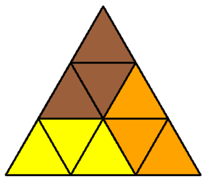
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 3.1:

Trivialerweise können die abgebildeten Dreiecke, die sich aus 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, 1 + 3 + 5 + 7 = 16 bzw. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 einzelnen Dreiecken zusammensetzen, mit **Moniamonds** ausgelegt werden.

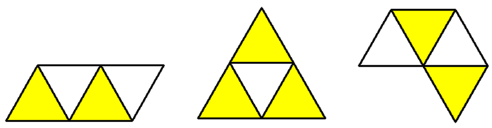
Auch wenn 4 und 16 Anzahlen sind, gelingt es nicht, diese mit **Diamonds** zu parkettieren. An der Färbung im Stile eines Schachbretts ist erkennbar, warum dies nicht möglich ist: Von den 4 Feldern sind ein Feld hell und drei Felder dunkel gefärbt (oder umgekehrt), von den 16 Feldern sind 6 hell und 10 dunkel gefärbt – für eine Parkettierung mit Diamonds müssten es jeweils gleich viele Felder sein.

Für die Parkettierung mit **Triamonds** kommt nur die zweite Figur infrage, da die Anzahl der Felder durch 3 teilbar ist. Von den 9 Feldern der abgebildeten Figur sind 3 hell und 6 dunkel gefärbt, sodass für die Auslegung drei gleiche Triamonds benötigt werden, bei denen ein Dreieck hell und zwei Dreiecke dunkel gefärbt sind. Die Anordnung der drei Triamonds kann beispielsweise so erfolgen:



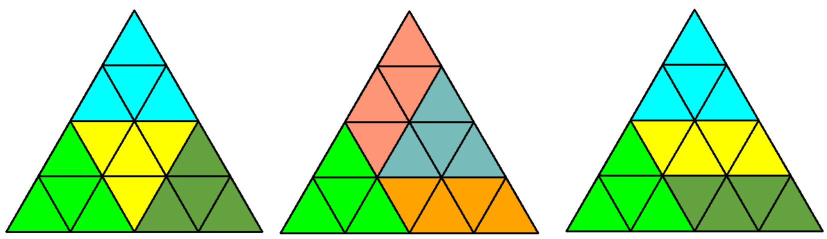
Für die Auslegung mit **Tetriamonds** kommen die Figuren mit 4 bzw. mit 16 Feldern infrage. Die Figur mit 4 Feldern stimmt mit dem zweiten Tetriamond überein.

Schachbrett-Färbung der drei Tetriamonds:



Für die Figur mit 16 Feldern (10 dunkel und 6 hell gefärbt) werden 4 Tetriamonds benötigt. Der dritte Typ von Tetriamonds erweist sich als nicht geeignet, weil bei Verwendung eines solchen Bausteins stets Flächen „abgetrennt“ werden, die nicht ausgelegt werden können.

Die Parkettierung kann unter Verwendung von 4 Bausteinen des zweiten Typs erfolgen (Abb. links) oder von je 2 Bausteinen des ersten und zweiten Typs:

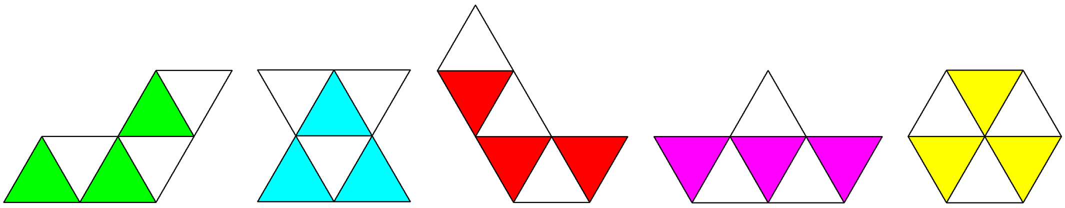


Für die Auslegung mit **Pentiamonds** kommt wegen der Teilbarkeit zunächst nur die Figur aus 25 Dreiecken infrage – hierfür müssten dann 5 Pentiamonds-Bausteine verwendet werden.

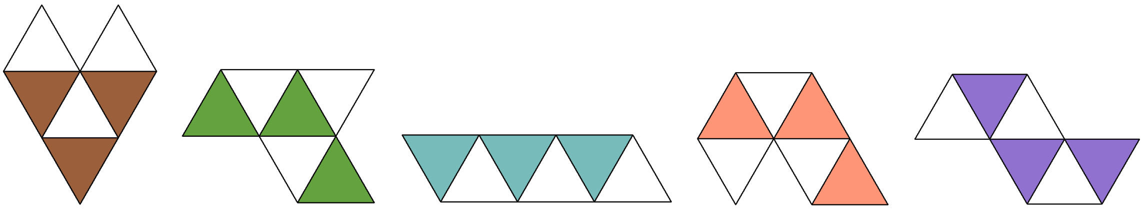
Aus der Schachbrett-Färbung der Figur ergibt sich allerdings, dass 16 Felder hell und 9 dunkel gefärbt sein müssten. Die Schachbrett-Färbung der vier Pentiamonds-Typen ergibt jedoch jeweils ein Verhältnis von 3 zu 2, sodass bei Verwendung von 5 Bausteinen sich ein Ergebnis von 15 zu 10 ergeben kann, aber nicht das notwendige Verhältnis von 16 zu 9.

zu A 3.2:

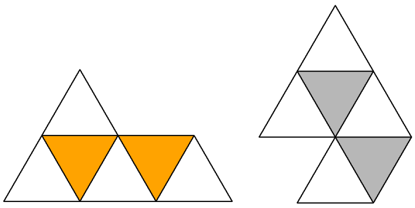
Die ersten 10 aufgeführten Hexiamonds haben eine 3:3-Schachbrett-Färbung, die letzten beiden eine 2:4-Färbung



Bat, Butterfly, Club, Crown, Hexagon



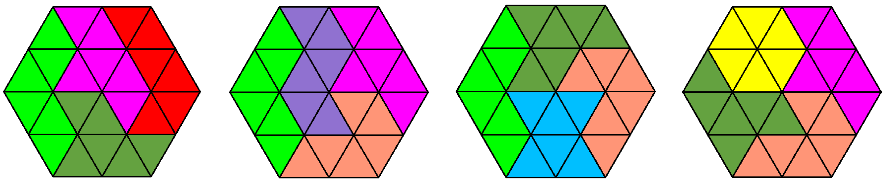
Lobster, Pistol, Rhomboid, *Shoe, Snake,*



Sphinx, Yacht.

zu A 3.3:

Weitere Beispiele:



Da in der 6-Eck-Figur jeweils 12 Dreiecke hell bzw. dunkel gefärbt sind, muss bei Verwendung des Bausteins Sphinx (mit 2:4-Färbung) dies durch einen Baustein Yacht (mit 4:2-Färbung) ausgeglichen werden (oder umgekehrt).

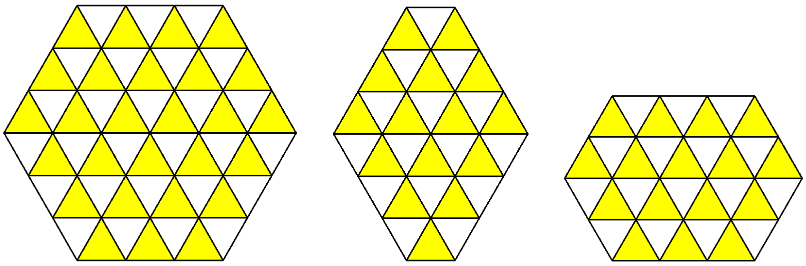
zu A 3.4:

Prüfen der Voraussetzungen:

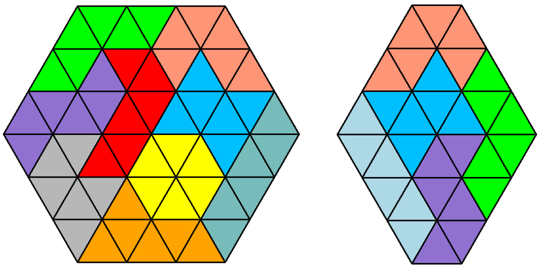
Figur links: jeweils 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27 Dreiecke hell bzw. dunkel gefärbt – Auslegung möglich

Figur Mitte: jeweils 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 Dreiecke hell bzw. dunkel gefärbt

Figur rechts: jeweils 4 + 5 + 4 + 3 = 16 Dreiecke hell bzw. dunkel gefärbt – Auslegung nicht möglich, da die Anzahl der Dreiecksfelder nicht durch 6 teilbar ist.

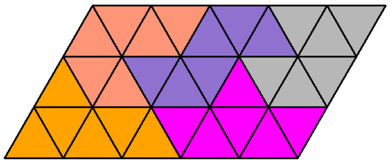


Beispiele für Parkettierungen:

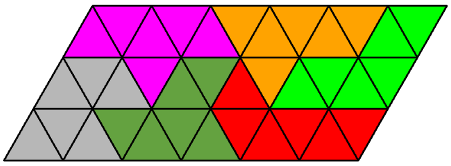


zu A 3.5:

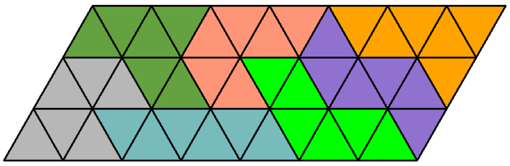
3x5



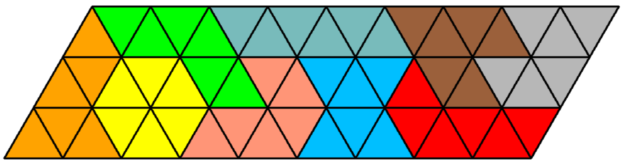
3x6



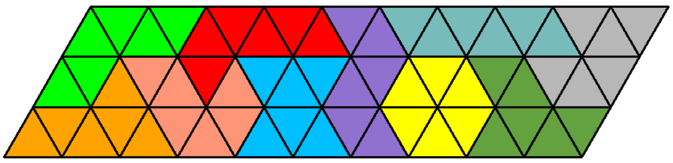
3x7



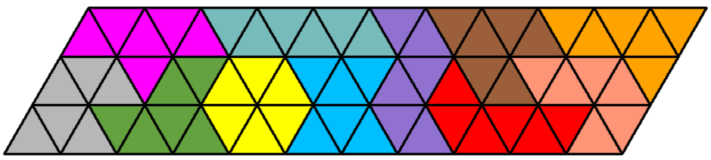
3x9



3x10

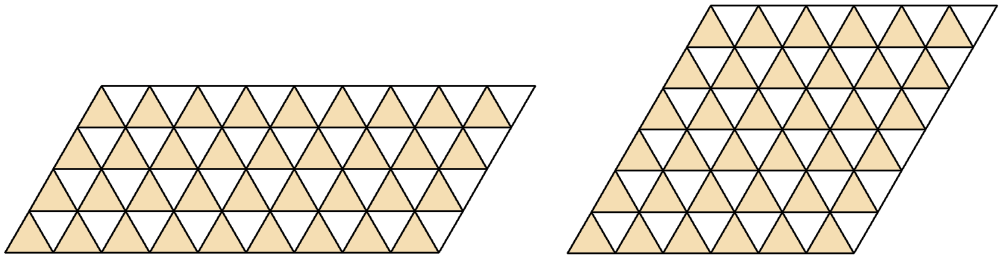


3x11

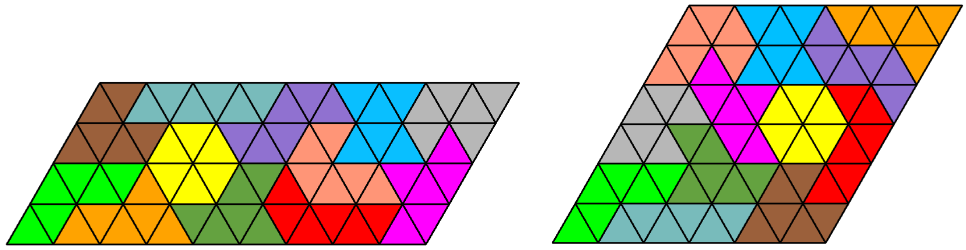


zu A 3.6:

Prüfen der Voraussetzungen: offensichtlich 36 helle und 36 dunkle Felder.

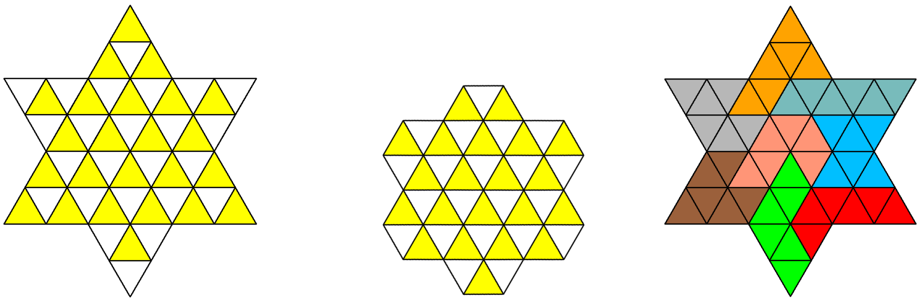


Für das 4x9-Parallelogramm gibt es 74 Lösungen, für das 6x6-Parallelogramm 156.



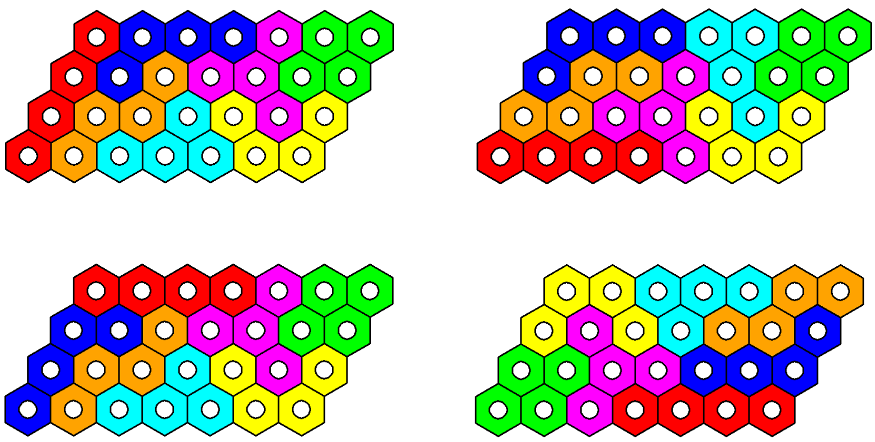
zu A 3.7:

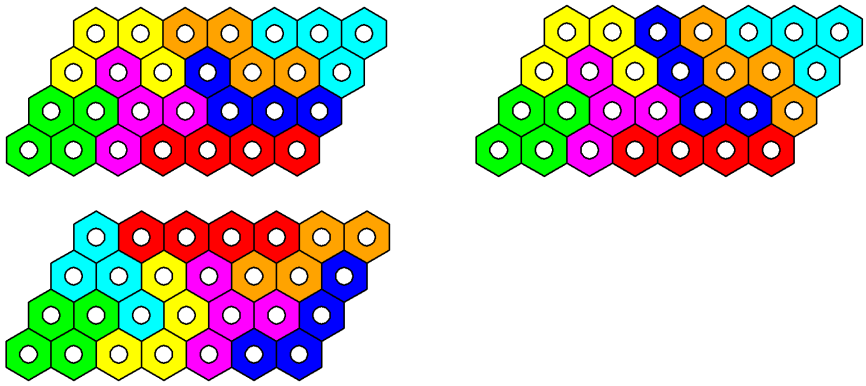
Prüfen der Voraussetzungen: Figur links: jeweils 24 dunkle und helle Felder, Figur rechts: jeweils 21 dunkle und helle Felder. Eine mögliche Parkettierung des Sterns ist rechts abgebildet; eine Parkettierung des abgestumpften Sterns ist nicht bekannt – sie scheint nicht möglich zu sein.



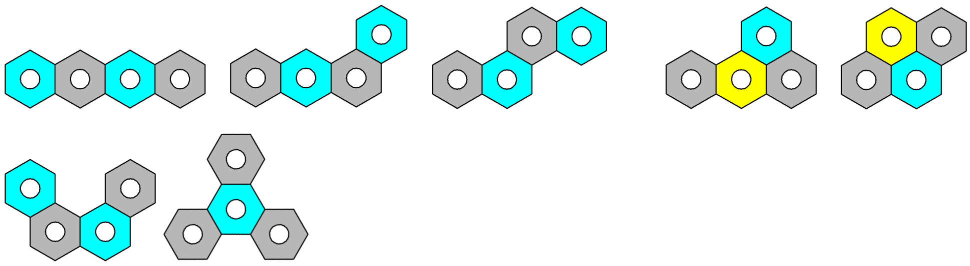
zu A 3.8:

(1) Beim Vergleich der folgenden Abbildungen mit den eigenen Lösungen beachte man, dass eine Drehung um 180° ebenfalls ein 7x4-Parallelogramm ergibt.

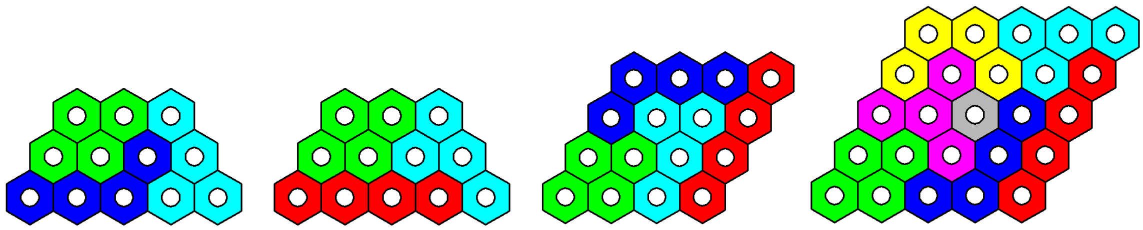




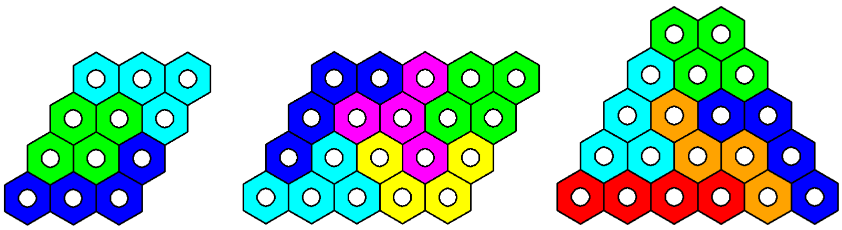
(2) Die letzten beiden Bausteine passen nicht in die Ecken des 7er-Dreiecks. Von den 28 Sechsecken des 7er-Dreiecks müssen bei der schschbratt-artigen Dreifach-Färbung je 9 in der ersten und zweiten Farbe und 10 in der dritten Farbe gefärbt werden. Für die Färbung der ersten drei und der letzten beiden Bausteine genügen zwei Farben. Dass man das 7er-Dreieck nicht parkettieren kann, lässt sich also kaum mit der Färbung begründen.



zu A 3.9:

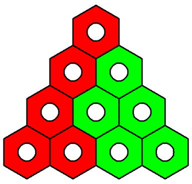


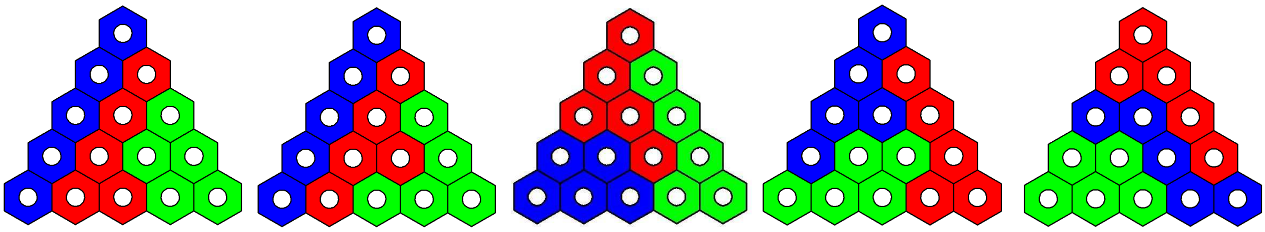
zu A 3.10:



zu A 3.11:

(1)

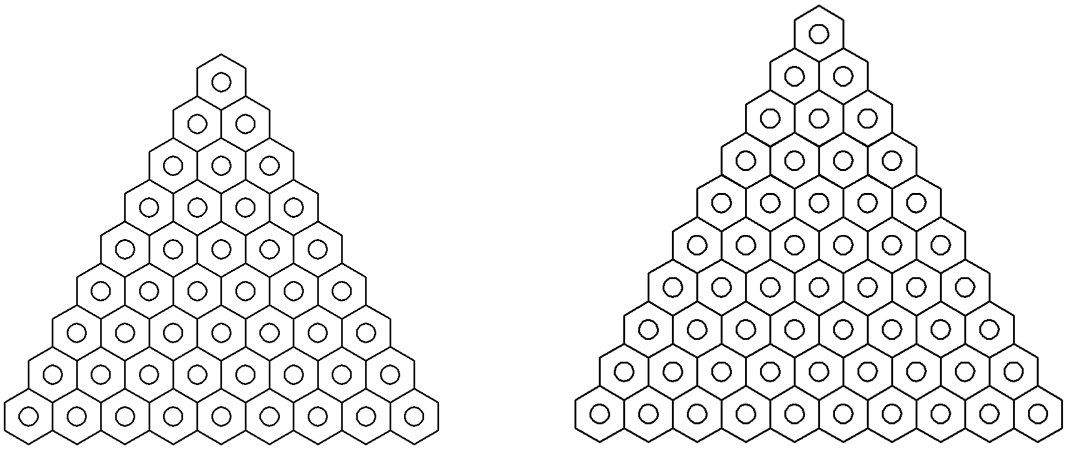




Existieren weitere Parkettierungen?

(2) Aus der Literatur sind keine Parkettierungen bekannt.

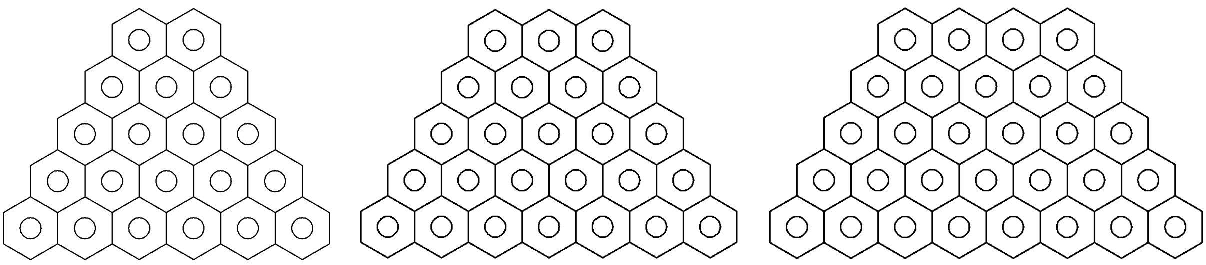
Kopiervorlagen:



zu A 3.12:

Nach dem Satz von Sylvester lässt sich jede natürliche Zahl – mit Ausnahme der Zweierpotenzen – als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen. Sofern die Zahlen keine Dreieckszahlen sind, entstehen trapezförmige Formen, die dann – im Prinzip – mit Pentahexes ausgelegt werden können.

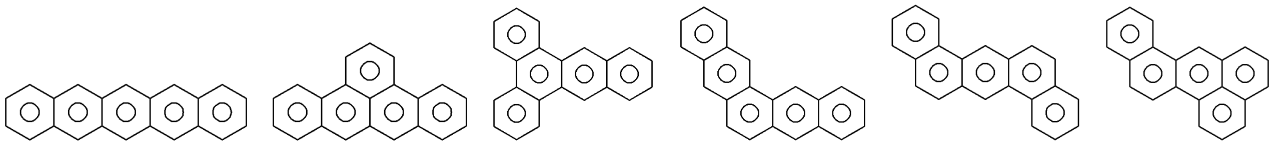
Beispiele: Trapeze aus 20, 25, 30 Sechseckmuttern



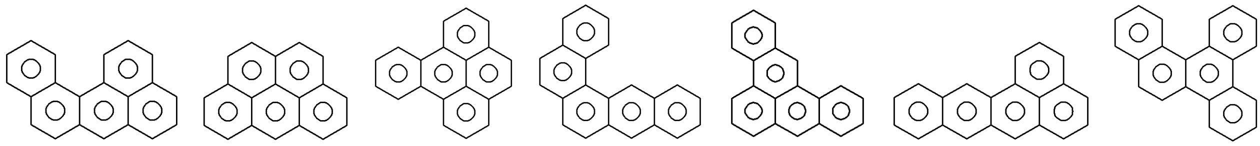
zu A 3.13:

Zur Unterstützung der Suche sind die Pentahexes gefärbt:

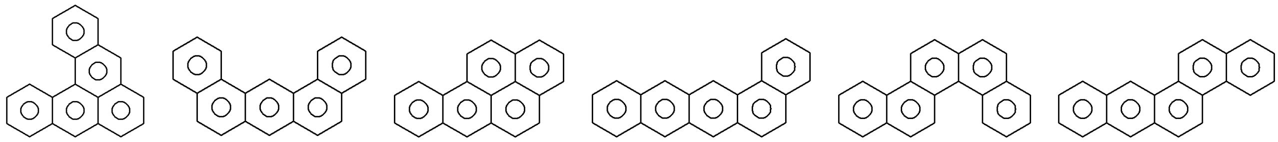
grün:



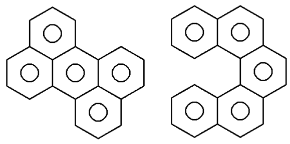
rot:



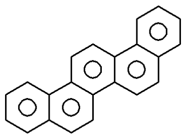
blau:



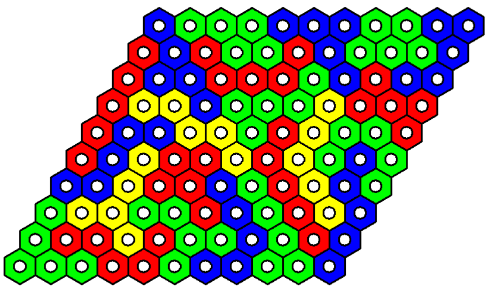
gelb:



Fehlender Pentahex-Baustein:



zu A 3.14:

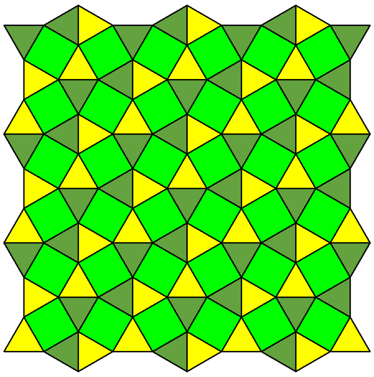


zu A 3.15:

Durch Streckung erhält man aus der zusammengesetzten Figur aus einem Quadrat und den beiden gleichseitigen Dreiecken das daneben abgebildete regelmäßige Sechseck. Da man mit den regelmäßigen Sechsecken die Ebene parkettieren kann, gelingt dies auch mit den „schmaleren“ Bausteinen aus Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken und umgekehrt.

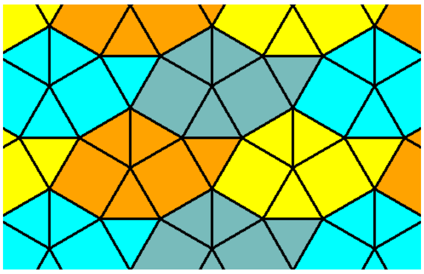
zu A 3.16:

Eine Färbung kann beispielsweise so erfolgen:



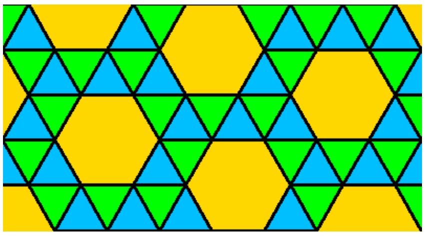
zu A 3.17:

Beispielsweise können Elemente wie folgt zusammengefasst werden:



zu A 3.18:

Es genügt, jedes zweite Dreieck anders zu färben.



zu A 3.19:

Das regelmäßige 12-Eck setzt sich aus sechs Quadraten, sechs gleichseitigen Dreiecken und einem regelmäßigen 6-Eck (= 6 gleichseitige Dreiecke) zusammen. Daher gilt für den Flächeninhalt für ein regelmäßiges 12-Eck mit Seitenlänge s:

$$A = 6s^2 + 12 \cdot \tfrac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3s^2 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)$$

zu A 3.20: Entwickeln Sie anhand der folgenden Grafik eine Formel für den Flächeninhalt eines regelmäßigen Achtecks.

Das regelmäßige 8-Eck mit Seitenlänge s setzt sich zusammen aus vier rechtwinkligen Dreiecken mit Hypotenuse s und Katheten der Länge $\tfrac{s}{2} \cdot \sqrt{2}$, vier Rechtecken mit den Seitenlängen s und $\tfrac{s}{2} \cdot \sqrt{2}$ sowie einem Quadrat der Seitenlänge s:

$$A = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{s}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot s \cdot \tfrac{s}{2} \cdot \sqrt{2} + s^2 = s^2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 1\right) = 2s^2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$$