7**	**7**
1						
2						
3						
9						
10						
11						

	3	**4**	**4**	**4**	**11**	**12**
1						
2						
3						
9						
10						
11						

	5	**5**	**6**	**6**	**7**	**7**
0						
1						
7						
8						
8						
9						

	3	**4**	**4**	**4**	**11**	**12**
0						
1						
7						
8						
8						
9						

	3	**4**	**4**	**4**	**11**	**12**
5						
5						
6						
6						
7						
7						

	orange	*gelb*	*grün*	*blau*
orange		22:12	18:18	12:24
gelb	12:22		24:12	20:16
grün	18:18	12:24		24:12
blau	24:12	16:20	12:24	

orange ➢ *gelb* ➢ *grün* ➢ *blau* ➢ *orange*

zu A 7.5:

A: (2, 6, 7) *B*: (1, 5, 9) *C*: (3, 4, 8)

(1) Vergleich von je zwei Glücksrädern:

	1	**5**	**9**
2			
6			
7			

	3	**4**	**8**
2			
6			
7			

	3	**4**	**8**
1			
5			
9			

gelb ➢ *rosa* ➢ *grün* ➢ *gelb*

(2) Spiel mit drei Teilnehmern:

	(1|3)	(1|4)	(1|8)	(5|3)	(5|4)	(5|8)	(9|3)	(9|4)	(9|8)
2									
6									
7									

$P(A)=\frac{8}{27}$; $P(B)=\frac{11}{27}$; $P(C)=\frac{8}{27}$.

Ein Spiel mit Glücksrad *B* (*gelb*) erweist sich als günstiger als mit den beiden anderen.

(3) Spiel, bei dem die Glücksräder zweimal gedreht werden:

	2	6	7
2	4	8	9
6	8	12	13
7	9	13	14

	1	5	9
1	2	6	10
5	6	10	14
9	10	14	18

	3	4	8
3	6	7	11
4	7	8	12
8	11	12	16

	2	6	6	10	10	10	14	14	18
4									
8									
8									
9									
9									
12									
13									
13									
14									

Beim Vergleich *zweimal grün* mit *zweimal gelb* ergibt sich: In 37 von 79 Fällen zeigt das zweifach gedrehte Glücksrad *A* (*grün*) die höhere Punktsumme, in 42 Fällen das Glücksrad *B* (*gelb*).

Bei den anderen Vergleichen kann es vorkommen (weiße Felder), dass sich gleiche Punktsummen ergeben; dann müssen die beiden Glücksräder erneut gedreht werden.

	6	7	7	8	11	11	12	12	16
4									
8									
8									
9									
9									
12									
13									
13									
14									

Beim Vergleich *zweimal grün* mit *zweimal rosa* ergibt sich: In 44 von 77 Fällen zeigt das zweifach gedrehte Glücksrad *A* (*grün*) die höhere Punktsumme, aber in 33 Fällen das Glücksrad *C* (*rosa*).

	6	7	7	8	11	11	12	12	16
2									
6									
6									
10									
10									
10									
14									
14									
18									

Beim Vergleich *zweimal gelb* mit *zweimal rosa* ergibt sich: In 37 von 77 Fällen zeigt das zweifach gedrehte Glücksrad *B* (*gelb*) die höhere Punktsumme, aber in 42 Fällen das Glücksrad *C* (*rosa*).

Wenn die Glücksräder zweimal gedreht werden, liegt Intransitivität vor.

zweimal gelb (B) ➢ *zweimal grün* (A) ➢ *zweimal rosa* (C) ➢ *zweimal gelb* (B)

zu A 7.6:

(1) 2-Personen-Spiele: *A* (*blau*) ➢ *B* (*gelb*) ➢ *C* (*grün*).

	2	4	6
3	1 · 0,56 = 0,56	1 · 0,22 = 0,22	1 · 0,22 = 0,22

A gewinnt gegen B mit Wahrscheinlichkeit 56 %.

	1	5
3	1 · 0,51 = 0,51	1 · 0,49 = 0,49

A gewinnt gegen C mit Wahrscheinlichkeit 51 %.

	2	4	6
1	0,51 · 0,56 = 0,2856	0,51 · 0,22 = 0,1122	0,51 · 0,22 = 0,1122
5	0,49 · 0,56 = 0,2744	0,49 · 0,22 = 0,1078	0,49 · 0,22 = 0,1078

B gewinnt gegen C mit Wahrscheinlichkeit 28,56 % + 2 · 11,22 % + 10,78 % = 61,78 %

(2) 3-Personen-Spiel:

	(3|2)	(3|4)	(3|6)
1	0,51 · 0,56 = 0,2856	0,51 · 0,22 = 0,1122	0,51 · 0,22 = 0,1122
5	0,49 · 0,56 = 0,2744	0,49 · 0,22 = 0,1078	0,49 · 0,22 = 0,1078

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 28,56 % gewinnt man mit A, mit einer Wahrscheinlichkeit von 33,22 % gewinnt man mit B, mit einer Wahrscheinlichkeit von 38,22 % gewinnt man mit C.

C (*grün*) ➢ *B* (*gelb*) ➢ *A* (*blau*).

(3) Variation der Flächenanteile auf den Glücksrädern *B* und C

Der Anteil des Sektors mit Augenzahl 4 bzw. 6 beim symmetrischen Glücksrad *B* werde mit *x* bezeichnet, der Anteil des Sektors mit Augenzahl 5 bei Glücksrad *C* mit *y*.

	2	4	6
3	1 – 2x	x	x

A (*blau*) gewinnt gegen *B* (*gelb*) bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit *x* ist kleiner als 25 %, d. h. $\boxed{x < 0{,}25}$.

	1	5
3	1 – y	y

A (*blau*) gewinnt gegen *C* (*grün*) bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit *y* ist kleiner als 50 %, d. h. $\boxed{y < 0{,}5}$

	2	4	6
1	$(1-2x)\cdot(1-y)$	$x\cdot(1-y)$	$x\cdot(1-y)$
5	$(1-2x)\cdot y$	$x\cdot y$	$x\cdot y$

B gewinnt gegen *C* bedeutet: Die Wahrscheinlichkeit, dass *C* gewinnt, ist kleiner als 50 %, d. h.

$$(1-2x)\cdot y + x\cdot y < 0{,}5 \Leftrightarrow y - 2xy + xy < 0{,}5 \Leftrightarrow y - xy < 0{,}5 \Leftrightarrow y\cdot(1-x) < 0{,}5 \Leftrightarrow \boxed{y < \frac{0{,}5}{1-x}}$$

	(3|2)	(3|4)	(3|6)
1	$(1-2x)\cdot(1-y)$	$x\cdot(1-y)$	$x\cdot(1-y)$
5	$(1-2x)\cdot y$	$x\cdot y$	$x\cdot y$

Für das 3-Personen-Spiel soll gelten: *C* (*grün*) ➢ *B* (*gelb*) ➢ *A* (*blau*), also

$$(1-2x)\cdot y + x\cdot y \;>\; 2\cdot x\cdot(1-y) + x\cdot y > \;(1-2x)\cdot(1-y)$$

Umformung des ersten Teils der Ungleichung :

$$(1-2x)\cdot y + x\cdot y \;>\; 2\cdot x\cdot(1-y) + x\cdot y \Leftrightarrow y - 2xy + xy > 2x - 2xy + xy \Leftrightarrow \boxed{y > 2x}$$

Umformung des zweiten Teils der Ungleichung :

$$2\cdot x\cdot(1-y) + x\cdot y > \;(1-2x)\cdot(1-y) \;\Leftrightarrow 2x - 2xy + xy > 1 - y - 2x + 2xy \Leftrightarrow y - 3xy > 1 - 4x$$

$$\Leftrightarrow\; y\cdot(1-3x) > 1 - 4x \;\Leftrightarrow \boxed{y > \frac{1-4x}{1-3x}}$$

Die Bedingung *C* ➢ *A* führt zu folgender Ungleichung:

$$(1-2x)\cdot y + x\cdot y \;> (1-2x)\cdot(1-y) \;\Leftrightarrow\; y - xy > 1 - y - 2x + 2xy \Leftrightarrow$$

$$2y - 3xy > 1 - 2x \;\;\Leftrightarrow y\cdot(2-3x) > 1 - 2x \Leftrightarrow \boxed{y > \frac{1-2x}{2-3x}}$$

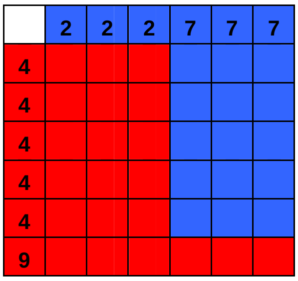
In der folgenden Abbildung sind die begrenzenden Graphen der Funktionen mit

y = 0,5 in Blau, y = 2x in Grün, $y = \frac{1-4x}{1-3x}$ in Rot, $y = \frac{0{,}5}{1-x}$ in Schwarz, $y > \frac{1-2x}{2-3x}$ in Pink sowie die Gerade mit x = 0,25 in Grau gezeichnet. Da die Bedingungen für x und y als Ungleichungen formuliert sind, bedeutet dies, dass nur Paare (*x* | *y*) infrage kommen, die innerhalb der orange gefärbten Fläche innerhalb des „Dreiecks" ABC liegen, wobei A(0,211|0,423), B(0,25|0,5), C(0,2|0,5).

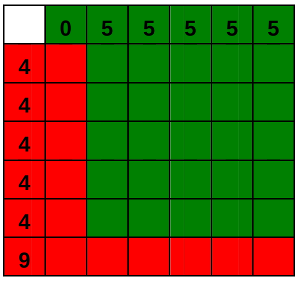
Das oben betrachtete Beispiel mit x = 0,22 und y = 0,49 liegt also innerhalb dieses Dreiecks.

zu A 7.7:

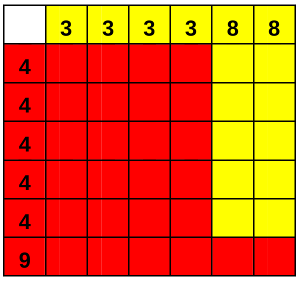
(1)(2) Insgesamt müssen 10 Kombinationstabellen untersucht werden: In der 5-Eck-Grafik sind dies 5 Seiten und 5 Diagonalen. Im Einzelnen sind dies:



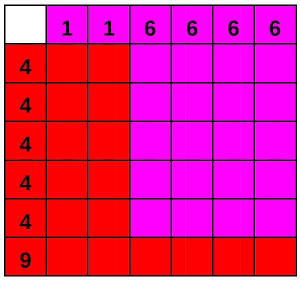
R : *B* = 21 : 15



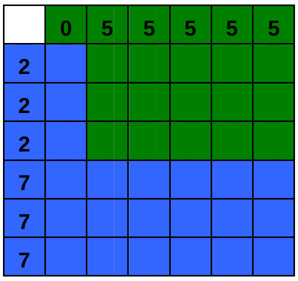
R : *O* = 11 : 25



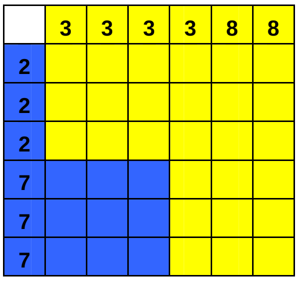
R : *Y* = 26 : 10



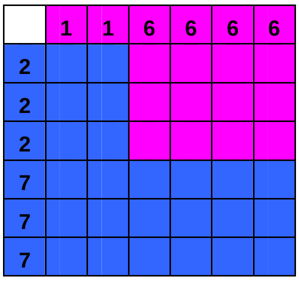
R : *M* = 16 : 20



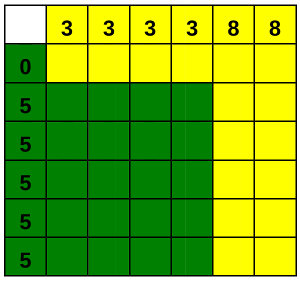
B : *O* = 21 : 15



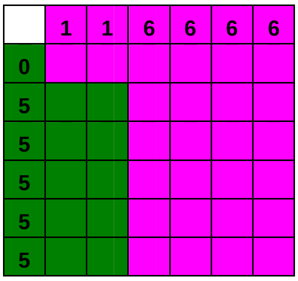
B : *Y* = 27 : 9



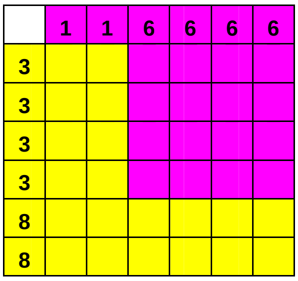
B : *M* = 24 : 12



G : *Y* = 20 : 16



O : *M* = 10 : 26



Y : *M* = 20 :16

- *Blue* ➢ *Magenta* (24:12), *Magenta* ➢ *Olive* (26:10), *Olive* ➢ *Red* (25:11), *Red* ➢ *Yellow* (26:10) und *Yellow* ➢ *Blue* (27:9)
- *Red* ➢ *Blue* (21:15), *Blue* ➢ *Olive* (21:15), *Olive* ➢ *Yellow* (20:16), *Yellow* ➢ *Magenta* (20:16) und *Magenta* ➢ *Red* (20:16)

(3) *Red* ➢ *Blue* (21:15), *Blue* ➢ *Olive* (21:15), *Olive* ➢ *Red* (25:11)

Mögliche Augensummen:

	4	4	4	4	4	9
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
4	8	8	8	8	8	13
9	13	13	13	13	13	18

	2	2	2	7	7	7
2	4	4	4	9	9	9
2	4	4	4	9	9	9
2	4	4	4	9	9	9
7	9	9	9	14	14	14
7	9	9	9	14	14	14
7	9	9	9	14	14	14

	0	5	5	5	5	5
0	0	5	5	5	5	5
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10
5	5	10	10	10	10	10

P(*Augensumme* 8) = 25/36

P(*Augensumme* 13) = 11/36

P(*Augensumme* 4) = ¼

P(*Augensumme* 9) = ½

P(*Augensumme* 14) = ¼

P(*Augensumme* 0) = 1/36

P(*Augensumme* 5) = 10/36

P(*Augensumme* 10) = 25/36

	4	9	14
8	$\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{144}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{2}{4}=\frac{50}{144}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{144}$
13	$\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{144}$	$\frac{11}{36}\cdot\frac{2}{4}=\frac{22}{144}$	$\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{144}$

*R*² : *B*² = 58 : 86

	0	5	10
8	$\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{36}=\frac{25}{1296}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{10}{36}=\frac{250}{1296}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{25}{36}=\frac{625}{1296}$
13	$\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{36}=\frac{11}{1296}$	$\frac{11}{36}\cdot\frac{10}{36}=\frac{110}{1296}$	$\frac{11}{36}\cdot\frac{25}{36}=\frac{275}{1296}$

*R*² : *O*² = 671 : 625

	0	5	10
4	$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{144}$	$\frac{10}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{144}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{144}$
9	$\frac{1}{36}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{144}$	$\frac{10}{36}\cdot\frac{2}{4}=\frac{20}{144}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{2}{4}=\frac{50}{144}$
14	$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{144}$	$\frac{10}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{144}$	$\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{144}$

*B*² : *O*² = 59 : 85

- 2x *Blue* ➢ 2x *Red* ➢ 2x *Olive* ➢ 2x *Blue*

(4) Folgende Kombinationen sind möglich:

	$(2 \mid 0)$	$(2 \mid 5)$	$(7 \mid 0)$	$(7 \mid 5)$
4	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{72}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{72}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{72}$
9	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{72}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{72}$

3-Personen-Spiel: *Red* : *Olive* : *Blue* = 17 : 25 : 30

zu A 7.8:

- G1: (2,14,17) ist günstiger als G2: (7,10,16), G3: (5,13,15) und G5: (1,12,20) (Chancen jeweils 5:4)

	7	10	16
2			
14			
17			

	5	13	15
2			
14			
17			

	1	12	20
2			
14			
17			

zu A 7.9:

(1) MiWin-1: *olive* (*A*) ➢ *türkis* (*B*) ➢ *gold* (*C*) ➢ *olive* (*A*)

	1	3	4	5	8	9
1						
2						
5						
6						
7						
9						

17 : 16 : 3

	2	3	4	6	7	8
1						
2						
5						
6						
7						
9						

16 : 17 : 3

	2	3	4	6	7	8
1						
3						
4						
5						
8						
9						

17 : 16 : 3

(1) MiWin-2: *türkis* (*E*) ➢ *olive* (*D*) ➢ *gold* (*F*) ➢ *türkis* (*E*)

	1	2	4	6	8	9
1						
3						
5						
6						
7						
8						

16 : 17 : 3

	2	3	4	5	7	9
1						
3						
5						
6						
7						
8						

17 : 16 : 3

	2	3	4	5	7	9
1						
2						
4						
6						
8						
9						

16 : 17 : 3

zu A 7.10:

	2	6	6	6
1				
4				
7				
7				

grün : *rot* = 9 : 7

	3	5	5	8
1				
4				
7				
7				

grün : *blau* = 7 : 9

	3	5	5	8
2				
6				
6				
6				

rot : *blau* = 9 : 7

also: *blau* ➢ *grün* ➢ *rot* ➢ *blau*

zu A 7.11:

(a) A: (1, 5, 8, 8), B: (2, 2, 9, 9), C: (3, 3, 6, 10), D: (4, 4, 7, 7)

	2	2	9	9
1				
5				
8				
8				

A : B = 6 : 10

	3	3	6	10
1				
5				
8				
8				

A : C = 8 : 8

	4	4	7	7
1				
5				
8				
8				

A : D = 6 : 10

	3	3	6	10
2				
2				
9				
9				

B : C = 6 : 10

	4	4	7	7
2				
2				
9				
9				

B : D = 8 : 8

	4	4	7	7
3				
3				
6				
10				

C : D = 6 : 10

Intransitivitätskette: D ➢ C ➢ B ➢ A ➢ D

Ordnet man die vier Tetraeder in Form eines Quadrats A, B, C, D an, dann gilt die „➢"-Eigenschaft im Gegenuhrzeigersinn; die jeweils diagonal einander gegenüberliegenden sind jeweils gleich stark.

Alternative Beschriftung: A (1, 8, 12, 13), B: (2, 3, 14, 15), C: (4, 5, 9, 16), D: (6, 7, 10, 11)

(b) A: (1, 1, 7, 9, 9, 12), B: (2, 2, 2, 10, 10, 13), C: (3, 3, 3, 5, 11, 11), D: (4, 4, 6, 6, 8, 8)

	2	2	2	10	10	13
1						
1						
7						
9						
9						
12						

A : B = 14 : 22

	3	3	3	5	11	11
1						
1						
7						
9						
9						
12						

A : C = 18 : 18

	4	4	6	6	8	8
1						
1						
7						
9						
9						
12						

A : D = 22 : 14

	3	3	3	5	11	11
2						
2						
2						
10						
10						
13						

B : C = 14 : 22

	4	4	6	6	8	8
2						
2						
2						
10						
10						
13						

B : D = 18 : 18

	4	4	6	6	8	8
3						
3						
3						
5						
11						
11						

C : D = 14 : 22

Intransitivitätskette: D ➢ C ➢ B ➢ A ➢ D

Ordnet man die vier Tetraeder in Form eines Quadrats A, B, C, D an, dann gilt die „➢"-Eigenschaft im Gegenuhrzeigersinn; die jeweils diagonal einander gegenüberliegenden sind jeweils gleich stark.

(c) A: (1, 6, 14, 17, 18, 19), B: (2, 3, 7, 20, 21, 22), C: (4, 5, 8, 11, 23, 24), D: (9, 10, 12, 13, 15, 16).

	2	3	7	20	21	22
1						
6						
14						
17						
18						
19						

A : B = 14 : 22

	4	5	8	11	23	24
1						
6						
14						
17						
18						
19						

A : C = 18 : 18

	9	10	12	13	15	16
1						
6						
14						
17						
18						
19						

A : D = 22 : 14

	4	5	8	11	23	24
2						
3						
7						
20						
21						
22						

B : C = 14 : 22

	9	10	12	13	15	16
2						
3						
7						
20						
21						
22						

B : D = 18 : 18

	9	10	12	13	15	16
4						
5						
8						
11						
23						
24						

C : D = 14 : 22

Intransitivitätskette und Tabelle wie in (b)

zu A 7.12:

(1a) Ein Spiel, das beispielsweise zugunsten *WW* endet, kann wie folgt verlaufen:

– *WW* oder *WZ.WW* oder *WZ.WZ.WW* oder *WZ.WZ.WZ.WW* oder …

– *Z.WW* oder *Z.WZ.WW* oder *Z.WZ.WZ.WW* oder …

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, der auf *WW* setzt, ergibt sich hieraus als unendliche Summe:

$$P(WW\ gewinnt)$$
$$= [P(WW) + P(WZ.WW) + P(WZ.WZ.WW) + ...] + [P(Z.WW) + P(Z.WZ.WW) + P(Z.WZ.WZ.WW) + ...]$$
$$= \left[\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + ...\right] + \left[\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{128} + ...\right] = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Dies ist plausibel, da das Übergangsdiagramm symmetrisch bzgl. der beiden Zielzustände aufgebaut ist.

(1b) Ein Spiel, das beispielsweise zugunsten *WW* endet, kann wie folgt verlaufen:

– *WW* oder

– *Z.WW* oder *Z.Z.WW* oder *Z.Z.Z.WW* oder …

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, der auf *WW* setzt, ergibt sich hieraus als unendliche Summe:

$$P(WW\ gewinnt) = P(WW) + [P(Z.WW) + P(Z.Z.WW) + P(Z.Z.Z.WW) + ...]$$
$$= \tfrac{1}{4} + \left[\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + ...\right] = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{1} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Das Diagramm erscheint nicht symmetrisch, daher eine **Kontrollrechnung**:

Ein Spiel, das beispielsweise zugunsten *WZ* endet, kann wie folgt verlaufen:

– *WZ* oder

– *Z.WZ* oder *Z.Z.WZ* oder *Z.Z.Z.WZ* oder …

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, der auf *WZ* setzt, ergibt sich hieraus als unendliche Summe:

$$P(WZ\ gewinnt) = P(WZ) + [P(Z.WZ) + P(Z.Z.WZ) + P(Z.Z.Z.WZ) + ...]$$
$$= \tfrac{1}{4} + \left[\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + ...\right] = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{1} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}$$

Analyse: Wenn zum ersten Mal *W* fällt, ist das Spiel nach dem nächsten Wurf beendet – egal, was fällt.

(1c) Ein Spiel, das beispielsweise zugunsten *WZ* endet, kann wie folgt verlaufen:

– *WZ* oder *W.WZ* oder W.*W.WZ* oder *W.W.W.WW* oder …

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler gewinnt, der auf *WZ* setzt, ergibt sich hieraus als unendliche Summe:

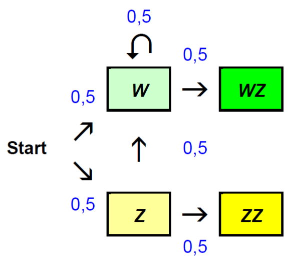
$$P(WZ\ gewinnt) = P(WZ) + P(W.WZ) + P(W.W.WZ) + ... = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + ... = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{1} = \tfrac{1}{2}$$

Dies ist plausibel, da das Übergangsdiagramm symmetrisch bzgl. der beiden Zielzustände aufgebaut ist.

(2) Insgesamt sind 3 + 2 + 1 = 6 Wetten möglich:

WW gegen WZ (1b), WW gegen ZW (Text), WW gegen ZZ (1a), WZ gegen ZW (1c),

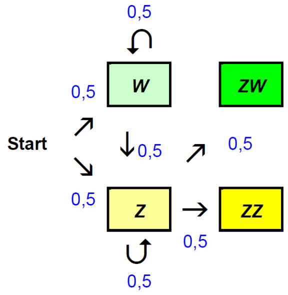
WZ gegen ZZ:



$P(ZZ\ gewinnt)=\frac{1}{4}$; $P(WZ\ gewinnt)=1-P(ZZ\ gewinnt)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ oder

$$P(WZ\ gewinnt)=[P(Z.WZ)+P(Z.W.WZ)+P(Z.W.W.WZ)+...]+[P(WZ)+P(W.WZ)+P(W.W.WZ)+...]$$
$$=\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+...\right]+\left[\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+...\right]=\tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{4}$$

ZW gegen ZZ:



Die Lösung des Problems mithilfe von unendlichen Summen ist wegen der Schleifen beim Zustand *W* und beim Zustand *Z* ziemlich kompliziert. Aber: Da alle Wege zu *ZW* und zu *ZZ* verlaufen im vorletzten Schritt über den Zustand *Z*; daher kommt beiden Endzuständen die gleiche Wahrscheinlichkeit zu.

zu A 7.13:

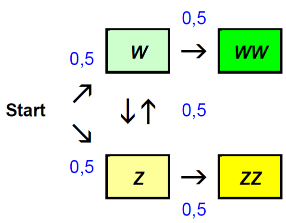
	Start	*W*	*Z*	*WZ*	*ZZ*	kumuliert *WZ*	kumuliert *ZZ*	Anteil *WZ*	Anteil *ZZ*
n	1024								
1		512	512	0	0	0	0	0	0
2		512		256	256	256	256	0,250	0,250
3		256		256		512		0,250	0,500
4		128		128		640		0,250	0,625
5		64		64		704		0,250	0,6875
6		32		32		736		0,250	0,7187...
7		16		16		752		0,250	0,7343...
8		8		8		760		0,250	0,7421...
9		4		4		764		0,250	0,7460...
10		2		2		766		0,250	0,7480...
11		1		1		767		0,250	0,7490...

zu A 7.14:

(1) Analog zu **A 2.9** werden die Brüche auf

$$m=\tfrac{1}{2}\cdot2+\tfrac{1}{4}\cdot3+\tfrac{1}{8}\cdot4+\tfrac{1}{16}\cdot5+...$$
$$=2\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+...\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}...\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{32}+...\right)+\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+...\right)+...$$
$$=2\cdot1+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{16}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+...=2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+...=1+\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+...\right)=1+2=3$$

(2) Um die mittlere Spieldauer *m* für das *WW*-*ZZ*-Spiel zu bestimmen, wird erst einmal der Wahrscheinlichkeitsabakus betrachtet:

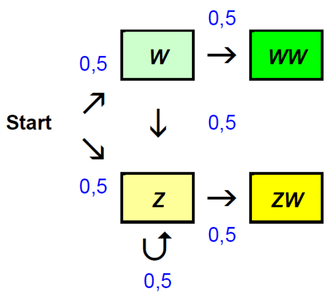


	Start	*W*	*Z*	*WW*	*ZZ*	kumuliert *WW*	kumuliert *ZZ*	Anteil *WW*	Anteil *ZZ*	beendete Spiele	Zuwachs
n	1024										
1		512	512	0	0	0	0	0	0		
2		256	256	256	256	256	256	0,250	0,250	0,500	0,500
3		128	128	128	128	384	384	0,375	0,375	0,750	0,250
4		64	64	64	64	448	448	0,4375	0,4375	0,875	0,125
5		32	32	32	32	480	480	0,4687…	0,4687…	0,9375	0,0625
6		16	16	16	16	496	496	0,4843…	0,4843…	…	…
7		8	8	8	8	504	504	0,4921…	0,4921…		
8		4	4	4	4	508	508	0,4960…	0,4960…		
9		2	2	2	2	510	510	0,4980…	0,4980…		
10		1	1	1	1	511	511	0,4990…	0,4990…		

Aus der ergänzten Tabelle des Abakus kann man entnehmen, dass gilt:

$m = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 5 + ... = 3$

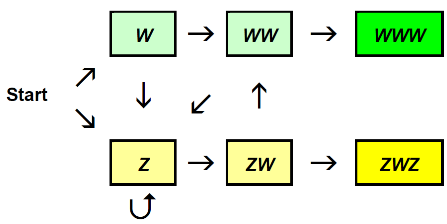
Für das *WW*-*WZ*-Wettspiel ergibt sich analog:



	Start	*W*	*Z*	*WW*	*ZW*	kumuliert *WW*	kumuliert *ZW*	Anteil *WW*	Anteil *ZW*	beendete Spiele	Zuwachs
n	1024										
1		512	512	0	0	0	0	0	0		
2			512	256	256	256	256	0,250	0,250	0,500	0,500
3			256	0	256	256	512	0,250	0,500	0,750	0,250
4			128	0	128	256	640	0,250	0,625	0,875	0,125
5			64	0	64	256	704	0,250	0,6875	0,9375	0,0625
6			32	0	32	256	736	0,250	0,7187...	...	...
7			16	0	16	256	752	0,250	0,7343...		
8			8	0	8	256	760	0,250	0,7421...		
9			4	0	4	256	764	0,250	0,7460...		
10			2	0	2	256	766	0,250	0,7480...		
11			1	0	1	256	767	0,250	0,7490...		

Hier folgt ebenfalls: $m = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 5 + ... = 3$

zu A 7.15:



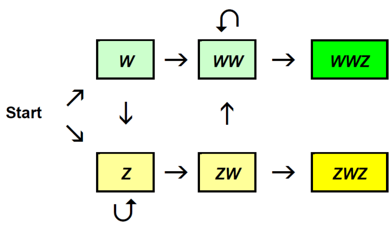
Im Folgenden ist der Wahrscheinlichkeitsabakus für 4096 Spiele abgedruckt.

Nach 12 Spielrunden sind nur ca. 95 % der Spiele beendet. Man kann zeigen, dass der Anteil der Spiele, die im Zustand WWW enden, 5/12 (≈ 0,417) beträgt, und dass ein Spiel im Mittel 35/6 ≈ 5,8 Runden dauert.

	Start	*W*	*Z*	*WW*	*ZW*	*WWW*	*ZWZ*	Anteil *WWW*	Anteil *ZWZ*	beendete Spiele	Zuwachs	Produkt	kumuliert
n	4096	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000				
1	0	2048	2048	0	0	0	0	0,0000	0,0000				
2	0	0	2048	1024	1024	0	0	0,0000	0,0000	0,0000			
3	0	0	1536	512	1024	512	512	0,1250	0,1250	0,2500	0,2500	0,750000	0,750000
4	0	0	1024	512	768	768	1024	0,1875	0,2500	0,4375	0,1875	0,750000	1,500000
5	0	0	768	384	512	1024	1408	0,2500	0,3438	0,5938	0,1563	0,781250	2,281250
6	0	0	576	256	384	1216	1664	0,2969	0,4063	0,7031	0,1094	0,656250	2,937500
7	0	0	416	192	288	1344	1856	0,3281	0,4531	0,7813	0,0781	0,546875	3,484375
8	0	0	304	144	208	1440	2000	0,3516	0,4883	0,8398	0,0586	0,468750	3,953125
9	0	0	224	104	152	1512	2104	0,3691	0,5137	0,8828	0,0430	0,386719	4,339844
10	0	0	164	76	112	1564	2180	0,3818	0,5322	0,9141	0,0313	0,312500	4,652344
11	0	0	120	56	82	1602	2236	0,3911	0,5459	0,9370	0,0229	0,252441	4,904785
12	0	0	88	41	60	1630	2277	0,3979	0,5559	0,9539	0,0168	0,202148	5,106934

zu A 7.16:

(1) Beispiel: Vergleich der Gewinnchancen *WWZ* gegen *ZWZ*:



Die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand *WWZ* zum Zustand *WWZ* zu gelangen, ist 1, vom Zustand *ZWZ* zu Zustand *WWZ* zu gelangen, ist 0. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand *WW* zum Zustand *WWZ* zu gelangen, mit *s*, vom Zustand *W* zum Zustand *WWZ* zu gelangen, mit *t*, vom Zustand *Z* zum Zustand *WWZ* zu gelangen, mit *u*, vom Zustand *ZW* zum Zustand *WWZ* zu gelangen, mit v, dann ergibt sich aus dem Übergangsdiagramm und den o. a. Bezeichnungen ein Gleichungssystem:

– Der Übergang vom Zustand *WW* zum Zustand *WW* zurück und zum Zustand *WWZ* erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, also gilt $s = \frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 1$, also $s = 1$.

– Der Übergang vom Zustand *W* zum Zustand *WW* und zum Zustand *Z* erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit , also gilt $t = \frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot u$.

– Der Übergang vom Zustand *Z* zum Zustand *ZW* und zum Zustand *Z* zurück erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, also gilt $u = \frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot u$, d. h., es gilt $\frac{1}{2} \cdot u = \frac{1}{2} \cdot v$, also $u = v$.

– Der Übergang vom Zustand *ZW* zum Zustand *WW* und zum Zustand *ZWZ* erfolgt mit gleicher Wahrscheinlichkeit, also gilt $v = \frac{1}{2} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}$.

Wegen $u = v$ und $v = \frac{1}{2}$ folgt $u = \frac{1}{2}$ und weiter $t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot u = \frac{3}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit *p*, vom *Start* zum Zustand *WWW* zu gelangen, beträgt $p = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot u$, also $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, vom *Start* zum Zustand *ZWZ* zu gelangen, gleich $q = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.

(2) Mit $n = 2^{10}$ ergibt sich:

	Start	*W*	*Z*	*WW*	*ZW*	*WWZ*	*ZWZ*	Anteil *WWZ*	Anteil *ZWZ*
n	1048576	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000
1	0	524288	524288	0	0	0	0	0,0000	0,0000
2	0	0	524288	262144	262144	0	0	0,0000	0,0000
3	0	0	262144	262144	262144	131072	131072	0,1250	0,1250
4	0	0	131072	262144	131072	262144	262144	0,2500	0,2500
5	0	0	65536	196608	65536	393216	327680	0,3750	0,3125
6	0	0	32768	131072	32768	491520	360448	0,4688	0,3438
7	0	0	16384	81920	16384	557056	376832	0,5313	0,3594
8	0	0	8192	49152	8192	598016	385024	0,5703	0,3672
9	0	0	4096	28672	4096	622592	389120	0,5938	0,3711
10	0	0	2048	16384	2048	636928	391168	0,6074	0,3730
11	0	0	1024	9216	1024	645120	392192	0,6152	0,3740
12	0	0	512	5120	512	649728	392704	0,6196	0,3745
13	0	0	256	2816	256	652288	392960	0,6221	0,3748
14	0	0	128	1536	128	653696	393088	0,6234	0,3749
15	0	0	64	832	64	654464	393152	0,6241	0,3749
16	0	0	32	448	32	654880	393184	0,6245	0,3750
17	0	0	16	240	16	655104	393200	0,6248	0,3750
18	0	0	8	128	8	655224	393208	0,6249	0,3750
19	0	0	4	68	4	655288	393212	0,6249	0,3750
20	0	0	2	36	2	655322	393214	0,6250	0,3750
21	0	0	1	19	1	655340	393215	0,6250	0,3750

zu A 7.17:

In der folgenden Tabelle sind in den ersten beiden Spalten alle möglichen Kombinationen für die Spieler 1 und 2 aufgeführt; in der dritten Spalte ist die Strategie für Spieler 3 angegeben, die am günstigsten erscheint, wenn bei einem Dreierspiel die Einzelchancen gegenüber Spieler 1 und 2 gelten:

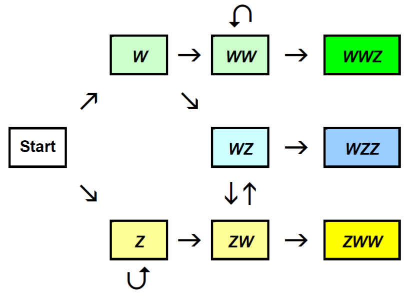
Sp. 1	Sp. 2	Sp. 3	Ch. 1	Ch. 2
WWW	*WWZ*	*ZWW*	7:1	3:1
WWW	*WZW*	*ZZW*	7:3	5:3
WWW	*WZZ*	*WWZ*	1:1	2:1
WWW	*ZWW*	*ZZW*	7:3	2:1
WWW	*ZWZ*	*ZZW*	7:3	2:1
WWW	*ZZW*	*WZZ*	3:2	3:1
WWW	*ZZZ*	*WZZ* *ZWW*	3:2 7:1	7:1 3:2
WWZ	*WZW*	*ZWW*	3:1	1:1
WWZ	*WZZ*	*ZWW*	3:1	1:1
WWZ	*ZWW*	*ZZW*	1:1	2:1
WWZ	*ZWZ*	*ZWW*	3:1	1:1
WWZ	*ZZW*	*WZZ* *ZWW*	1:2 3:1	3:1 1:2
WWZ	*ZZZ*	*ZWW*	3:1	3:2
WZW	*WZZ*	*WWZ*	2:1	2:1

Sp. 1	Sp. 2	Sp. 3	Ch. 1	Ch. 2
WZW	*ZWW*	*ZZW*	5:3	2:1
WZW	*ZWZ*	*WWZ*	2:1	5:3
WZW	*ZZW*	*WZZ*	1:1	3:1
WZW	*ZZZ*	*WWZ*	2:1	7:3
WZZ	*ZWW*	*WZW* *ZWZ*	1:1	1:1
WZZ	*ZWZ*	*WWZ*	2:1	5:3
WZZ	*ZZW*	*WWZ*	2:1	1:1
WZZ	*ZZZ*	*WWZ*	2:1	7:3
ZWW	*ZWZ*	*ZZW*	2:1	2:1
ZWW	*ZZW*	*WZZ*	1:1	3:1
ZWW	*ZZZ*	*WZZ*	1:1	7:1
ZWZ	*ZZW*	*WZZ*	1:1	3:1
ZWZ	*ZZZ*	*WWZ*	5:3	7:3
ZZW	*ZZZ*	*WZZ*	3:1	7:1

Bei diesen Überlegungen wird die Transitivität hinsichtlich der Chancen angenommen. Ob diese tatsächlich gilt, muss jedoch überprüft werden.

Wenn Spieler 1 beispielsweise auf *WZZ* setzt, weil hier die nur in einem Fall Spieler 2 im Vorteil ist (dieser entscheidet sich für *WWZ,* die Chancen stehen 1:2 zu seinen Gunsten). Nach der Tabelle würde sich Spieler 3 dann für ZZW entscheiden (die Kombination ist in der Tabelle orange gefärbt).

Das Übergangsdiagramm sieht dann wie folgt aus:

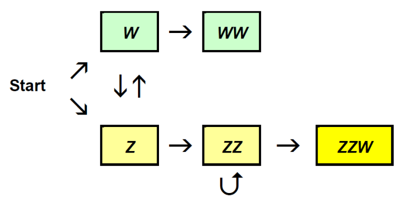


	Start	*W*	*Z*	*WW*	*WZ*	*ZW*	*WWZ*	*WZZ*	*ZWW*	Anteil *WWZ*	Anteil *WZZ*	Anteil *ZWW*
n	1048576	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000
1	0	524288	524288	0	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000
2	0	0	262144	262144	262144	262144	0	0	0	0,0000	0,0000	0,0000
3	0	0	131072	131072	131072	262144	131072	131072	131072	0,1250	0,1250	0,1250
4	0	0	65536	65536	131072	131072	196608	196608	262144	0,1875	0,1875	0,2500
5	0	0	32768	32768	65536	98304	229376	262144	327680	0,2188	0,2500	0,3125
6	0	0	16384	16384	49152	49152	245760	294912	376832	0,2344	0,2813	0,3594
7	0	0	8192	8192	24576	32768	253952	319488	401408	0,2422	0,3047	0,3828
8	0	0	4096	4096	16384	16384	258048	331776	417792	0,2461	0,3164	0,3984
9	0	0	2048	2048	8192	10240	260096	339968	425984	0,2480	0,3242	0,4063
10	0	0	1024	1024	5120	5120	261120	344064	431104	0,2490	0,3281	0,4111
11	0	0	512	512	2560	3072	261632	346624	433664	0,2495	0,3306	0,4136
12	0	0	256	256	1536	1536	261888	347904	435200	0,2498	0,3318	0,4150
13	0	0	128	128	768	896	262016	348672	435968	0,2499	0,3325	0,4158
14	0	0	64	64	448	448	262080	349056	436416	0,2499	0,3329	0,4162
15	0	0	32	32	224	256	262112	349280	436640	0,2500	0,3331	0,4164
16	0	0	16	16	128	128	262128	349392	436768	0,2500	0,3332	0,4165
17	0	0	8	8	64	72	262136	349456	436832	0,2500	0,3333	0,4166
18	0	0	4	4	36	36	262140	349488	436868	0,2500	0,3333	0,4166
19	0	0	2	2	18	20	262142	349506	436886	0,2500	0,3333	0,4166
20	0	0	1	1	10	10	262143	349515	436896	0,2500	0,3333	0,4167

Es zeigt sich, dass die Gewinnchancen wie $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{5}{12}$, also wie 3:4:5 stehen.

zu A 7.18:

Beispiel: *WW* gegen *ZZW*



Der Wahrscheinlichkeitsabakus liefert die vielleicht überraschende Information, dass beide Spieler die gleiche Chance haben zu gewinnen. (Bei etwas nachdenken erkennt man, dass die Chancen, zu den Zuständen *WW* und *ZZ* zu gelangen, gleich groß sind, und dass der Übergang von ZZ zu ZZW auf lange Sicht sicher ist.

Runde	Start	*W*	*Z*	*WW*	*ZZ*	*ZZW*	Anteil *WW*	Anteil *ZZW*
	1048576	0	0	0	0	0	0,0000	0,0000
1	0	524288	524288	0	0	0	0,0000	0,0000
2	0	262144	262144	262144	262144	0	0,2500	0,0000
3	0	131072	131072	393216	262144	131072	0,3750	0,1250
4	0	65536	65536	458752	196608	262144	0,4375	0,2500
5	0	32768	32768	491520	131072	360448	0,4688	0,3438
6	0	16384	16384	507904	81920	425984	0,4844	0,4063
7	0	8192	8192	516096	49152	466944	0,4922	0,4453
8	0	4096	4096	520192	28672	491520	0,4961	0,4688
9	0	2048	2048	522240	16384	505856	0,4980	0,4824
10	0	1024	1024	523264	9216	514048	0,4990	0,4902
11	0	512	512	523776	5120	518656	0,4995	0,4946
12	0	256	256	524032	2816	521216	0,4998	0,4971
13	0	128	128	524160	1536	522624	0,4999	0,4984
14	0	64	64	524224	832	523392	0,4999	0,4991
15	0	32	32	524256	448	523808	0,5000	0,4995
16	0	16	16	524272	240	524032	0,5000	0,4998
17	0	8	8	524280	128	524152	0,5000	0,4999
18	0	4	4	524284	68	524216	0,5000	0,4999
19	0	2	2	524286	36	524250	0,5000	0,5000
20	0	1	1	524287	19	524268	0,5000	0,5000

zu A 7.19:

Statt eines Kartenspiels kann der Versuch auch mit Zufallszahlen simuliert werden.

Beispielsweise gab es bei einer Simulation des Wettspiels *WWZ* gegen *ZZW* in 50 Spielen das Verhältnis 21:29, was durchaus im Rahmen zufälliger Abweichungen vom Verhältnis 1:1 liegt (verträglich gemäß Sigma-Regeln). Und bei der Simulation des Wettspiels *WWZ* gegen *ZWW* in 50 Spielen das Verhältnis 15:35, was ebenfalls durchaus im Rahmen zufälliger Abweichungen vom Verhältnis 1:3 liegt (verträglich gemäß Sigma-Regeln).