Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 4.1:

Verbindet man die Eckpunkte des Dreiecks mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten, dann entstehen drei gleichschenklige Dreiecke mit den Seiten *a*, *b*, *c* als Grundseiten und den Mittelsenkrechten m_a und m_b und m_c als Höhen. Die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b + c \cdot m_c\right)$ ergibt sich daher aus der Flächeninhaltsformel für Dreiecke.

zu A 4.2:

Da der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten Mittelpunkt des Umkreises ist, haben die Verbindungsstrecken vom Mittelpunkt zu den drei Eckpunkten die Länge *R*.

Der Umfangswinkel über der Sehne *a* ist α, der zugehörige Mittelpunktswinkel ist 2α, und da das grün gefärbte Dreieck gleichschenklig ist, ist jeder der beiden Winkel genauso groß wie α. Entsprechendes gilt für die Umfangs- und Mittelpunktswinkel über den Seiten *b* und *c*.

In den halben gleichschenkligen Dreiecken gilt: $\sin(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, $\sin(\beta) = \frac{\frac{b}{2}}{R}$, $\sin(\gamma) = \frac{\frac{c}{2}}{R}$ und hieraus die angegebene Gleichung.

zu A 4.3:

(1) In den halben gleichschenkligen Dreiecken gilt: $\cos(\alpha) = \frac{m_a}{R}$, $\cos(\beta) = \frac{m_b}{R}$, $\cos(\gamma) = \frac{m_c}{R}$ und hieraus mit $A = \frac{1}{2} \cdot \left(a \cdot m_a + b \cdot m_b + c \cdot m_c\right)$ der erste Teil der Formel

$$A = R^2 \cdot \left[\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\gamma) \cdot \cos(\gamma)\right] = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \left[\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)\right]$$

Der zweite Teil ergibt sich aus dem Additionstheorem (Doppelwinkelsatz) des Sinus:
sin(2α) = 2 · sin(α) · cos(α).

(2)(3) Für die Höhen h_a, h_b, h_c in einem Dreieck gilt:

$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$, also $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$, und analog $h_a = c \cdot \sin(\beta)$ und $h_b = a \cdot \sin(\gamma)$. Hieraus ergibt sich für den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$ und weiter

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta).$$

Wegen $\sin(\alpha) = \frac{\frac{a}{2}}{R}$, $\sin(\beta) = \frac{\frac{b}{2}}{R}$, $\sin(\gamma) = \frac{\frac{c}{2}}{R}$, also $a = 2R \cdot \sin(\alpha)$, $b = 2R \cdot \sin(\beta)$, $c = 2R \cdot \sin(\gamma)$,

ergibt sich dann einerseits

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin(\alpha) \cdot 2R \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) = 2R^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)$$

und andererseits

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2R} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2R} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \frac{b}{2R}, \text{ also } A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

zu A 4.4:

Ein gleichseitiges Dreieck, das in dem Kreis mit Radius R = 1 einbeschrieben ist, hat den Radius $\sqrt{3}$, denn für die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge s gilt: $h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Für den Radius des Umkreises gilt: $R = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{s}{3} \cdot \sqrt{3}$, also $s = R \cdot \sqrt{3}$.

Da die Seite AB beibehalten wird und die Seite AC die kürzeste Seite ist, hat das grün gefärbte Dreieck wegen der längeren Höhe auf AB einen größeren Flächeninhalt als das blau gefärbte Ausgangsdreieck.

Da im nächsten Schritt die Seite AC' beibehalten wird, ergibt sich ein Dreieck mit einer längeren Höhe und somit einem größeren Flächeninhalt als das grün gefärbte Dreieck. Da das rosa gefärbte Dreieck nach Konstruktion ein gleichseitiges Dreieck ist, ist der Satz bewiesen.

zu A 4.5:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot (y+z) \cdot r + \frac{1}{2} \cdot (z+x) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (c+a+b) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot 2s = r \cdot s$$

zu A 4.6:

Wegen $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{w_\alpha}$, $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{w_\beta}$, $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{w_\gamma}$ und $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{w_\alpha}$, $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{y}{w_\beta}$, $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{z}{w_\gamma}$ ergibt sich

aus $A = r \cdot s = r \cdot (x+y+z) = r \cdot x + r \cdot y + r \cdot z$

$A = w_\alpha{}^2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + w_\beta{}^2 \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) + w_\gamma{}^2 \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ und weiter aus

$\frac{1}{2} \cdot \sin(2\varepsilon) = \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)$ für die halben Winkel dann

$A = \frac{1}{2} \cdot \left[w_\alpha{}^2 \cdot \sin(\alpha) + w_\beta{}^2 \cdot \sin(\beta) + w_\gamma{}^2 \cdot \sin(\gamma) \right]$

zu A 4.7:

Viereck	Inkreis	Umkreis
Quadrat	ja	ja
Rechteck	i. A. nicht	ja
Raute	ja	i. A. nicht
Parallelogramm	i. A. nicht	i. A. nicht
symmetrisches Trapez	i. A. nicht	ja
symmetrischer Drachen	i. A. nicht	i. A. nicht

zu A 4.8:

Winkel sind gleich, weil sie Umfangswinkel über einer Sehne sind:

Seite $\overline{AB} : \gamma_1 = \delta_2$; $\overline{BC} : \delta_1 = \alpha_2$; $\overline{CD} : \alpha_1 = \beta_2$; $\overline{DA} : \beta_1 = \gamma_2$.

zu A 4.9:

Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn die Summe der Winkelgrößen von je zwei gegenüberliegenden Winkeln 180° ergibt:

Quadrat und Rechteck haben lauter rechte Winkel; daher gilt die Bedingung auch für einander gegenüberliegende Winkel. Für symmetrische Trapeze gilt: $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$, also wegen

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\alpha + 2\gamma = 2\beta + 2\delta = 360°$, also $\alpha + \gamma = 180°$ und $\beta + \delta = 180°$.

zu A 4.10:

Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn die Summe der Winkelgrößen von je zwei gegenüberliegenden Winkeln 180° ergibt:

Wegen der Symmetrie müssen die beiden einander gegenüberliegenden Winkel α (links) und γ (rechts) der Symmetrieachse gleich groß sein. Damit die Summe der beiden Winkelgrößen 180° ergibt, müssen beide Winkel rechte Winkel sein, also $\alpha = \gamma = 90°$. Die beiden anderen Winkel β und δ dürfen beliebig groß sein, solange sie unter 180° bleiben.

zu A 4.11:

Den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Seiten *a*, *b*, *c* kann man mithilfe von

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta)$ berechnen.

Da sich im Sehnenviereck mit den Seiten *a*, *b*, *c*, *d* die Winkel α und γ zu 180° ergänzen und die Diagonale *f* das Viereck in zwei Dreiecke unterteilt, gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(180° - \alpha)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot d + b \cdot c) \cdot \sin(\alpha)$$

und analog wegen der Unterteilung des Vierecks durch die Diagonale *e*:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(\delta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(180° - \beta)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (a \cdot b + c \cdot d) \cdot \sin(\beta)$$

zu A 4.12:

Ein Quadrat, das in dem Kreis mit Radius $R = 1$ einbeschrieben ist, hat gemäß dem Satz von Pythagoras die Seitenlänge $\sqrt{2}$.

Die Eckpunkte des Vierecks werden so bezeichnet, dass *AB* die kürzeste Seite ist und *BC* eine Seite des Vierecks, deren Länge größer ist als $\sqrt{2}$ – ggf. muss die Reihenfolge der Seiten vertauscht werden (vgl. Ausführungen über Gelenkvierecke und **A 4.20**).

Um *A* schlägt man einen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ und erhält einen Punkt *B*'. Da AB nach Voraussetzung die kürzeste Seite ist, hat das Dreieck *AB'C* einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck *ABC*. Durch diesen Schritt hat man erreicht, dass eine der vier Seiten die Länge $\sqrt{2}$ hat.

Im nächsten Schritt betrachtet man dann wieder die kürzeste Seite im Viereck *AB'CD* mit einer Nachbarseite, deren Länge größer ist als $\sqrt{2}$ (ggf. mit Vertauschen). Dann schlägt man wieder um einen der Eckpunkte der jetzt kürzesten Seite einen Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ usw. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man von Schritt zu Schritt ein flächenmäßig größeres Viereck mit einer zunehmenden Zahl von Seiten der Länge $\sqrt{2}$.

zu A 4.13: Begründen Sie**:** Quadrate, Rauten und symmetrische Drachen besitzen einen Inkreis.

Ein Viereck besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summen der Seitenlängen von je zwei gegenüberliegenden Seiten gleich sind.

Quadrat und Raute haben lauter gleich lange Seiten; daher gilt die Bedingung auch für einander gegenüberliegende Seiten. Für symmetrische Drachen gilt: $a = b$ und $c = d$, also auch $a + c = b + d$.

zu A 4.14:

Symmetrische Trapeze besitzen einen Inkreis, wenn sich die Winkelhalbierenden von α und β sowie von γ und δ in einem gemeinsamen Punkt auf der Symmetrieachse schneiden. Wegen der Symmetrie gilt $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$. Und da einander gegenüberliegende Winkel sich zu 180° ergänzen, gilt: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$, also auch $\alpha + \delta = 180°$ und $\beta + \gamma = 180°$. Daher schneiden sich die Trapez-Winkelhalbierenden w_α und w_δ sowie w_β und w_γ stets im rechten Winkel.

zu A 4.15:

Für den Flächeninhalt eines Tangentenvierecks gilt:

$A = ½ \cdot (x + y) \cdot r + ½ \cdot (y + z) \cdot r + ½ \cdot (z + u) \cdot r + ½ \cdot (u + x) \cdot r = (x + y + z + u) \cdot r$, also

$A = s \cdot r = (a + c) \cdot r = (b + d) \cdot r$.

zu A 4.16:

Wegen $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{r}{w_\alpha}$, $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{r}{w_\beta}$, $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{r}{w_\gamma}$, $\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)=\frac{r}{w_\delta}$ und $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{x}{w_\alpha}$, $\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{y}{w_\beta}$, $\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{z}{w_\gamma}$, $\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)=\frac{u}{w_\delta}$ ergibt sich aus $A = r\cdot s = r\cdot(x+y+z+u) = r\cdot x + r\cdot y + r\cdot z + r\cdot u$

$$A = w_\alpha{}^2\cdot\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)+w_\beta{}^2\cdot\cos\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)+w_\gamma{}^2\cdot\cos\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)+w_\delta{}^2\cdot\cos\left(\tfrac{\delta}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{\delta}{2}\right)$$

und weiter aus $½ \cdot \sin(2\varepsilon) = \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\varepsilon)$ für die halben Winkel dann

$$A = \tfrac{1}{2}\cdot\left[w_\alpha{}^2\cdot\sin(\alpha)+w_\beta{}^2\cdot\sin(\beta)+w_\gamma{}^2\cdot\sin(\gamma)+w_\delta{}^2\cdot\sin(\delta)\right]$$

zu A 4.17:

Ist das Viereck ein Rechteck, dann gilt: $|AB| = |CD|$; $|AD| = |BC|$; $|AC| = |BD|$.

Hier ergibt sich, dass der Satz von Ptolemäus nichts anderes besagt als der Satz von Pythagoras:

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$.

zu A 4.18:

Dass stets ein solches Viereck existiert, kann man wie folgt überlegen: Man betrachtet ein konvexes Gelenkviereck mit den Seitenlängen a, b, c, d, bei dem man die beiden Winkel bei B und D solange verändert, bis für die beiden einander gegenüberliegenden Winkel β und δ gilt: $\beta + \delta = 180°$.

Für die Diagonale $e = |BD|$ und wegen der Vorgabe $\delta = 180° - \beta$ folgt gemäß Kosinussatz

$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\beta) = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos(\delta) = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos(\beta)$, also

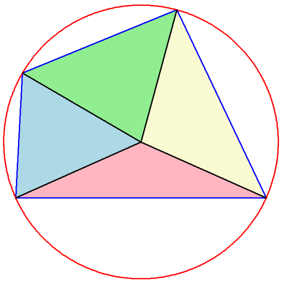
$2 \cdot (ab + cd) \cdot \cos(\beta) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ und somit $\cos(\beta)=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\cdot(ab+cd)}$,

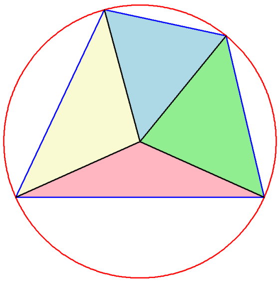
wodurch β und δ festgelegt sind. Da die Winkelsumme 360° beträgt, folgt auch $\alpha + \gamma = 180°$ wobei α analog berechnet werden kann: $\cos(\alpha)=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2\cdot(ad+bc)}$, $\gamma = 180° - \alpha$.

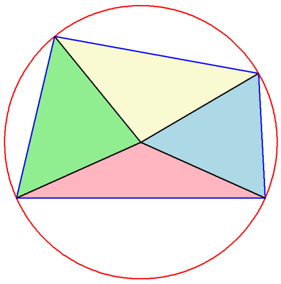
zu A 4.19:

Beispiel: a = 6 cm und

b = 5 cm, c = 4 cm, d = 3 cm b = 4 cm, c = 3 cm, d = 5 cm b = 3 cm, c = 5 cm, d = 4 cm







zu A 4.20:

Dass die drei Vierecke den gleichen Flächeninhalt haben, ergibt sich rechnerisch aus der Flächeninhaltsformel von Brahmagupta, in die nur die Streckenlängen eingehen. Anschaulich ergibt sich dies aus der Darstellung der Sehnenvierecke mit unterschiedlich gefärbten Sektoren, deren Reihenfolge ausgetauscht werden kann.

zu A 4.21:

Wenn die Geraden durch A und D bzw. B und C sich nicht schneiden, sind sie parallel, d. h. $\kappa = 90°$. Verlängert man die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ bis zu einem Schnittpunkt T_2, dann ist das Dreieck T_2GE gleichschenklig mit Basiswinkel λ.

Somit ergibt sich für die Teilvierecke *AEPH* bzw. *PFCG*:

$\alpha + (180° - \lambda) + (180° - \varepsilon) + 90° = 360°$, also $\alpha = \lambda + \varepsilon - 90°$

$(180° - \varepsilon) + 90° + \gamma + \lambda = 360°$, also $\gamma = \varepsilon - \lambda + 90°$

Wenn das Viereck *ABCD* auch ein Sehnenviereck ist, dann muss gelten: $\alpha + \gamma = 180°$.

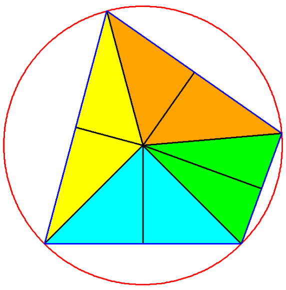
Einsetzen der Bedingungen aus den Teilvierecken führt dann zu

$\alpha + \gamma = (\lambda + \varepsilon - 90°) + (\varepsilon - \lambda + 90°) = 2\varepsilon = 180°$, also $\varepsilon = 90°$.

Entsprechend gilt, wenn die Geraden durch A und B bzw. C und D sich nicht schneiden, dass dann $\lambda = 90°$. Hieraus kann dann ebenfalls $\varepsilon = 90°$ erschlossen werden.

Wenn wegen der Parallelität weder der Punkt T_1 noch der Punkt T_2 existiert, dann liegt ein Quadrat vor, bei dem die Bedingung der Orthogonalität erfüllt ist.

zu A 4.22:



Man betrachte die gleichschenkligen Dreiecke, die sich ergeben, wenn man die Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des Umkreises verbindet, wie beispielsweise beim Sehnenviereck, vgl. Abb.

Bezeichnet man die Mittelpunktswinkel über den Seiten s_1, s_2, s_3, s_4 usw. mit ε_1, ε_2, ε_3, ε_4…, dann gilt in den Teildreiecken jeweils

$$\sin\left(\frac{\varepsilon_k}{2}\right) = \frac{\frac{s_k}{2}}{R} = \frac{s_k}{2R} \text{, also } \varepsilon_k = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s_k}{2R}\right).$$

Da die Winkelsumme für die ε_k stets 360° ergibt, müssen also die Gleichungen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s_1}{2R}\right) + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s_2}{2R}\right) + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s_3}{2R}\right) + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{s_4}{2R}\right) = 360°$$ usw. gelöst werden.

Dies kann numerisch mithilfe eines CAS erfolgen.

Für a = 1, b = 2, c = 3, d = 4 usw. findet man auf diese Weise:

$R_4 \approx 2{,}002602$; $R_5 \approx 2{,}717567$; $R_6 \approx 3{,}646309$, $R_7 \approx 4{,}747537$ usw.

zu A 4.23:

vgl. Beschreibung zu **A 4.12**

zu A 4.24:

In einem regelmäßigen n-Eck ist die Größe des Mittelpunktwinkels gegenüber einer Sehne, bei der ein Punkt mit dem k-nächsten verbunden wird, gegeben durch k · 360°/n, die der zugehörigen Peripheriewinkel entsprechend durch k · 180°/n.

a), b) Die Anzahl der möglichen Dreiecke ist gleich der Anzahl der möglichen Zerlegungen der Zahl n in drei Summanden ohne Beachtung der Reihenfolge (da eine unterschiedliche Reihenfolge der Summanden nur Drehung oder Spiegelung der Figur bedeutet).

Hieraus ergibt sich für Dreiecke im regelmäßigen

Dreieck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 1 = 3; Winkelgrößen: 3x 60°,
Viereck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 2 = 4; Winkelgrößen: 2x 45°, 1x 90°
Fünfeck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 3 = 5; Winkelgrößen: 2x 36°, 1x 108°
	Summendarstellung: 1 + 2 + 2 = 5; Winkelgrößen: 1x 36°, 2x 72°
Sechseck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 4 = 6; Winkelgrößen: 2x 30°, 1x 120°
	Summendarstellung: 1 + 2 + 3 = 6; Winkelgrößen: 1x 30°, 1x 60°, 1x 90°
	Summendarstellung: 2 + 2 + 2 = 6; Winkelgrößen: 3x 60°
Siebeneck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 5 = 7; Winkelgrößen: 2x 25,7°, 1x 128,6°
	Summendarstellung: 1 + 2 + 4 = 7; Winkelgrößen: 1x 25,7°, 1x 51,4°, 1x 102,9°
	Summendarstellung: 1 + 3 + 3 = 7; Winkelgrößen: 1x 25,7°, 2x 77,1°
	Summendarstellung: 2 + 2 + 3 = 7; Winkelgrößen: 2x 51,4°, 1x 77,1°
Achteck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 6 = 8; Winkelgrößen: 2x 22,5°, 1x 135°
	Summendarstellung: 1 + 2 + 5 = 8; Winkelgrößen: 1x 22,5°, 1x 45°, 1x 112,5°
	Summendarstellung: 1 + 3 + 4 = 8; Winkelgrößen: 1x 22,5°, 1x 67,5°, 1x 90°
	Summendarstellung: 2 + 2 + 4 = 8; Winkelgrößen: 2x 45°, 1x 90°
	Summendarstellung: 2 + 3 + 3 = 8; Winkelgrößen: 1x 45°, 2x 67,5°
Neuneck:	Summendarstellung: 1 + 1 + 7 = 9; Winkelgrößen: 2x 20°, 1x 140°
	Summendarstellung: 1 + 2 + 6 = 9; Winkelgrößen: 1x 20°, 1x 40°, 1x 120°
	Summendarstellung: 1 + 3 + 5 = 9; Winkelgrößen: 1x 20°, 1x 60°, 1x 100°
	Summendarstellung: 1 + 4 + 4 = 9; Winkelgrößen: 1x 20°, 2x 80°

Summendarstellung: 2 + 2 + 5 = 9; Winkelgrößen: 2x 40°, 1x 100°

Summendarstellung: 2 + 3 + 4 = 9; Winkelgrößen: 1x 40°, 1x 60°, 1x 80°

Summendarstellung: 3 + 3 + 3 = 9; Winkelgrößen: 3x 60°

Zehneck: Summendarstellung: 1 + 1 + 8 = 10; Winkelgrößen: 2x 18°, 1x 144°

Summendarstellung: 1 + 2 + 7 = 10; Winkelgrößen: 1x 18°, 1x 36°, 1x 126°

Summendarstellung: 1 + 3 + 6 = 10; Winkelgrößen: 1x 18°, 1x 54°, 1x 108°

Summendarstellung: 1 + 4 + 5 = 10; Winkelgrößen: 1x 18°, 1x 72°, 1x 90°

Summendarstellung: 2 + 2 + 6 = 10; Winkelgrößen: 2x 36°, 1x 108°

Summendarstellung: 2 + 3 + 5 = 10; Winkelgrößen: 1x 36°, 1x 54°, 1x 90°

Summendarstellung: 2 + 4 + 4 = 10; Winkelgrößen: 1x 36°, 2x 72°

Summendarstellung: 3 + 3 + 4 = 10; Winkelgrößen: 2x 54°, 1x 72°

vgl. auch OEIS A069905 (Number of partitions of n into 3 positive parts)

c) analog ergibt sich: Die Anzahl der möglichen Vierecke ist gleich der Anzahl der möglichen Zerlegungen der Zahl n in vier Summanden ohne Beachtung der Reihenfolge (da eine unterschiedliche Reihenfolge der Summanden nur Drehung oder Spiegelung der Figur bedeutet).

Da die Summe der Innenwinkel eines Vierecks 360° beträgt, ergibt sich für Vierecke im regelmäßigen

Viereck: Summendarstellung: 1 + 1 + 1 + 1 = 4; Winkelgrößen: 4x 90°

Fünfeck: Summendarstellung: 1 + 1 + 1 + 2 = 5; Winkelgrößen: 3x 72°, 1x 144°

Sechseck: Summendarstellung: 1 + 1 + 1 + 3 = 6; Winkelgrößen: 3x 60°, 1x 180°

Summendarstellung: 1 + 1 + 2 + 2 = 6; Winkelgrößen: 2x 60°, 2x 120°

usw.

vgl. OEIS A026810 (Number of partitions of n into 4 positive parts)

zu A 4.25:

Wenn sich in einem Dreieck zwei Seitenhalbierende, z. B. s_a und s_c, orthogonal schneiden, dann entstehen drei rechtwinklige Teildreiecke, in denen der Satz von Pythagoras angewandt werden kann:

Δ ASC: $\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}s_c\right)^2 = b^2 \iff 4\,s_a^2 + 4\,s_c^2 = 9\,b^2$,

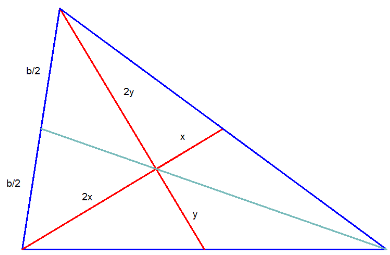
Δ AFS: $\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 \iff 16\,s_a^2 + 4\,s_c^2 = 9\,c^2$,

Δ DCS: $\left(\frac{1}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}s_c\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \iff 4\,s_a^2 + 16\,s_c^2 = 9\,a^2$,

eingesetzt ergibt sich: $9\,a^2 + 9\,b^2 + 9\,c^2 = 24\,s_a^2 + 24\,s_c^2$.

Andererseits ist $9 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 12 \cdot (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$, also folgt:

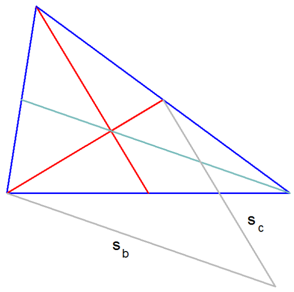
$12\,s_a^2 + 12\,s_c^2 = 12\,s_b^2$, d. h. $s_a^2 + s_c^2 = s_b^2$.



Der Beweis der Beziehung kann auch ohne Verwendung von $3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = 4 \cdot (s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$ mithilfe des Kosinussatzes erfolgen. Aus dem Ansatz x, $2x$, y, $2y$ für die Katheten der rechtwinkligen Dreiecke ergibt sich

$b^2 = 4x^2 + 4y^2$, $(c/2)^2 = y^2 + 4x^2$, $(a/2)^2 = x^2 + 4y^2$

Dann setzt man die Terme für cos(α) in den Dreiecken ABC und ABE gleich und formt diese Gleichung um.



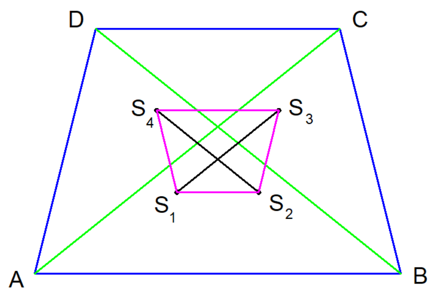
Da sich für den Fall zueinander orthogonaler Seitenhalbierender s_a und s_c zwischen den Seitenhalbierenden die Beziehung $s_a^2 + s_c^2 = s_b^2$ ergibt, bilden diese ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten s_a und s_c sowie der Hypotenuse s_b, vgl. Abb. (mit parallel verschobenen Seitenhalbierenden s_b und s_c).

zu A 4.26:

Bei Rechtecken und Parallelogrammen liegt der Flächenschwerpunkt im Symmetriezentrum des Vierecks, also im Schnittpunkt der Diagonalen.

Beim symmetrischen Drachen und beim symmetrischen Trapez liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse.

- Konkrete Bestimmung des Schwerpunkts beim symmetrischen Trapez, dessen Eckpunkte wie folgt in einem Koordinatensystem gegeben sind:
  $A(-a|0)$, $B(a|0)$, $C(c|h)$, $D(-c|h)$.
  Die Grundseiten haben also die Länge $2a$ und $2c$ und die Höhe ist h.

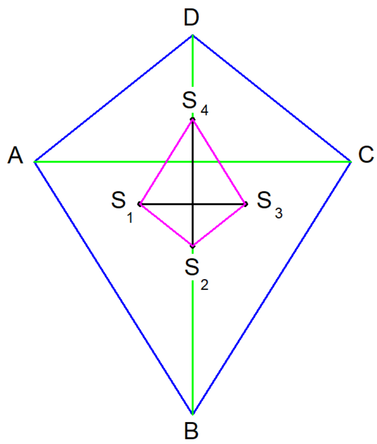


Die Schwerpunkte der Teildreiecke haben die folgenden Koordinaten:

$S_1(-c/3|h/3)$, $S_2(c/3|h/3)$, $S_3(a/3|2h/3)$, $S_4(-a/3|2h/3)$.

Hieraus ergibt sich, dass der Schwerpunkt S, also der Schnittpunkt der Diagonalen S_1S_3 und S_2S_4, die folgenden Koordinaten hat: $\left(0\,|\,\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2c}{a+c}\right)$.

- Konkrete Bestimmung des Schwerpunkts beim symmetrischen Drachen, dessen Eckpunkte wie folgt in einem Koordinatensystem gegeben sind:
  $A(-a|0)$, $B(0|-b)$, $C(a|0)$, $D(0|c)$.
  Die Diagonalen haben also die Längen $2a$ und $b+c$.



Man zeigt, dass die Schwerpunkte der Teildreiecke die folgenden Koordinaten haben:
$S_1(-a/3|(c-b)/3)$, $S_2(0|-b/3)$, $S_3(a/3|(c-b)/3)$, $S_4(0|c/3)$.

Hieraus ergibt sich, dass der Schwerpunkt S, also der Schnittpunkt der Diagonalen S_1S_3 und S_2S_4, die folgenden Koordinaten hat: $\left(0\,|\,\frac{c-b}{3}\right)$.