Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 5.1:

Bei 2:7 treten nacheinander die Reste 2, 6, 4, 5, 1, 3 auf, danach wiederholen sich die Reste.

Bei 3:7 treten nacheinander die Reste 3, 2, 6, 4, 5, 1 auf, danach wiederholen sich die Reste.

Bei 4:7 treten nacheinander die Reste 4, 5, 1, 3, 2, 6 auf, danach wiederholen sich die Reste.

Bei 5:7 treten nacheinander die Reste 5, 1, 3, 2, 6, 4 auf, danach wiederholen sich die Reste.

Bei 6:7 treten nacheinander die Reste 6, 4, 5, 1, 3, 2 auf, danach wiederholen sich die Reste.

In allen Fällen treten bei den Resten Zahlen des gleichen Zyklus auf.

zu A 5.2:

Nach $b = 7$ folgt als nächstes der Stammbruch mit $b = 17$ mit 16-stelliger Periode

$$\tfrac{1}{17} = 0{,}0588235294117647\,0588235294117647... = 0{,}\overline{0588235294117647}$$

zu A 5.3:

$\tfrac{1}{16} = 0{,}0625$, $\tfrac{1}{17} = 0{,}0588235294117647\,0588235294117647... = 0{,}\overline{0588235294117647}$, $\tfrac{1}{18} = 0{,}0\overline{5}$,

$\tfrac{1}{19} = 0{,}052631578947368421\,052631578947368421... = 0{,}\overline{052631578947368421}$, $\tfrac{1}{20} = 0{,}05$

zu A 5.4:

$\tfrac{5}{8} = \tfrac{5}{2^3} = \tfrac{5}{2^3} \cdot \tfrac{5^3}{5^3} = \tfrac{625}{10^3} = 0{,}625$; $\tfrac{27}{125} = \tfrac{3^3}{5^3} \cdot \tfrac{2^3}{2^3} = \tfrac{216}{10^3} = 0{,}216$ **;** $\tfrac{77}{250} = \tfrac{77}{2 \cdot 5^3} = \tfrac{77}{2 \cdot 5^3} \cdot \tfrac{2^2}{2^2} = \tfrac{308}{10^3} = 0{,}308$ **;**

$\tfrac{123}{400} = \tfrac{123}{2^4 \cdot 5^2} = \tfrac{123}{2^4 \cdot 5^2} \cdot \tfrac{5^2}{5^2} = \tfrac{3075}{10^4} = 0{,}3075$ **;** $\tfrac{250}{1024} = \tfrac{2 \cdot 5^3}{2^{10}} = \tfrac{5^3}{2^9} \cdot \tfrac{5^9}{5^9} = \tfrac{244140625}{10^9} = 0{,}244140625$ **;**

$\tfrac{256}{3125} = \tfrac{2^8}{5^5} = \tfrac{2^8}{5^5} \cdot \tfrac{2^5}{2^5} = \tfrac{2^{13}}{10^5} = 0{,}08192$ **.**

zu A 5.5:

Stellen Sie die folgenden Dezimalbrüche als gekürzte Brüche dar:

$0{,}6 = \tfrac{6}{10} = \tfrac{3}{5}$ **;** $0{,}96 = \tfrac{96}{100} = \tfrac{24}{25}$ **;** $0{,}552 = \tfrac{552}{1000} = \tfrac{69}{125}$ **;** $0{,}3825 = \tfrac{3825}{10000} = \tfrac{153}{400}$.

zu A 5.6:

Im Unterschied zu den vorangehenden Beispielen, lassen sich die Brüche noch kürzen.

$0{,}\overline{6} = 10 \cdot 0{,}\overline{6} - 1 \cdot 0{,}\overline{6} = 6$, also $0{,}\overline{6} = \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}$; $0{,}\overline{21} = 100 \cdot 0{,}\overline{21} - 1 \cdot 0{,}\overline{21} = 21$, also $0{,}\overline{21} = \tfrac{21}{99} = \tfrac{7}{333}$;

$0{,}\overline{27} = 100 \cdot 0{,}\overline{27} - 1 \cdot 0{,}\overline{27} = 27$, also $0{,}\overline{27} = \tfrac{27}{99} = \tfrac{3}{11}$;

$0{,}\overline{147} = 1000 \cdot 0{,}\overline{147} - 1 \cdot 0{,}\overline{147} = 147$, also $0{,}\overline{147} = \tfrac{147}{999} = \tfrac{49}{333}$;

$0{,}\overline{225} = 1000 \cdot 0{,}\overline{225} - 1 \cdot 0{,}\overline{225} = 225$, also $0{,}\overline{225} = \tfrac{225}{999} = \tfrac{25}{111}$;

$0{,}\overline{216} = 1000 \cdot 0{,}\overline{216} - 1 \cdot 0{,}\overline{216} = 216$, also $0{,}\overline{216} = \tfrac{216}{999} = \tfrac{24}{111}$;

$0{,}\overline{074} = 1000 \cdot 0{,}\overline{074} - 1 \cdot 0{,}\overline{074} = 74$, also $0{,}\overline{074} = \tfrac{74}{999} = \tfrac{2}{27}$;

zu A 5.7:

Auch wenn Kürzen möglich ist, haben die Dezimalbrüche zu $\tfrac{10}{99}$; $\tfrac{12}{99}$; $\tfrac{34}{99}$; $\tfrac{35}{99}$; $\tfrac{36}{99}$; $\tfrac{45}{99}$ eine 2-stellige Periode. Die Dezimalbrüche von $\tfrac{11}{99}$; $\tfrac{33}{99}$; $\tfrac{44}{99}$ haben eine 1-stellige Periode, da die Brüche auf den Nenner 9 (bzw. auf 3) gekürzt werden können.

zu A 5.8:

Auch wenn Kürzen möglich ist, haben die Dezimalbrüche zu $\frac{32}{999}$; $\frac{36}{999}$; $\frac{54}{999}$; $\frac{64}{999}$; $\frac{74}{999}$; $\frac{84}{999}$; $\frac{148}{999}$ eine 3-stellige Periode. Die Dezimalbrüche von $\frac{111}{999}$; $\frac{333}{999}$ haben eine 1-stellige Periode, da die Brüche auf den Nenner 9 (bzw. auf 3) gekürzt werden können. Zu keinem der Brüche mit Nenner 999 gehört ein 2-stelliger Dezimalbruch.

zu A 5.9:

$\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ (1-stellig); $\frac{4}{27}$ (3-stellig) ; $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ (1-stellig) ; $\frac{12}{37}$ (3-stellig) ;
$\frac{4}{37}$ (3-stellig) ; $\frac{4}{11}$ (2-stellig) ; $\frac{9}{333} = \frac{1}{37}$ (3-stellig)

zu A 5.10:

(1) Die grau unterlegten Primfaktoren sind bis bei kleineren Werten von *k* noch nicht aufgetreten.

- Aus der Primfaktorzerlegung $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ ergibt sich:

Zu einem gekürzten Bruch mit dem Nenner 9999 gehört ein Dezimalbruch mit einer 4-stelligen Periode; dies gilt auch für gekürzte Brüche mit den Nennern

101, $303 = 3 \cdot 101$, $909 = 3^2 \cdot 101$, $1111 = 11 \cdot 101$, $3003 = 3 \cdot 11 \cdot 101$.

Man beachte: Die Nenner 3 und 3^2 führen zu einer 1-stelligen Periode, die Nenner 11, $3 \cdot 11 = 33$ und $3^2 \cdot 11 = 99$ führen zu einer 2-stelligen Periode.

- Aus der Primfaktorzerlegung $99999 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$ ergibt sich:

Zu einem gekürzten Bruch mit dem Nenner 99999 gehört ein Dezimalbruch mit einer 5-stelligen Periode; dies gilt auch für gekürzte Brüche mit den Nennern

41, $123 = 3 \cdot 41$, 271, $369 = 3 \cdot 121$, $813 = 3 \cdot 271$, $2439 = 3^2 \cdot 121$, $11111 = 41 \cdot 271$, $33333 = 3 \cdot 41 \cdot 271$.

- Aus der Primfaktorzerlegung $999999 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ ergibt sich:

Zu einem gekürzten Bruch mit dem Nenner 999999 gehört ein Dezimalbruch mit einer 6-stelligen Periode; dies gilt auch für gekürzte Brüche mit den Nennern

7, 13, $21 = 3 \cdot 7$, $39 = 3 \cdot 13$, $63 = 3^2 \cdot 7$, $77 = 7 \cdot 11$, $91 = 7 \cdot 13$, $117 = 3^2 \cdot 13$, $143 = 11 \cdot 13$, $189 = 3^3 \cdot 7$,
$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, $259 = 7 \cdot 37$, $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$, $297 = 3^3 \cdot 11$, $351 = 3^3 \cdot 13$, $407 = 11 \cdot 37$, $481 = 13 \cdot 37$,
$693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 1$, $777 = 3 \cdot 7 \cdot 37$, $819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $1221 = 3 \cdot 11 \cdot 37$, $1443 = 3 \cdot 13 \cdot 37$,
$2079 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11$, $2331 = 3^2 \cdot 7 \cdot 37$, $2457 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13$, $2849 = 7 \cdot 11 \cdot 37$, $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$,
$3367 = 7 \cdot 13 \cdot 37$, $3663 = 3^2 \cdot 11 \cdot 37$, $4329 = 3^2 \cdot 13 \cdot 37$, $5291 = 11 \cdot 13 \cdot 37$, $6993 = 3^3 \cdot 7 \cdot 37$,
$8547 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$, $9009 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, $10989 = 3^3 \cdot 11 \cdot 37$,
$12987 = 3^3 \cdot 13 \cdot 37$, $15873 = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $25641 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$, $27027 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$,
$30303 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, $37037 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $47619 = 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $76923 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 37$,
$90909 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, $111111 = 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $142857 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$, $333333 = 3^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.

Man beachte: Die Nenner 3 und 3^2 führen zu einer 1-stelligen Periode, die Nenner 11, $3 \cdot 11 = 33$ und $3^2 \cdot 11 = 99$ zu einer 2-stelligen Periode, die Nenner $3^3 = 27$, 37, $3 \cdot 37 = 111$, $3^2 \cdot 37 = 333$ und $3^3 \cdot 37 = 999$ zu einer 3-stelligen Periode.

(2) Die grau unterlegten Primfaktoren sind bis bei kleineren Werten von *k* noch nicht aufgetreten.

k	Primfaktorzerlegung von $10^k - 1$
11	3 · 3 · 21649 · 513239
12	3 · 3 · 3 · 7 · 11 · 13 · 37 · 101 · 9901
13	3 · 3 · 53 · 79 · 265371653
14	3 · 3 · 11 · 239 · 4649 · 909091
15	3 · 3 · 3 · 31 · 37 · 41 · 271 · 2906161
16	3 · 3 · 11 · 17 · 73 · 101 · 137 · 5882353
17	3 · 3 · 2071723 · 5363222357
18	3 · 3 · 3 · 3 · 7 · 11 · 13 · 19 · 37 · 52579 · 333667
19	3 · 3 · 1111111111111111111
20	3 · 3 · 11 · 41 · 101 · 271 · 3541 · 9091 · 27961

zu A 5.11:

$\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$ – die 2-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 4 = 2² des Nenners;

$\frac{8}{15} = 0{,}5\overline{3}$ – die 1-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 5 des Nenners;

$\frac{13}{24} = 0{,}541\overline{6}$ – die 3-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 8 = 2³ des Nenners;

$\frac{29}{30} = 0{,}9\overline{6}$ – die 1-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 10 = 2 · 5 des Nenners;

$\frac{17}{60} = 0{,}28\overline{3}$ – die 2-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 20 = 2² · 5 des Nenners;

$\frac{49}{75} = 0{,}65\overline{3}$ – die 2-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 25 = 5² des Nenners;

$\frac{7}{150} = 0{,}04\overline{6}$ – die 2-stellige Vorperiode ergibt sich aus dem Teiler 50 = 2 · 5² des Nenners.

zu A 5.12:

Hat ein gemischt-periodischer Dezimalbruch eine Vorperiode der Länge *a* und eine Periode der Länge *b*, dann betrachtet man die Differenz aus dem 10^{a+b}-Fachen des Dezimalbruchs und dem 10^{a}-Fachen des Dezimalbruchs.

zu A 5.13:

$10^3 \cdot 0{,}1\overline{23} - 10^1 \cdot 0{,}1\overline{23} = 990 \cdot 0{,}1\overline{23} = 122$, also $0{,}1\overline{23} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$

$10^3 \cdot 0{,}12\overline{3} - 10^2 \cdot 0{,}12\overline{3} = 900 \cdot 0{,}12\overline{3} = 111$, also $0{,}12\overline{3} = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$

$10^4 \cdot 0{,}4\overline{567} - 10^1 \cdot 0{,}4\overline{567} = 9990 \cdot 0{,}4\overline{567} = 4563$, also $0{,}4\overline{567} = \frac{4563}{9990} = \frac{169}{370}$

$10^4 \cdot 0{,}45\overline{67} - 10^2 \cdot 0{,}45\overline{67} = 9900 \cdot 0{,}45\overline{67} = 4522$, also $0{,}45\overline{67} = \frac{4522}{9900} = \frac{2261}{4950}$

$0{,}456\overline{7}$ $10^4 \cdot 0{,}456\overline{7} - 10^3 \cdot 0{,}456\overline{7} = 9000 \cdot 0{,}456\overline{7} = 4111$, also $0{,}456\overline{7} = \frac{4111}{9000}$

zu A 5.14:

$$0,\overline{12} = 0{,}121212\ldots = 0{,}12 + 0{,}0012 + 0{,}000012 + \ldots = 0{,}12 \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{100}\right) + \left(\tfrac{1}{10000}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= 0{,}12 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 0{,}12 \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \tfrac{12}{100} \cdot \tfrac{100}{99} = \tfrac{12}{99} = \tfrac{4}{33}$$

$$0,\overline{123} = 0{,}123123123\ldots = 0{,}123 + 0{,}000123 + 0{,}000000123 + \ldots = 0{,}123 \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{1000}\right) + \left(\tfrac{1}{1000000}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= 0{,}123 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = 0{,}123 \cdot \frac{1}{\frac{999}{1000}} = \tfrac{123}{1000} \cdot \tfrac{1000}{999} = \tfrac{123}{999} = \tfrac{41}{333}$$

$$0,\overline{1234} = 0{,}123412341234\ldots = 0{,}1234 + 0{,}00001234 + 0{,}000000001234 + \ldots$$

$$= 0{,}1234 \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{10000}\right) + \left(\tfrac{1}{100000000}\right)^2 + \ldots\right) = 0{,}1234 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10000}} = 0{,}1234 \cdot \frac{1}{\frac{9999}{10000}} = \tfrac{1234}{10000} \cdot \tfrac{10000}{9999} = \tfrac{1234}{9999}$$

Beispiel mit Vorperiode:

$$0{,}5\overline{12} = 0{,}5121212\ldots = 0{,}5 + (0{,}012 + 0{,}00012 + 0{,}0000012 + \ldots) = 0{,}5 + 0{,}012 \cdot \left(1 + \left(\tfrac{1}{100}\right) + \left(\tfrac{1}{10000}\right)^2 + \ldots\right)$$

$$= 0{,}5 + 0{,}012 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = 0{,}5 + 0{,}012 \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{12}{1000} \cdot \tfrac{100}{99} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{12}{990} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{330} = \tfrac{165}{330} + \tfrac{4}{330} = \tfrac{169}{330}$$

zu A 5.15:

((eigene Lektüre))

zu A 5.16:

2	$\frac{1}{2} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$	1-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 10 erweitern)
3	$\frac{1}{3} = \frac{3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9} = 0,\overline{3}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Periode (lässt sich auf 9 erweitern)
4	$\frac{1}{4} = \frac{5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25$	2-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 100 erweitern)
5	$\frac{1}{5} = \frac{2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$	1-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 10 erweitern)
6	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{15}{90} = 0{,}1\overline{6}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Vorperiode und 1-stelliger Periode (lässt sich auf 90 erweitern)
7	$\frac{1}{7} = \frac{3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{7 \cdot 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{142857}{999999} = 0,\overline{142857}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 6-stelliger Periode (lässt sich auf 999999 erweitern)
8	$\frac{1}{8} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{125}{1000} = 0{,}125$	3-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 1000 erweitern)
9	$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Periode
10	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	1-stellige endliche Dezimalzahl
11	$\frac{1}{11} = \frac{3^2}{11 \cdot 3^2} = \frac{9}{99} = 0,\overline{09}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 2-stelliger Periode (lässt sich auf 99 erweitern)

12	$\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{25}{100}\cdot\frac{3}{9}=\frac{75}{900}=0{,}08\overline{3}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 2-stelliger Vorperiode und 1-stelliger Periode (lässt sich auf 900 erweitern)
13	$\frac{1}{13}=\frac{3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 37}{13\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 37}=\frac{76923}{999999}=0{,}\overline{076923}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 6-stelliger Periode (lässt sich auf 999999 erweitern)
14	$\frac{1}{14}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{5}{10}\cdot\frac{142857}{999999}=\frac{714285}{9999990}=0{,}0\overline{714285}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Vorperiode und 6-stelliger Periode (lässt sich auf 9999990 erweitern)
15	$\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{6}{90}=0{,}0\overline{6}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Vorperiode und 1-stelliger Periode (lässt sich auf 90 erweitern)
16	$\frac{1}{16}=\frac{5^4}{2^4\cdot 5^4}=\frac{625}{10000}=0{,}0625$	4-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 10000 erweitern)
17	$\frac{1}{17}=\frac{3^2\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353}{17\cdot 3^2\cdot 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137\cdot 5882353}$ $=\frac{588235294117647}{9999999999999999}=0{,}\overline{0588235294117647}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 16-stelliger Periode (lässt sich auf $10^{16}-1$ erweitern)
18	$\frac{1}{18}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{90}=0{,}0\overline{5}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 1-stelliger Vorperiode und 1-stelliger Periode (lässt sich auf 90 erweitern)
19	$\frac{1}{19}=\frac{3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667}{19\cdot 3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37\cdot 52579\cdot 333667}$ $=\frac{52631578947368421}{999999999999999999}=0{,}\overline{052631578947368421}$	unendlich-periodische Dezimalzahl mit 18-stelliger Periode (lässt sich auf $10^{18}-1$ erweitern)
20	$\frac{1}{20}=\frac{5}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 5}=\frac{5}{100}=0{,}05$	2-stellige endliche Dezimalzahl (lässt sich auf 100 erweitern)

zu A 5.17:

- Bei der Division durch 19 entsteht ein Zyklus der Länge 18, vgl. Abbildung, mit folgenden Eigenschaften:

$\frac{1}{19}=0{,}\overline{052631578947368421}$:

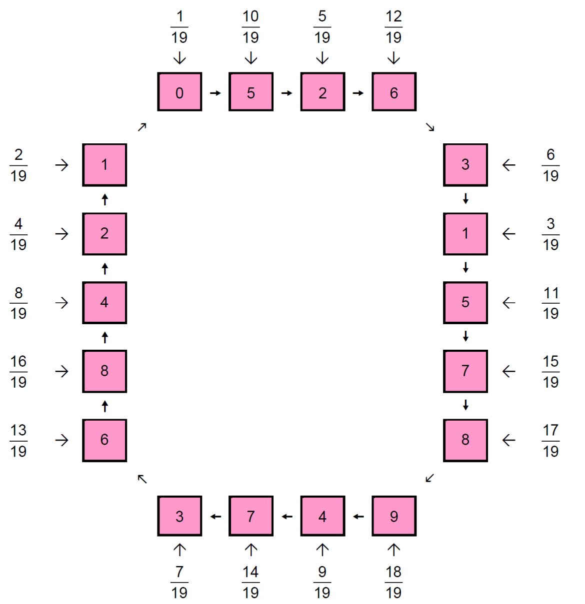
$$052631578+947368421=999999999=10^9-1$$

$$052631+578947+368421=999999=10^6-1$$

$$052+631+578+947+368+421=2997=3\cdot(10^3-1)$$

$$05+26+31+57+89+47+36+84+21=396=4\cdot(10^2-1)$$

In der graphischen Darstellung der Zyklen addieren sich jeweils die einander punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Grafik gegenüberliegenden Ziffern zu 9. Betrachtet man jeweils die zum Mittelpunkt der Grafik punktssymmetrisch gegenüberliegenden Brüche, so ergibt sich stets die Summe 1.

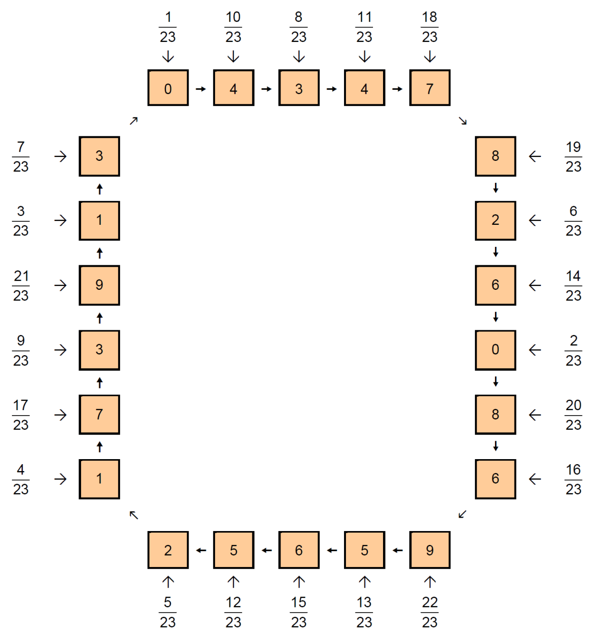


- Bei der Division durch 23 entsteht ein Zyklus der Länge 22, vgl. Abbildung, mit folgenden Eigenschaften:

$\frac{1}{23} = 0,\overline{0434782608695652173913}$

$04347826086 + 95652173913 = 99999999999 = 10^{11} - 1$

$04 + 34 + 78 + 26 + 08 + 69 + 56 + 52 + 17 + 39 + 13 = 396 = 4 \cdot (10^2 - 1)$



In der graphischen Darstellung der Zyklen addieren sich jeweils die einander punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Grafik gegenüberliegenden Ziffern zu 9. Betrachtet man jeweils die zum Mittelpunkt der Grafik punktssymmetrisch gegenüberliegenden Brüche, so ergibt sich stets die Summe 1.

- Bei der Division durch 29 entsteht ein Zyklus der Länge 28, vgl. Abbildung, mit folgenden Eigenschaften:

$\frac{1}{29} = 0,\overline{0344827586206896551724137931}$

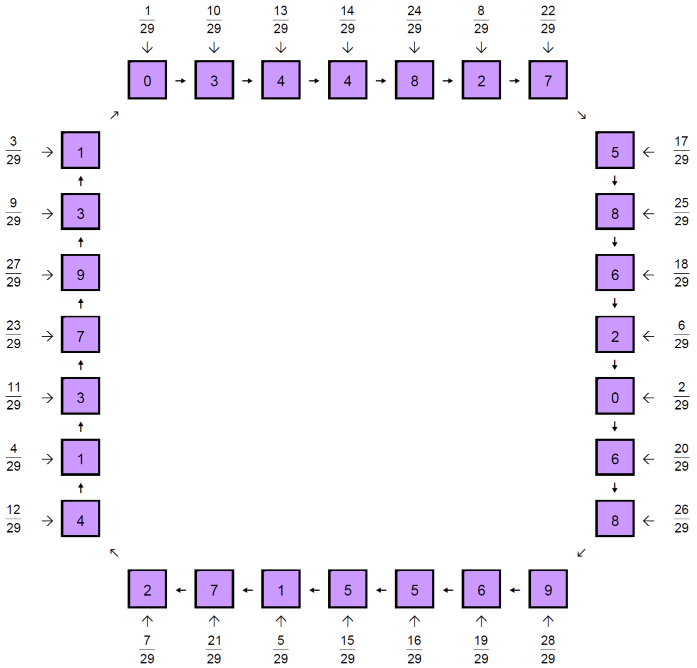
$03448275862068 + 96551724137931 = 99999999999999 = 10^{14} - 1$

$0344827 + 5862068 + 9655172 + 4137931 = 19999998 = 2 \cdot (10^7 - 1)$

$0344 + 8275 + 8620 + 6896 + 5517 + 2413 + 7931 = 39996 = 4 \cdot (10^4 - 1)$

$03 + 44 + 82 + 75 + 86 + 20 + 68 + 96 + 55 + 17 + 24 + 13 + 79 + 31 = 693 = 7 \cdot (10^2 - 1)$

In der graphischen Darstellung der Zyklen addieren sich jeweils die einander punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Grafik gegenüberliegenden Ziffern zu 9. Betrachtet man jeweils die zum Mittelpunkt der Grafik punktssymmetrisch gegenüberliegenden Brüche, so ergibt sich stets die Summe 1.



zu A 5.18:

Da die Primzahl 73 ein Teiler von $10^8 - 1$ ist, haben die Brüche $\frac{a}{73}$ eine 8-stellige Periode.

Bei der Division einer natürlichen Zahl durch die Primzahl 73 treten 8-stellige Perioden auf; dabei sind neun verschiedene Ziffernfolgen möglich:

a	a/73
1	01369863
10	13698630
27	36986301
51	69863013
72	98630136
63	86301369
46	63013698
22	30136986

a	a/73
2	02739726
20	27397260
54	73972602
29	39726027
71	97260273
53	72602739
19	26027397
44	60273972

a	a/73
3	04109589
30	41095890
8	10958904
7	09589041
70	95890410
43	58904109
65	89041095
66	90410958

a	a/73
4	05479452
40	54794520
35	47945205
58	79452054
69	94520547
33	45205479
38	52054794
15	20547945

a	a/73
5	06849315
50	68493150
62	84931506
36	49315068
68	93150684
23	31506849
11	15068493
37	50684931

a	a/73
6	08219178
60	82191780
16	21917808
14	19178082
67	91780821
13	17808219
57	78082191
59	80821917

a	a/73
9	12328767
17	23287671
24	32876712
21	28767123
64	87671232
56	76712328
49	67123287
52	71232876

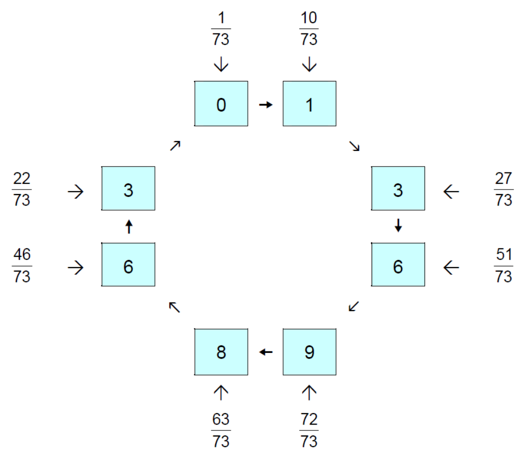
a	a/73
12	16438356
47	64383561
32	43835616
28	38356164
61	83561643
26	35616438
41	56164383
45	61643835

a	a/73
18	24657534
34	46575342
48	65753424
42	57534246
55	75342465
39	53424657
25	34246575
31	42465753

Auch hier gilt:

In der graphischen Darstellung der Zyklen addieren sich jeweils die einander punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Grafik gegenüberliegenden Ziffern zu 9. Betrachtet man jeweils die zum Mittelpunkt der Grafik punktssymmetrisch gegenüberliegenden Brüche, so ergibt sich stets die Summe 1.

Beispiel-Grafik zu der ersten Ziffernfolge:



Zum Satz von Midy bei der ersten Ziffernfolge:

0136 + 9863 = 9999 = 10^4 – 1; 01 + 36 + 98 + 63 = 198 = 2 · 99 = 2 · (10^2 – 1)

1369 + 8630 = 9999 = 10^4 – 1; 13 + 69 + 86 + 30 = 198 = 2 · 99 = 2 · (10^2 – 1)

3698 + 6301 = 9999 = 10^4 – 1; 36 + 98 + 63 + 01 = 198 = 2 · 99 = 2 · (10^2 – 1)

6986 + 3014 = 9999 = 10^4 – 1; 69 + 86 + 30 + 13 = 198 = 2 · 99 = 2 · (10^2 – 1)

usw.

zu A 5.19:

(1) Der Satz von Midy ist nicht anwendbar, weil 3, die Länge der verschiedenen Perioden, eine ungerade Zahl ist. Zu den zwölf verschiedenen 3er-Zyklen gehören jeweils drei Brüche mit Nenner 37, deren Summe je zur Hälfte 1 bzw. 2 ergibt.

(2) Auch hier ist der Satz von Midy nicht anwendbar, weil 5, die Länge der verschiedenen Perioden, eine ungerade Zahl ist. Zu den acht verschiedenen 5er-Zyklen gehören jeweils fünf Brüche mit Nenner 41, deren Summe je zur Hälfte 1 bzw. 2 ergibt.

Die folgenden Tabellen enthalten in der Spalte links jeweils die Zähler der Brüche, rechts die Ziffernfolge der Periode. Am Ende der Tabellen ist jeweils die Summe der Zähler eingetragen. Es ergibt sich jeweils in der Hälfte der Fälle die Summe $\frac{82}{41} = 2$ bzw. $\frac{123}{41} = 3$

a	a/41
1	02439
10	24390
18	43902
16	39024
37	90244
82	

a	a/41
2	04878
20	48780
36	87805
32	78049
33	80488
123	

a	a/41
3	07317
30	73171
13	31707
7	17073
29	70732
82	

a	a/41
4	09756
40	97561
31	75610
23	56098
25	60976
123	

a	a/41
5	12195
9	21951
8	19512
39	95122
21	51220
82	

a	a/41
6	14634
19	46341
26	63415
14	34146
17	41463
82	

a	a/41
11	26829
28	68293
34	82927
12	29268
38	92683
123	

a	a/41
15	36585
27	65854
24	58537
35	85366
22	53659
123	

zu A 5.20:

Die zur Generatorzahl 17 gehörende 16-stellige zyklische Zahl ist 0.588.235.294.117.647.

Faktor	Vielfaches
1	0.588.235.294.117.647
2	1.176.470.588.235.294
3	1.764.705.882.352.941
4	2.352.941.176.470.588
5	2.941.176.470.588.235
6	3.529.411.764.705.882
7	4.117.647.058.823.529
8	4.705.882.352.941.176

Faktor	Vielfaches
9	5.294.117.647.058.823
10	5.882.352.941.176.470
11	6.470.588.235.294.117
12	7.058.823.529.411.764
13	7.647.058.823.529.411
14	8.235.294.117.647.058
15	8.823.529.411.764.705
16	9.411.764.705.882.352

zu A 5.21:

Zur Primzahl 11 gehört eine 2-stellige Periode, zu 13 eine 6-stellige Periode, zu 31 eine 15-stellige Periode, zu 37 eine 3-stellige Periode und zu 41 eine 5-stellige Periode mit jeweils unterschiedlichen Ziffernfolgen; daher gehören diese Primzahlen nicht zu den Generatorzahlen.

zu A 5.22:

(a) Da es im Dualsystem nur die Ziffern 0 und 1 gibt, kann es bei einer 3-stelligen Periode nur die angegebenen sechs Kombinationen geben (alle außer 000 und 111). Es gilt

$\frac{1}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{001}$; $\frac{2}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{010}$; $\frac{3}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{011}$; $\frac{4}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{100}$; $\frac{5}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{101}$; $\frac{6}{7}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{110}$

(b) (c) Da es im Dualsystem nur die Ziffern 0 und 1 gibt, kann es bei einer 4-stelligen Periode nur die 14 Kombinationen 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101 und 1110 geben (alle außer 0000 und 1111).

Von diesen lassen sich die Kombinationen 0101, 1010 zu einer 2-stelligen Periode verkürzen.

$\frac{1}{15}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{0001}$; $\frac{2}{15}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{0010}$; $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{0011}$; $\frac{4}{15}\,{}_{10} = {}_2\, 0,\overline{0100}$;

$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{0101} = 0{,}\overline{01}$; $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{0110}$; $\frac{7}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{0111}$; $\frac{8}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1000}$;

$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1001}$; $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1010} = 0{,}\overline{10}$; $\frac{11}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1011}$; $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1100}$;

$\frac{13}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1101}$; $\frac{14}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{1110}$

zu A 5.23:

$\frac{1}{31}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{00001}$; $\frac{7}{31}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{00111}$; $\frac{30}{31}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{11110}$; $\frac{1}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{000001}$; $\frac{63}{127}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{0111111}$;

$\frac{1}{255}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{00000001}$; $\frac{6}{17} = \frac{90}{255}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{01011010}$; $\frac{10}{51} = \frac{50}{255}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{00110010}$;

$\frac{43}{85} = \frac{129}{255}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}\overline{10000001}$

zu A 5.24:

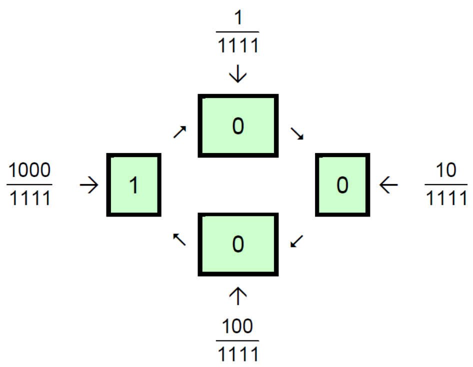
$\frac{1}{14} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}0\overline{001}$; $\frac{13}{14} = \frac{1}{2}\cdot\frac{13}{7}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}1\overline{110}$; $\frac{3}{20} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}00\,\overline{1001}$;

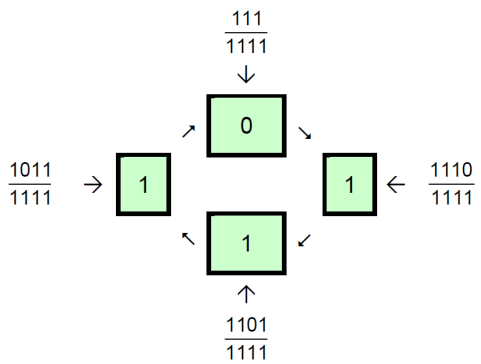
$\frac{5}{18} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{2}\cdot\frac{35}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}0\,\overline{100011}$; $\frac{11}{42} = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{21} = \frac{1}{2}\cdot\frac{33}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}0\,\overline{100001}$;

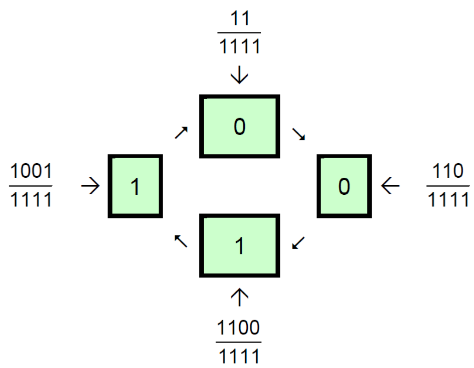
$\frac{7}{36} = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9} = \frac{1}{4}\cdot\frac{49}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}00\,\overline{110001}$; $\frac{5}{84} = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{21} = \frac{1}{4}\cdot\frac{15}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}00\,\overline{001111}$;

$\frac{9}{80} = \frac{1}{16}\cdot\frac{9}{5} = \frac{1}{16}\cdot\frac{27}{15}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}0001\overline{1100}$; $\frac{25}{72} = \frac{1}{8}\cdot\frac{25}{9} = \frac{1}{8}\cdot\frac{175}{63}\;{}_{10} = {}_2\; 0{,}010\,\overline{110001}$

zu A 5.25:







zu A 5.26:

Beispiele:

(1) Nenner 7 (dezimal), 2 verschiedene Zyklen:

Ziffernfolge 001 ($\frac{1}{7}$), 010 ($\frac{2}{7}$), 100 ($\frac{4}{7}$) oder Ziffernfolge 011 ($\frac{3}{7}$), 101 ($\frac{5}{7}$), 110 ($\frac{6}{7}$)

(2) Nenner 31 (dezimal), 6 verschiedene Zyklen

Ziffernfolge 00001 ($\frac{1}{31}$), 00010 ($\frac{2}{31}$), 00100 ($\frac{4}{31}$), 01000 ($\frac{8}{31}$), 10000 ($\frac{16}{31}$),

Ziffernfolge 00011 ($\frac{3}{31}$), 00110 ($\frac{6}{31}$), 01100 ($\frac{12}{31}$), 11000 ($\frac{24}{31}$), 10001 ($\frac{11}{31}$),

Ziffernfolge 00101 ($\frac{5}{31}$), 01010 ($\frac{10}{31}$), 10100 ($\frac{20}{31}$), 01001 ($\frac{9}{31}$), 10010 ($\frac{18}{31}$),

Ziffernfolge 00111 ($\frac{7}{31}$), 01110 ($\frac{14}{31}$), 11100 ($\frac{28}{31}$), 11001 ($\frac{25}{31}$), 10011 ($\frac{19}{31}$),

Ziffernfolge 01011 ($\frac{11}{31}$), 10110 ($\frac{22}{31}$), 01101 ($\frac{13}{31}$), 11010 ($\frac{26}{31}$), 10101 ($\frac{21}{31}$),

Ziffernfolge 01111 ($\frac{15}{31}$), 11110 ($\frac{30}{31}$), 11101 ($\frac{29}{31}$), 11011 ($\frac{27}{31}$), 10111 ($\frac{23}{31}$)

A 5.27:

Dualbruchentwicklung (Satz von Midy)

Hat die Dualbruchentwicklung $0,\overline{a_1a_2...a_na_{n+1}a_{n+2}...a_{2n}}$ eines Bruchs $\frac{a}{p}$ (p Primzahl) eine *gerade* Anzahl von Stellen, also eine Periode der Länge 2*n*, dann gilt:

- $a_k + a_{n+k} = 1$ für alle $k = 1, 2, ..., n$ und
- Addiert man die Zahl aus den ersten *n* Ziffern $a_1a_2...a_n$ und die Zahl aus der zweiten Hälfte der Ziffern $a_{n+1}a_{n+2}...a_{2n}$, dann ergibt sich $2^n - 1$ im Dezimalsystem.

Beispiele:

(1) $\frac{1}{3}\,_{10} =_2 0,\overline{01}$, also n = 1 und $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ mit $a_1 + a_2 = 1 = 2^1 - 1$

analog $\frac{2}{3}\,_{10} =_2 0,\overline{10}$, also n = 1 und $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ mit $a_1 + a_2 = 1 = 2^1 - 1$

(2) $\frac{1}{5}\,_{10} =_2 0,\overline{0011}$, also n = 2 und $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1$ mit $a_1 + a_3 = 1$ und $a_2 + a_4 = 1$
und $a_1a_2 + a_3a_4 = 11\ {}_2 =_{10} 2^2 - 1$

analog $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

(3) $\frac{1}{17}\,_{10} =_2 0,\overline{00001111}$, also n = 4 und $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ und $a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 1$ mit

$a_1 + a_5 = a_2 + a_6 = a_3 + a_7 = a_4 + a_8 = 1$ und $a_1a_2a_3a_4 + a_5a_6a_7a_8 = 1111\ {}_2 =_{10} 2^4 - 1$

analog $\frac{2}{17}, ..., \frac{16}{17}$.