Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 2.1:

Die analoge Anwendung des Verfahrens beim fünften Baustein führt dazu, dass der oberste Quader noch weiter rechts vom Drehpunkt liegt: $\frac{25}{24}+\frac{1}{10}=\frac{125}{120}+\frac{12}{120}=\frac{137}{120}>1$. Da ein Baustein eine Länge von 1 LE hat, bedeutet dies, dass die linke Seitenfläche des obersten Quaders $\frac{17}{120}\approx 0{,}14$ LE rechts von der Tischkante liegt.

Längenbilanz	Lage in Bezug auf den Drehpunkt	
	links	rechts
1. Baustein (oben)	$-\frac{1}{24}-\frac{1}{10}$ LE	$\frac{25}{24}+\frac{1}{10}$ LE
2. Baustein	$\frac{11}{24}-\frac{1}{10}$ LE	$\frac{13}{24}+\frac{1}{10}$ LE
3. Baustein	$\frac{17}{24}-\frac{1}{10}$ LE	$\frac{7}{24}+\frac{1}{10}$ LE
4. Baustein	$\frac{7}{8}-\frac{1}{10}$ LE	$\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ LE
5. Baustein (unten)	$\frac{9}{10}$ LE	$\frac{1}{10}$ LE
gesamt	2,5 LE	2,5 LE

zu A 2.2:

((eigene Experimente))

zu A 2.3:

Wenn 83 Quader oder mehr in der beschriebenen Weise aufeinander gestapelt werden, liegt der Schwerpunkt des obersten Bausteins $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{166}=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{83})>\frac{1}{2}\cdot 5=2{,}5$ rechts von der Tischkante, also die linke Seitenfläche des obersten Quaders mehr als 1,5 LE rechts von der Tischkante. Entsprechend ergibt sich aus $H_n>6$, dass $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{254}=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{227})>\frac{1}{2}\cdot 6=3$ und weiter, dass für 227 Quader und mehr die linke Seitenfläche des oberstens Quaders mehr als 2 LE rechts von der Tischkante liegt.

zu A 2.4:

Taschenrechner und Tabellenkalkulation verfügen nur über eine beschränkte Anzahl von Stellen, was dazu führt, dass die Addition von immer kleiner werdenden Brüchen zunehmend zu ungenauen Ergebnissen führt (die letzten Stellen der Dezimalzahlentwicklung werden einfach abgeschnitten). Sobald die Brüche kleiner werden als die zur Verfügung stehenden Stellen ermöglichen, wird 0 addiert, sodass sich ein endlicher Grenzwert ergibt.

zu A 2.5:

Jeden einzelnen Summanden kann man als Differenz darstellen:

$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; allgemein $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, denn $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1}{n\cdot(n+1)}-\frac{n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

Daher ergibt sich für jede endliche Anzahl von Summanden:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+...+(\frac{1}{n\cdot}-\frac{1}{n+1})$$

Löst man die Klammern auf, bleibt nur $1-\frac{1}{n+1}$ stehen.

zu A 2.6:

(1) Angenommen, H ist eine endliche Summe. Dann führt die Ungleichung mit $H < H$ zu einem Widerspruch.

(2) Angenommen, H ist eine endliche Summe. Dann kann man den Wert von H mithilfe der Ungleichung abschätzen:

$$H = 1 + \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{10}\right) + \left(\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{13}+\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{15}\right) + \ldots$$
$$> 1 + \tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{6}+\tfrac{4}{10}+\tfrac{5}{15}+\tfrac{6}{21}+\tfrac{7}{28}+\tfrac{8}{36}+\tfrac{9}{45}\ldots = 1+\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{7}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{1}{5}+\ldots$$
$$= \tfrac{2}{2}+\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{4}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2}{6}+\tfrac{2}{7}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{2}{9}+\tfrac{2}{10}+\ldots = 2\cdot(H-1)$$

$H > 2\cdot(H-1)$ bedeutet $H > 2\cdot H - 2$, also $H < 2$.

Dies steht im Widerspruch zu $H_4 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{12+6+4+3}{12} = \tfrac{25}{12} > 2$ und $H_1 < H_2 < H_3 < H_4 < H_5 < \ldots \le H$.

(3) Angenommen, H ist eine endliche Summe. Dann führt die Ungleichung mit $H = \ln(2) + H$ zu $\ln(2) = 0$ und somit zu einem Widerspruch.

(4) Für die Quotienten von Folgengliedern mit ungeradem Index gilt:

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{1}{2} > \frac{f_3}{f_5} = \frac{2}{5} > \frac{f_5}{f_7} = \frac{5}{13} > \frac{f_7}{f_9} = \frac{13}{34} > \ldots \ge 1-\frac{1}{\Phi} \approx 0{,}382 \text{ (Konvergenz von oben)}$$

Für die Quotienten von Folgengliedern mit geradem Index gilt:

$$\frac{f_2}{f_4} = \frac{1}{3} < \frac{f_4}{f_6} = \frac{3}{8} < \frac{f_6}{f_8} = \frac{8}{21} < \frac{f_8}{f_{10}} = \frac{21}{55} < \ldots \le 1-\frac{1}{\Phi} \approx 0{,}382 \text{ (Konvergenz von unten)}$$

Die Quotienten von Folgengliedern mit ungeradem Index sind also auf jeden Fall sämtlich größer als $\frac{f_2}{f_4} = \frac{1}{3}$.

Dass die Folge konvergiert, ergibt sich aus $\frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}-f_n}{f_{n+1}} = 1-\frac{f_n}{f_{n+1}}$ und dass die Folge der Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder der Fibonacci-Folge gegen $\frac{1}{\Phi} \approx 0{,}618$ konvergiert.

Kommentar zu $H_5 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right) > 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5} > 1+3\cdot\tfrac{1}{3}$;

Die Klammer $\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right)$ wird durch den kleineren Summanden abgeschätzt: $\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5} = \tfrac{2}{5}$.

Kommentar zu $H_8 = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}\right)+\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right) > 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{3}{8} > 1+4\cdot\tfrac{1}{3}$

Die Klammer $\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}\right)$ wird durch den kleinsten Summanden abgeschätzt: $\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}$.

zu A 2.7:

Links sind die Stammbrüche als Rechtecke dargestellt; deren Höhe entspricht jeweils den Stammbrüchen 1, $\tfrac{1}{2}$, $\tfrac{1}{3}$ usw., die gesamte (nach rechts weiter gehende) Fläche entspricht der harmonischen Reihe. Durch horizontale Linien entstehen dann in der Abbildung rechts die folgenden Flächenstücke:

grün: $1-\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$, hellblau: $2\cdot(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) = 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}$, rot: $3\cdot(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}) = 3\cdot\tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{4}$, violett: $4\cdot(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}) = 4\cdot\tfrac{1}{20} = \tfrac{1}{5}$ usw.

allgemein: $n\cdot(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}) = n\cdot\tfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \tfrac{1}{n+1}$

zu A 2.8:

Links sind die Stammbrüche als Rechtecke dargestellt; deren Höhe entspricht jeweils den Stammbrüchen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ usw., die gesamte (nach rechts weiter gehende) Fläche entspricht dann der harmonischen Reihe.

In der Grafik rechts sind zunächst jeweils die Teilflächen farbig ausgefüllt worden, die den Stammbrüchen mit geradem Nenner entsprechen, also $\frac{1}{2}$ (grün), $\frac{1}{4}$ (hellblau), $\frac{1}{6}$ (rot) usw., dann im nächsten Schritt auch jeweils eine gleich große Teilfläche im jeweils links davon liegenden Rechteck, sodass bei den Rechteckflächen, die den Stammbrüchen mit ungeradem Nenner entsprechen, jeweils Teilflächen grau gefärbt bleiben. Die grau gefärbte Fläche in der Grafik rechts entspricht dabei der Summe
$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\ldots$

In der Grafik rechts sind also insgesamt Flächenstücke gefärbt, die der folgenden Summe entsprechen:

$2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{8}+\ldots 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$

zu A 2.9:

Die Idee Oresme war es, die Brüche mit Zähler *k* auf *k* Klammern zu verteilen, also den Bruch $\frac{1}{2}$ auf eine Klammer, den Bruch $\frac{2}{4}$ auf 2 Klammern, den Bruch $\frac{3}{8}$ auf 3 Klammern, also allgemein den Bruch $\dfrac{k}{2^k}$ auf *k* Klammern. Dann bestimmte er für jede der Klammern die Grenzwerte.

In den Klammern stehen jeweils geometrische Reihen:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to 1$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to\frac{1}{4}$ usw.

Die Grenzwerte bilden selbst eine geometrische Reihe mit Grenzwert 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

In der Grafik sind horizontal Rechtecke der Breite 1 (blau), $\frac{1}{2}$ (grün), $\frac{1}{4}$ (hellblau), $\frac{1}{8}$ (rot) usw. gezeichnet; diese sind durch vertikale Linien an den Stellen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, … unterteilt, sodass sich jeweils Teilflächen ergeben, die den o. a. Klammern entsprechen, also

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to 1$ (blau), $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to\frac{1}{2}$ (grün), $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}\to\frac{1}{4}$ (hellblau) usw.

zu A 2.10:

Aus $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$ folgt

$$4\cdot\frac{\pi^2}{6}=4\cdot\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)=4+\frac{4}{2^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{6^2}+\frac{4}{7^2}+\ldots$$

$$=4+\frac{1}{1^2}+\frac{4}{3^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{4}{7^2}+\ldots$$

$$=\left(4+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{5^2}+\frac{4}{7^2}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)=4\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)+\frac{\pi^2}{6}$$

also

$$3\cdot\frac{\pi^2}{6}=4\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)\text{, d. h. }\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

zu A 2.11:

Für $n = 1$ ergibt sich eine unendlich große Flächenmaßzahl, da die Fläche mithilfe der harmonischen Reihe abgeschätzt werden kann. Für $n < 1$ verläuft der Graph von $f_n(x)$ oberhalb des Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$; die Flächen sind also erst recht unendlich groß.

Mithilfe des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung kann man für $n > 1$ die Fläche zwischen den Graphen und der x-Achse über einem Intervall [1 ; b] bestimmen:

$$\int_1^b \frac{1}{x^n}dx = \int_1^b x^{-n}dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^b = \left[-\frac{1}{(n-1)\cdot x^{n-1}}\right]_1^b = -\frac{1}{(n-1)\cdot b^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$$

Für größer werdendes b konvergiert der rechts stehende Term gegen $\frac{1}{n-1}$.

Dies gilt nicht nur für natürliche Exponenten, sondern auch für beliebige reelle Zahlen $n > 1$.

Nähert man sich mit dem Exponenten n (von oben) der Zahl 1, so kann man erkennen, dass die Maßzahlen der Flächenstücke immer größer werden, aber endliche Zahlen sind, der Fall $n = 1$ ist also ein besonderer Fall, ein Grenzfall.

n	1,5	1,1	1,01	1,001	1,0001	…
$\frac{1}{n-1}$	2	10	100	1000	10000	…

Daher gibt es unter den Funktionen vom Typ $f_a(x) = \frac{1}{x^a}$ keine Funktion, bei der der Flächeninhalt so langsam divergiert wie bei $f_1(x) = \frac{1}{x^1}$.