Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 1.1:

Da sich die Zahl 6 auf drei Arten als Summe darstellen lässt: 6 = 1 + 5 = 2 + 4 = 3 + 3,

ergeben sich die sechs verschiedene 6er-Mobiles wie folgt:

- eine Kugel wird mit einem der drei 5er-Mobiles ins Gleichgewicht gebracht (drei Fälle 6.1, 6.2 und 6.3), oder
- ein 2er-Mobile wird mit einem der beiden 4er-Mobiles kombiniert (zwei Fälle 6.4 und 6.5), oder
- zwei 3er-Mobiles werden verwendet (Fall 6.6).

Die Aufhängung der oberen Stange muss dabei entsprechend durch Unterteilung im Verhältnis 5 : 1 (bei den ersten drei der abgebildeten Mobiles) bzw. 4 : 2 (bei den nächsten beiden) bzw. 3 : 3 (beim letzten) erfolgen.

zu A 1.2:

k = 3, also s = 1: $m_3 = m_1 \cdot m_2 = 1 \cdot 1 = 1$

k = 4, also s = 2: $m_4 = m_1 \cdot m_3 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (m_2 + 1) = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 2$.

zu A 1.3:

k = 11, also s = 5: $m_{11} = m_1 \cdot m_{10} + m_2 \cdot m_9 + m_3 \cdot m_8 + m_4 \cdot m_5 + m_5 \cdot m_6 = 207$

k = 12, also s = 6: $m_{12} = m_1 \cdot m_{11} + m_2 \cdot m_{10} + m_3 \cdot m_9 + m_4 \cdot m_8 + m_5 \cdot m_7 + \frac{1}{2} \cdot m_6 \cdot (m_6 + 1) = 451$

zu A 1.4:

k	m_k
1	1
2	1
3	1
4	2
5	3

k	m_k
6	6
7	11
8	23
9	46
10	98

k	m_k
11	207
12	451
13	983
14	2179
15	4850

k	m_k
16	10905
17	24631
18	56011
19	127912
20	293547

k	m_k
21	676157
22	1563372

zu A 1.5:

„o“ steht für die Kugeln, () für ein Gehänge

- k = 5:

1+4: (o((o(o(oo)))) oder (o((oo)(oo))) oder

2+3: ((oo) (o(oo)))

- k = 6:

1+5: (o(o((o(o(oo))))) oder (o(o((oo)(oo)))) oder (o((oo) (o(oo))))

2+4: ((oo)(o(o(oo)))) oder ((oo)((oo)(oo)))

3+3: ((o(oo))(o(oo)))

- *k* = 7:

1+6: (o(o(o((o(o(oo)))))) oder (o(o(o((oo)(oo))))) oder (o(o((oo) (o(oo))))) oder (o((oo)(o(o(oo))))) oder (o((oo)((oo)(oo)))) oder (o((o(oo))(o(oo))))

2+5: ((oo)(o((o(o(oo))))) oder ((oo)(o((oo)(oo)))) oder ((oo)((oo) (o(oo))))

3+4: ((o(oo))(o(o(oo)))) oder ((o(oo))((oo)(oo)))

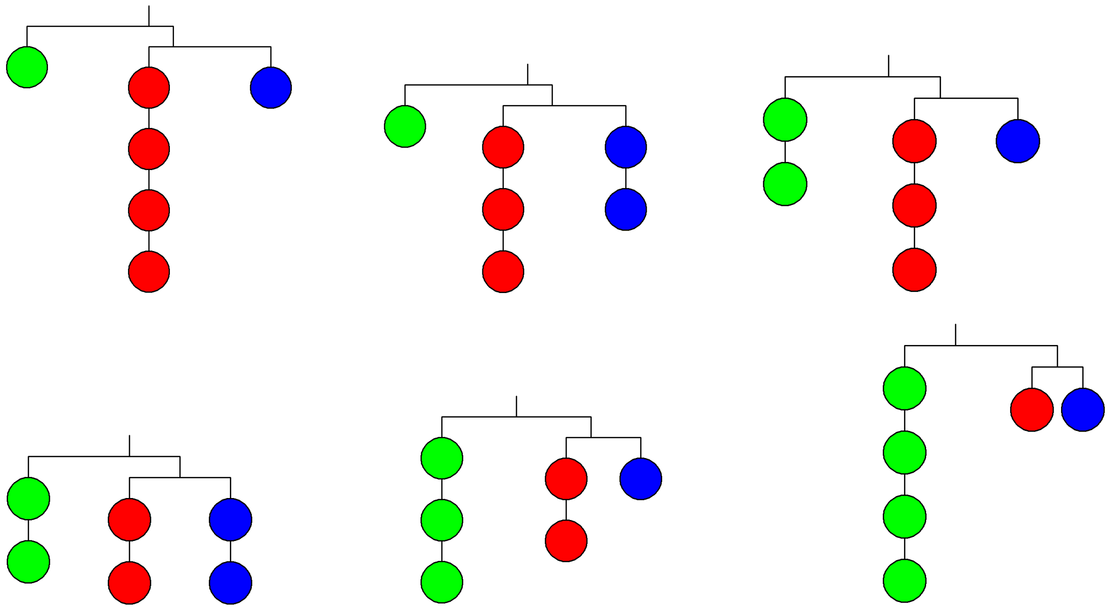
Die verschiedenen Möglichkeiten wurden schrittweise durch Kopieren erzeugt; analog ist dies für den Fall *k* = 8 durchführbar.

zu A 1.6:

(1) *k* = 6: (1 ; 4 ; 1); (1 ; 3 ; 2); (2 ; 3 ; 1); (2 ; 2 ; 2); (3 ; 2; 1); (4 ; 1 ; 1)

Die Längen von Last- und Kraftarm stehen

- in der ersten Abbildung im Verhältnis 5 : 1 (obere Stange) und 1 : 4 (untere Stange),
- in der zweiten Abbildung im Verhältnis 5 : 1 (obere Stange) und 2 : 3 (untere Stange),
- in der dritten Abbildung im Verhältnis 4 : 2 (obere Stange) und 1 : 3 (untere Stange),
- in der vierten Abbildung im Verhältnis 4 : 2 (obere Stange) und 2 : 2 (untere Stange),
- in der fünften Abbildung im Verhältnis 3 : 3 (obere Stange) und 1 : 2 (untere Stange),
- in der sechsten Abbildung im Verhältnis 2 : 4 (obere Stange) und 1 : 1 (untere Stange).



(2) *k* = 7: (1 ; 5 ; 1); (1 ; 4 ; 2); (1 ; 3 ; 3); (2 ; 4 ; 1); (2 ; 3 ; 2); (3 ; 3 ; 1); (3 ; 2 ; 2); (4 ; 2 ; 1); (5 ; 1 ; 1)

zu A 1.7:

k = 9: 16 Möglichkeiten

(1 ; 7 ; 1); (1 ; 6 ; 2); (1 ; 5 ; 3); (1 ; 4 ; 4); (2 ; 6 ; 1); (2 ; 5 ; 2); (2 ; 4 ; 3); (3 ; 5 ; 1); (3 ; 4 ; 2); (3 ; 3 ; 3); (4 ; 4 ; 1); (4 ; 3 ; 2); (5 ; 3 ; 1); (5 ; 2 ; 2); (6 ; 2 ; 1); (7 ; 1 ; 1)

k = 10: 20 Möglichkeiten

(1 ; 8 ; 1); (1 ; 7 ; 2); (1 ; 6 ; 3); (1 ; 5 ; 4); (2 ; 7 ; 1); (2 ; 6 ; 2); (2 ; 5 ; 3); (2 ; 4 ; 4); (3 ; 6 ; 1); (3 ; 5 ; 2); (3 ; 4 ; 3); (4 ; 5 ; 1); (4 ; 4 ; 2); (4 ; 3 ; 3); (5 ; 4 ; 1); (5 ; 3 ; 2); (6 ; 3 ; 1); (6 ; 2 ; 2); (7 ; 2 ; 1); (8 ; 1 ; 1)

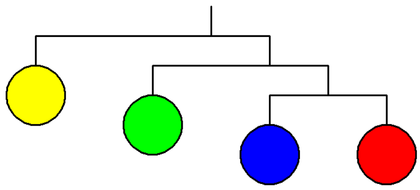
zu A 1.8:

Nach Eingabe der Parameterwerte wurde gezeichnet:

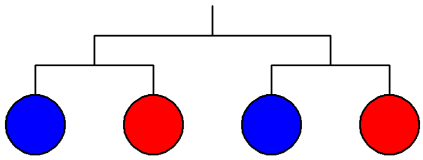
– eine Einheit nach unten (= obere Aufhängung),
– linker Teil der oberen Stange mit $(r + b)/(g + r + b)$ der festgelegten Stangenlänge,
– g-mal (eine Einheit nach unten und eine grüne Kugel),
– rechter Teil der oberen Stange mit $g/(g + r + b)$ der festgelegten Stangenlänge,
– eine Einheit nach unten,
– linker Teil der unteren Stange mit $b/(r + b)$ der festgelegten Stangenlänge,
– r-mal (eine Einheit nach unten und eine rote Kugel),
– rechter Teil der unteren Stange mit $r/(r + b)$ der festgelegten Stangenlänge,
– b-mal (eine Einheit nach unten und eine blaue Kugel).

zu A 1.9:

Typ 1:



Typ 2:



Die Mobiles des **1. Typs** können als 4-Tupel notiert werden, also:

– Wenn die Aufhängung links 1 Kugel trägt, werden für die letzten drei Koordinaten die verschiedenen Möglichkeiten mit drei Aufhängungen und $k – 1$ Kugeln berücksichtigt.

In Kapitel 2.1 findet man zu den Möglichkeiten mit *drei* Aufhängungen:

$k = 3$: (1 ; 1 ; 1)

$k = 4$: (1 ; 2 ; 1); (2 ; 1 ; 1)

$k = 5$: (1 ; 3 ; 1); (1 ; 2 ; 2); (2 ; 2 ; 1); (3 ; 1 ; 1)

usw.

Hieraus ergeben sich also hier bei den Mobiles mit *vier* Aufhängungen:

$k = 4$: (1 ; 1 ; 1 ; 1)

$k = 5$: (1 ; 1 ; 2 ; 1); (1 ; 2 ; 1 ; 1)

$k = 6$: (1 ; 1 ; 3 ; 1); (1 ; 1 ; 2 ; 2); (1 ; 2 ; 2 ; 1); (1 ; 3 ; 1 ; 1);

usw.

Entsprechend findet man:

– Wenn die Aufhängung links 2 Kugeln trägt, werden für die letzten drei Koordinaten die verschiedenen Möglichkeiten mit drei Aufhängungen und $k – 2$ Kugeln berücksichtigt.

$k = 5$: (2 ; 1 ; 1 ; 1)

$k = 6$: (2 ; 1 ; 2 ; 1); (2 ; 2 ; 1 ; 1)

$k = 7$: (2 ; 1 ; 3 ; 1); (2 ; 1 ; 2 ; 2); (2 ; 2 ; 2 ; 1); (2 ; 3 ; 1 ; 1)

usw.

– Wenn die Aufhängung links 3 Kugeln trägt, werden für die letzten drei Koordinaten die verschiedenen Möglichkeiten mit drei Aufhängungen und $k – 3$ Kugeln berücksichtigt.

usw.

Fasst man diese Fälle zusammen, dann ergibt sich:

k = 4: (1 ; 1 ; 1 ; 1)

k = 5: (1 ; 1 ; 2 ; 1); (1 ; 2 ; 1 ; 1) und (2 ; 1 ; 1 ; 1)

k = 6: (1 ; 1 ; 3 ; 1); (1 ; 1 ; 2 ; 2); (1 ; 2 ; 2 ; 1); (1 ; 3 ; 1 ; 1) und (2 ; 1 ; 2 ; 1); (2 ; 2 ; 1 ; 1) und (3 ; 1 ; 1 ; 1)

k = 7: (1 ; 1 ; 4 ; 1); (1 ; 1 ; 3 ; 2); (1 ; 2 ; 3 ; 1); (1 ; 2 ; 2 ; 2); (1 ; 3 ; 2; 1); (1 ; 4 ; 1 ; 1) und (2 ; 1 ; 3 ; 1); (2 ; 1 ; 2 ; 2); (2 ; 2 ; 2 ; 1); (2 ; 3 ; 1 ; 1) und (3 ; 1 ; 2 ; 1); (3 ; 2 ; 1 ; 1) und (4 ; 1 ; 1 ; 1)

usw.

Hiermit ergeben sich die folgenden Anzahlen:

Anzahl *k* der Kugeln insgesamt	Anzahl der gelben Kugeln (links)								Anzahl *s*(*k*) der Möglichkeiten (Summe)
	1	2	3	4	5	6	7	…	
4	1								1
5	2	1							3
6	4	2	1						7
7	6	4	2	1					13
8	9	6	4	2	1				22
9	12	9	6	4	2	1			34
10	16	12	9	6	4	2	1		50
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Offensichtlich kann die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten iterativ erfolgen, da zum Summenwert für $k - 1$ Kugeln aus der letzten Spalte (grün) der Wert der zweiten Spalte (gelb) hinzukommt.

Um den zugehörigen Funktionsterm herauszufinden, kann man jedes zweite Glied betrachten und die Differenzen bestimmen.

– Für die Folge s(1) = 1, s(3) = 7, s(5) = 22, s(7) = 50, s(9) = 95, s(11) = 161, s(13) = 252, s(15) = 372, … findet man die Differenzenfolge d(1) = 6, d(3) = 15, d(5) = 28, d(7) = 45, d(9) = 66, d(11) = 91, d(13) = 120, …

– Für die Folge s(2) = 3, s(4) = 13, s(6) = 34, s(8) = 70, s(10) = 125, s(12) = 203, s(14) = 308, s(16) = 444, … ergibt sich die Differenzenfolge d(2) = 10, d(4) = 21, d(6) = 36, d(8) = 55, d(10) = 78, d(12) = 105, d(14) = 136, …

Die Folge 6, 10, 15, 21, 28, … ist eine Teilfolge der Dreieckszahlen (vgl. *Mathematik ist schön*, Kap. 16).

Beide Differenzenfolgen lassen sich mithilfe *desselben* Terms beschreiben: $d(k) = ½ \cdot (k + 2) \cdot (k + 3)$.

Die gesuchten Folgen sind also arithmetische Folgen 3. Ordnung.

Wie in Kap. 16 von *Mathematik ist schön* ausgeführt wird, kann man den Term der gesuchten Folge s(k) auf unterschiedliche Weise ermitteln. Hier verwenden wir die Methode mithilfe eines linearen Gleichungssystems:

$$\left| \begin{array}{r} s(1) = 1 \\ s(3) = 7 \\ s(5) = 22 \\ s(7) = 50 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} a + b + c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 7 \\ 125a + 25b + 5c + d = 22 \\ 343a + 49b + 7c + d = 50 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = \frac{1}{12} \\ b = \frac{3}{8} \\ c = \frac{5}{12} \\ d = \frac{1}{8} \end{array} \right|$$

Die Folgenglieder mit *ungeradem k* lassen sich mithilfe von
$s(k) = \frac{1}{12}k^3 + \frac{3}{8}k^2 + \frac{5}{12}k + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}\cdot(k+1)\cdot(k+3)\cdot(2k+1)$ berechnen.

$$\left|\begin{array}{l} s(2)=3 \\ s(4)=13 \\ s(6)=34 \\ s(8)=70 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 8a+4b+2c+d=3 \\ 64a+16b+4c+d=13 \\ 216a+36b+6c+d=34 \\ 512a+64b+8c+d=70 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=\frac{1}{12} \\ b=\frac{3}{8} \\ c=\frac{5}{12} \\ d=0 \end{array}\right|$$

Die Folgenglieder mit *geradem k* lassen sich mithilfe von $s(k) = \frac{1}{12}k^3 + \frac{3}{8}k^2 + \frac{5}{12}k = \frac{1}{24}\cdot k\cdot(2k+5)\cdot(k+2)$ berechnen.

Hinweis 1: Bei OEIS findet man die gesamte Folge unter A002623.

Hinweis 2: Die Koeffizienten des Folgenterms können auch mithilfe eines Programms zur kubischen Regression ermittelt werden.

- **Typ 2**

Im Unterschied zu Typ 1 muss bei Typ 2 beachtet werden, dass diese Mobiles eine symmetrisch angeordnete Aufhängung haben. Diese notieren wir daher als Paar von Paaren:

k = 4: ((1 ; 1);(1 ; 1)), also 1 Möglichkeit

k = 5: ((2 ; 1);(1 ; 1)), also 1 Möglichkeit

An diesem Fall erkennt man, welche anderen Möglichkeiten hierin enthalten sind; denn durch Drehung kann man die weiteren Möglichkeiten ((1 ; 2);(1 ; 1)), ((1 ; 1);(2 ; 1)), ((1 ; 1);(1 ; 2)) in den Zustand ((2 ; 1);(1 ; 1)) bringen.

k = 6:

((3 ; 1);(1 ; 1)), ((2 ; 2);(1 ; 1)),
((2 ; 1);(2 ; 1))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
4	2	2 · 1 = 2
3	3	1 · 1 = 1
gesamt		3

k = 7:

((4 ; 1);(1 ; 1)), ((3 ; 2);(1 ; 1)),
((3 ; 1);(2 ; 1)), ((2 ; 2);(2 ; 1))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
5	2	2 · 1 = 2
4	3	2 · 1 = 2
gesamt		4

k = 8:

((5 ; 1);(1 ; 1)), ((4 ; 2);(1 ; 1)), ((3 ; 3);(1 ; 1)),
((4 ; 1);(2 ; 1)), ((3 ; 2);(2 ; 1)),
((3 ; 1);(3 ; 1)), ((3 ; 1);(2 ; 2)), ((2 ; 2);(2 ; 2))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
6	2	3 · 1 = 3
5	3	2 · 1 = 2
4	4	2 + 1 = 3
gesamt		8

k = 9:

((6 ; 1);(1 ; 1)), ((5 ; 2);(1 ; 1)), ((4 ; 3);(1 ; 1)),
((5 ; 1);(2 ; 1)), ((4 ; 2);(2 ; 1)), ((3 ; 3);(2 ; 1)),
((4 ; 1);(3 ; 1)), ((4 ; 1);(2 ; 2)), ((3 ; 2);(3 ; 1)), ((3 ; 2);(2 ; 2))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
7	2	3 · 1 = 3
6	3	3 · 1 = 3
5	4	2 · 2 = 4
gesamt		10

k = 10:

((7 ; 1);(1 ; 1)), ((6 ; 2);(1 ; 1)), ((5 ; 3);(1 ; 1)), ((4 ; 4);(1 ; 1)),
((6 ; 1);(2 ; 1)), ((5 ; 2);(2 ; 1)), ((4 ; 3);(2 ; 1)),
((5 ; 1);(3 ; 1)), ((5 ; 1);(2 ; 2)), ((4 ; 2);(3 ; 1)), ((4 ; 2);(2 ; 2)), ((3 ; 3);(3 ; 1)), ((3 ; 3);(2 ; 2)),
((4 ; 1);(4 ; 1)), ((4 ; 1);(3 ; 2)), ((3 ; 2);(3 ; 2))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
8	2	4 · 1 = 4
7	3	3 · 1 = 3
6	4	3 · 2 = 6
5	5	2 + 1 = 3
gesamt		16

$k = 11$:

((8 ; 1);(1 ; 1)), ((7 ; 2);(1 ; 1)), ((6 ; 3);(1 ; 1)), ((5 ; 4);(1 ; 1)),
((7 ; 1);(2 ; 1)), ((6 ; 2);(2 ; 1)), ((5 ; 3);(2 ; 1)), ((4 ; 4);(2 ; 1)),
((6 ; 1);(3 ; 1)), ((6 ; 1);(2 ; 2)), ((5 ; 2);(3 ; 1)), ((5 ; 2);(2 ; 2)), ((4 ; 3);(3 ; 1)), ((4 ; 3);(2 ; 2)),
((5 ; 1);(4 ; 1)), ((5 ; 1);(3 ; 2)), ((4 ; 2);(4 ; 1)), ((4 ; 2);(3 ; 2)), ((3 ; 3);(4 ; 1)), ((3 ; 3);(3 ; 2))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
9	2	4 · 1 = 4
8	3	4 · 1 = 4
7	4	3 · 2 = 6
6	5	3 · 2 = 6
gesamt		20

$k = 12$:

((9 ; 1);(1 ; 1)), ((8 ; 2);(1 ; 1)), ((7 ; 3);(1 ; 1)), ((6 ; 4);(1 ; 1)), ((5 ; 5);(1 ; 1)),
((8 ; 1);(2 ; 1)), ((7 ; 2);(2 ; 1)), ((6 ; 3);(2 ; 1)), ((5 ; 4);(2 ; 1)),
((7 ; 1);(3 ; 1)), ((7 ; 1);(2 ; 2)), ((6 ; 2);(3 ; 1)), ((6 ; 2);(2 ; 2)), ((5 ; 3);(3 ; 1)), ((5 ; 3);(2 ; 2)), ((4 ; 4);(3 ; 1)), ((4 ; 4);(2 ; 2)),
((6 ; 1);(4 ; 1)), ((6 ; 1);(3 ; 2)), ((5 ; 2);(4 ; 1)), ((5 ; 2);(3 ; 2)), ((4 ; 3);(4 ; 1)), ((4 ; 3);(3 ; 2)),
((5 ; 1);(5 ; 1)), ((5 ; 1);(4 ; 2)), ((5 ; 1);(3 ; 3)), ((4 ; 2);(4 ; 2)), ((4 ; 2);(3 ; 3)), ((3 ; 3);(3 ; 3))

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
10	2	5 · 1 = 5
9	3	4 · 1 = 4
8	4	4 · 2 = 8
7	5	3 · 2 = 6
6	6	3 + 2 + 1 = 6
gesamt		29

$k = 13$:

((10 ; 1);(1 ; 1)), ((9 ; 2);(1 ; 1)), ((8 ; 3);(1 ; 1)), ((7 ; 4);(1 ; 1)), ((6 ; 5);(1 ; 1)),
((9 ; 1);(2 ; 1)), ((8 ; 2);(2 ; 1)), ((7 ; 3);(2 ; 1)), ((6 ; 4);(2 ; 1)), ((5 ; 5);(2 ; 1)),
((8 ; 1);(3 ; 1)), ((8 ; 1);(2 ; 2)), ((7 ; 2);(3 ; 1)), ((7 ; 2);(2 ; 2)), ((6 ; 3);(3 ; 1)), ((6 ; 3);(2 ; 2)), ((5 ; 4);(3 ; 1)), ((5 ; 4);(2 ; 2)),
((7 ; 1);(4 ; 1)), ((7 ; 1);(3 ; 2)), ((6 ; 2);(4 ; 1)), ((6 ; 2);(3 ; 2)), ((5 ; 3);(4 ; 1)), ((5 ; 3);(3 ; 2)), ((4 ; 4);(4 ; 1)), ((4 ; 4);(3 ; 2)),
((6 ; 1);(5 ; 1)), ((6 ; 1);(4 ; 2)), ((6 ; 1);(3 ; 3)), ((5 ; 2);(5 ; 1)), ((5 ; 2);(4 ; 2)), ((5 ; 2);(3 ; 3)), ((4 ; 3);(5 ; 1)), ((4 ; 3);(4 ; 2)),
((4 ; 3);(3 ; 3)),

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
11	2	5 · 1 = 5
10	3	5 · 1 = 5
9	4	4 · 2 = 8
8	5	4 · 2 = 8
7	6	3 · 3 = 9
gesamt		35

$k = 14$

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
12	2	6 · 1 = 6
11	3	5 · 1 = 5
10	4	5 · 2 = 10
9	5	4 · 2 = 8
8	6	4 · 3 = 12
7	7	3 + 2 + 1 = 6
gesamt		47

$k = 15$

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
13	2	6 · 1 = 6
12	3	6 · 1 = 6
11	4	5 · 2 = 10
10	5	5 · 2 = 10
9	6	4 · 3 = 12
8	7	4 · 3 = 12
gesamt		56

$k = 16$

Summe 1. Paar	Summe 2. Paar	Anzahl der Möglichkeiten
14	2	7 · 1 = 7
13	3	6 · 1 = 6
12	4	6 · 2 = 12
11	5	5 · 2 = 10
10	6	5 · 3 = 15
9	7	4 · 3 = 12
8	8	4+3+2+1=10
gesamt		72

Im Falle der *ungeraden* Anzahl von Kugeln ergibt sich ein einfach zu bestimmter Folgenterm:

Die Differenzenfolge von 1, 4, 10, 20, 35, 56, … ist 3, 6, 10, 15, 21, …, also eine Teilfolge der Folge der Dreieckszahlen. Wie oben kann ein Ansatz mithilfe einer arithmetischen Folge 3. Ordnung durchgeführt werden:

$$\left|\begin{array}{r} s(5)=1 \\ s(7)=4 \\ s(9)=10 \\ s(11)=20 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 125a+25b+5c+d=1 \\ 343a+49b+7c+d=4 \\ 729a+81b+9c+d=10 \\ 1331a+121b+11c+d=20 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a=\frac{1}{48} \\ b=-\frac{3}{48} \\ c=-\frac{1}{48} \\ d=\frac{3}{48} \end{array}\right|$$

Die Folgenglieder mit *ungeradem k* (also k = 5, 7, 9, 11, …) lassen sich mithilfe von
$s(k)=\frac{1}{48}k^3-\frac{3}{48}k^2+-\frac{1}{48}k+\frac{3}{48}=\frac{1}{48}\cdot(k+1)\cdot(k-1)\cdot(k-3)$ berechnen.

Im Falle der *geraden* Anzahl von Kugeln ist der Sachverhalt komplizierter:

Die zweite Differenzenfolge der Folge 1, 3, 8, 16, 29, 47, 72, … ist 3, 3, 5, 5, 7, 7, …, sodass zwei Ansätze erforderlich sind: ein Term für die Folge 1, 8, 29, 72, 145, 256, … und ein Term für die Folge 3, 16, 47, 104, 195, 328, …

Für k = 4, 8, 12, 16, … ergibt sich: $s(k)=\frac{1}{48}k^3-\frac{1}{16}k^2+\frac{1}{6}k$

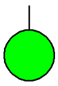
Für k = 2, 6, 10, 14, … ergibt sich: $s(k)=\frac{1}{48}k^3+\frac{3}{16}k^2+\frac{2}{3}k+\frac{3}{4}$.

Hinweis: Bei OEIS findet man die gesamte Folge unter A005232.

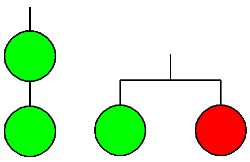
zu A 1.10:

Man kann die in den Abbildungen gezeigten Mobiles als geschachtelte Klammer-Tupel darstellen:

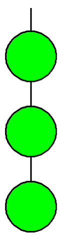
n = 1: (1)



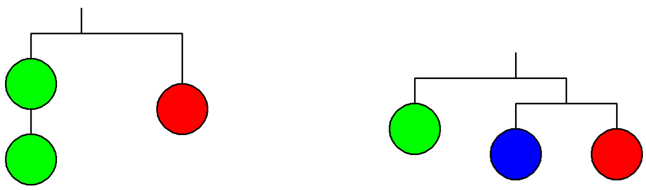
n = 2: (2), (1 ; 1)



n = 3: (3),

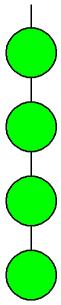


(2 ; 1) = (1 ; 2), wobei die 2 Kugeln ersetzt werden können, vgl. oben: ((1 ; 1) ; 1) = (1 ; (1 ; 1))

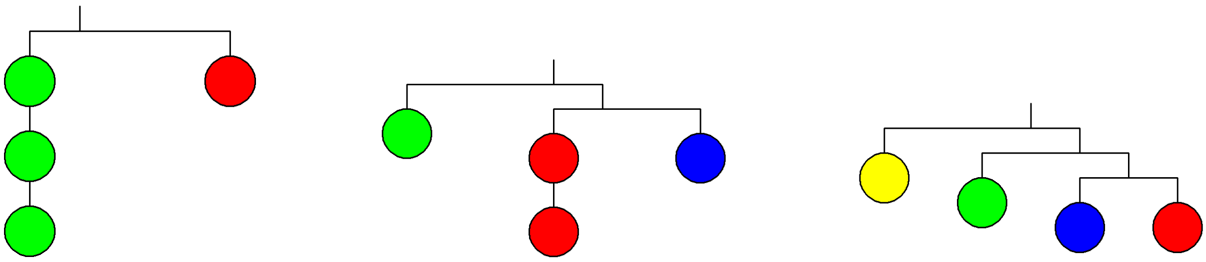


Die Möglichkeit des Vertauschens wird im Folgenden nicht mehr notiert.

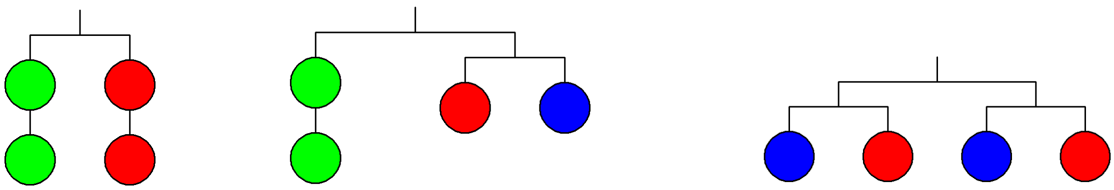
n = 4: (4),



(3 ; 1), wobei die 3 Kugeln ersetzt werden können, vgl. oben: ((2 ; 1) ; 1), ((1 ; (1 ; 1)) ; 1)



(2 ; 2), wobei die 2 Kugeln jeweils ersetzt werden können, vgl. oben: (2 ; (1 ; 1)), ((1; 1) ; (1 ; 1))



n = 5: (5),

(4 ; 1), wobei die 4 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 7 Möglichkeiten, vgl. oben,

(3 ; 2), wobei die 3 und die 2 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 3 · 2 = 6, vgl. oben

zusammen also 1 + 7 + 6 = 14 Möglichkeiten.

n = 6: (6),

(5 ; 1), wobei die 5 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 14 Möglichkeiten, vgl. oben,

(4 ; 2), wobei die 4 und die 2 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 7 · 2 = 14, vgl. oben,

(3 ; 3), wobei die 3 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt (1 + 2 + 3) = 6 Möglichkeiten,

zusammen also 1 + 14 + 14 + 6 = 35 Möglichkeiten.

n = 7: (7),

(6 ; 1), wobei die 6 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 35 Möglichkeiten, vgl. oben,

(5 ; 2), wobei die 5 und die 2 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 14 · 2 = 28, vgl. oben,

(4 ; 3), wobei die 4 und die 3 Kugeln ersetzt werden können, insgesamt 7 · 3 = 21 Möglichkeiten,

zusammen also 1 + 35 + 28 + 21 = 85 Möglichkeiten.

vgl. auch OEIS A036250