Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 17.1:

Abbildung 1 und 3: Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Teildreieck, dessen Hypotenuse die Kathete des großen Dreiecks ist und dessen Katheten im großen Dreieck Höhe auf der Hypotenuse sowie zugehöriger Hypotenusenabschnitt sind: $a^2 = h^2 + p^2$ und $b^2 = h^2 + q^2$

Abbildung 2 und 4: Da nach dem Kathetensatz das Quadrat über der Kathete flächengleich ist zum Rechteck aus zugehörigem Hypotenusenabschnitt und Hypotenuse ($a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$), folgt, dass das Quadrat über der Höhe jeweils flächengleich ist zu den beiden violett gefärbten Rest-Rechtecken:
$h^2 = p \cdot (c - p)$ und $h^2 = q \cdot (c - q)$ (da $c = p + q$ ist dies nichts anderes als die Aussage des Höhensatzes).

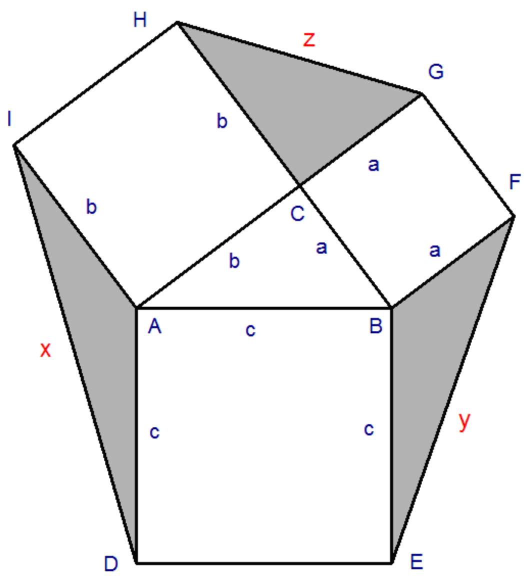
Abbildung 5: Die Gesamtfläche der beiden Kathetenquadrate lässt sich also darstellen als Summe der Flächen der beiden Quadrate über den Hypotenusenabschnitten und zwei zueinander kongruenten Restrechtecken, die flächengleich zum Quadrat über der Höhe sind: $a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + 2h^2$

Dies lässt sich natürlich auch durch (algebraische) Umformung herleiten:

$a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p^2 + 2h^2 + q^2$

zu A 17.2:

(1) Die Punkte und Seiten der zu untersuchenden Figur werden – wie rechts ablesbar – bezeichnet.



Die Figur ist festgelegt durch das rechtwinklige Dreieck ABC, d. h., durch den rechten Winkel bei C und die Seitenlängen a und b.

Hieraus lassen sich berechnen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$\alpha = \tan^{-1}(a/b)$ und $\beta = 90° - \alpha$

Es gilt: $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c}$ und $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$

Das **Dreieck ABC** hat den Flächeninhalt

$A_1 = ½ \cdot a \cdot b$

Dreieck CGH:

Das Dreieck ist kongruent zum Dreieck ABC.

Dreieck AID: Vom Dreieck sind die Seiten b und c gegeben sowie der Winkel
$\delta = \angle(DAI) = 360° - (90° + 90° + \alpha) = 180° - \alpha$.

Hieraus ergibt sich wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ und $a = c \cdot \sin(\alpha)$ der Flächeninhalt

$A_2 = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta) = ½ \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = ½ \cdot b \cdot a = A_1$

Dreieck BEF:

Vom Dreieck sind die Seiten a und c gegeben sowie der Winkel
$\varepsilon = \angle(FBE) = 360° - (90° + 90° + \beta) = 180° - \beta = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$.

Hieraus ergibt sich wegen $\sin(90° + \alpha) = \cos(\alpha)$ und $b = c \cdot \cos(\alpha)$ der Flächeninhalt

$A_3 = ½ \cdot a \cdot c \cdot \sin(\varepsilon) = ½ \cdot a \cdot c \cdot \cos(\alpha) = ½ \cdot a \cdot b = A_1$

(2) Die Länge der Seite x kann mithilfe des Kosinussatzes bestimmt werden:

$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\delta) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + (a^2 + b^2) + 2b^2$, also $\boxed{x^2 = a^2 + 4b^2}$

wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ und $b = c \cdot \cos(\alpha)$

Die Länge der Seite y kann mithilfe des Kosinussatzes bestimmt werden:

$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\varepsilon) = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(90° + \alpha)$

$= a^2 + c^2 + 2ac \cdot \sin(\alpha) = a^2 + (a^2 + b^2) + 2a^2$, also $\boxed{y^2 = 4a^2 + b^2}$

wegen $\cos(90° + \alpha) = -\sin(\alpha)$ und $a = c \cdot \sin(\alpha)$

Wegen $z = c$ und $c^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 4b^2 + 4a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 6 \cdot (a^2 + b^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2) + 3 \cdot (a^2 + b^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$

(3) Dies ist genau die Aussage, die in (2) bewiesen wurde.

(4) Gegenüber (1) ändert sich die Berechnung der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CGH.

Für das **Dreieck ABC** gilt allgemein: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta)$

Im **Dreieck CGH** gilt für den Winkel am Punkt C: $\varphi = \angle(GCH) = 360° - (90° + 90° + \gamma) = 180° - \gamma$.

Für den Flächeninhalt ergibt sich dann: $A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = A_1$

Im **Dreieck AID** gilt: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = A_1$

Im **Dreieck BEF** gilt: $A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \cos(\alpha) = A_1$

Gegenüber (2) ändert sich in der Berechnung von x^2, y^2 und z^2:

$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\delta) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)$

$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\varepsilon) = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(180° - \beta) = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos(\beta)$

$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180° - \gamma) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Dann gilt wegen $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$, also $2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$, und analog

$2ca \cdot \cos(\beta) = c^2 + a^2 - b^2$, $2ab \cdot \cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2$:

$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

zu A 17.3:

Wie in der Lösung von A 17.2 ausgeführt, gilt für das untere gelbe Dreieck: $A_u = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$

und das obere gelbe Dreieck mit Winkel $\varphi = 360° - (90° + 90° + \gamma) = 180° - \gamma$:

$A_o = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = A_u$

Mit den Bezeichnungen von A 17.2 gilt weiter:

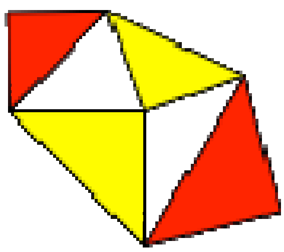
$c^2 + z^2 = c^2 + a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma) = c^2 + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

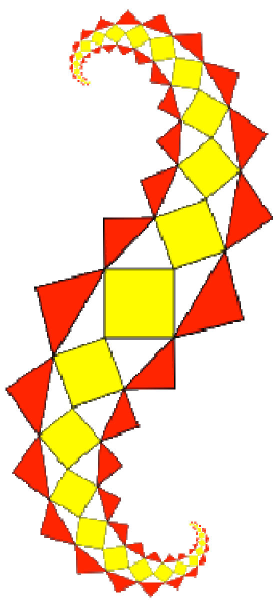
Tipp: Betrachtet man statt der grünen Quadrate jeweils halb so große gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke und statt der hellblauen Quadrate jeweils ein Viertel davon, also ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, dann ergibt sich in der folgenden Figur von Hans Walser

rot = gelb

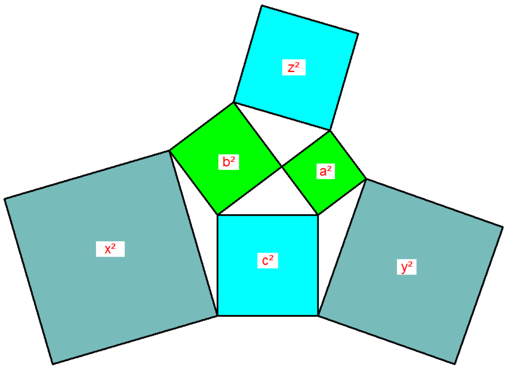
vgl.

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Drachenspirale/Drachenspirale.htm





Die Figuren aus in Abb. 17.2b bzw. in Abb. 17.2c kann man auf verschiedene Weise ergänzen, beispielsweise so:



Oben wurde gezeigt: $c^2 + z^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

Entsprechend gilt in der Figur links auch:

$x^2 + a^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2)$ und

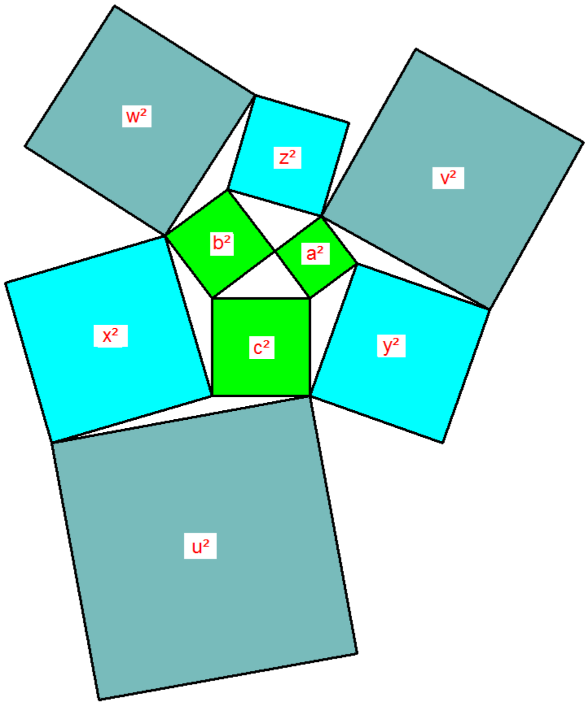
$y^2 + b^2 = 2 \cdot (a^2 + c^2)$

Daher gilt:

$x^2 + y^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2 + a^2 + c^2) - a^2 - b^2$

$= b^2 + a^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot (a^2 + b^2)$

$= 5 \cdot (a^2 + b^2)$



Oben wurde gezeigt:

$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$

Hier gilt nun

$u^2 + b^2 = 2 \cdot (x^2 + c^2)$ und

$w^2 + a^2 = 2 \cdot (b^2 + z^2)$ und

$v^2 + c^2 = 2 \cdot (a^2 + y^2)$,

also

$u^2 + v^2 + w^2 + a^2 + b^2 + c^2$

$= 2 \cdot (x^2 + c^2) + 2 \cdot (z^2 + b^2) + 2 \cdot (y^2 + a^2)$,

d. h.

$u^2 + v^2 + w^2$

$= 2 \cdot x^2 + c^2 + 2 \cdot z^2 + b^2 + 2 \cdot y^2 + a^2$

$= 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$

$= 7 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$

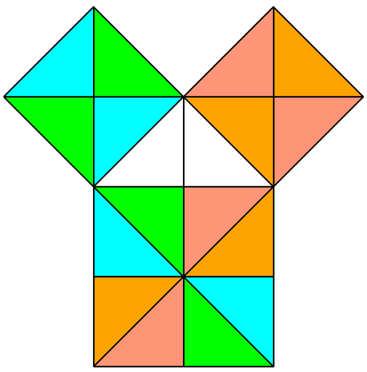
Beachten Sie hierzu auch die folgenden Darstellungen:

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen/Quadrate_ansetzen.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen2/Quadrate_ansetzen2.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoras-Schmetterling/Pythagoras-Schmetterling.htm

zu A 17.4:



zu A 17.5:

Man zeichnet das kleinere Kathetenquadrat mit dem Flächeninhalt a^2 unten links in das größere Kathetenquadrat mit dem Flächeninhalt b^2 ein. Die Restfläche mit Flächeninhalt $b^2 - a^2$ wird aufgeteilt in das hellblau gefärbte Eckenquadrat mit Flächeninhalt $(b - a)^2$ und die beiden zueinander kongruenten Rechtecke mit dem jeweiligen Flächeninhalt $(b - a) \cdot a$.

Durch die untere rote Linie werden Teilflächen abgetrennt:

– ein grün gefärbtes Trapez der Breite $b - a$ und den beiden zueinander parallelen Seiten mit den Längen a und a^2/b

– ein kleines grün gefärbtes Dreieck mit den Katheten der Länge $b - a$ und $a - a^2/b$

– ein gelb gefärbte Dreieck mit den Katheten a und $a - a^2/b$

– ein gelb gefärbtes Trapez mit parallelen Seiten der Länge a und a^2/b und der Höhe a

Diese vier gefärbten Puzzlestücke sowie das hellblau gefärbte Eckenquadrat werden in das Hypotenusenquadrat gelegt. Zum Auslegen verwendet wurde also bisher das kleinere gelb gefärbte Kathetenquadrat sowie der rechte grün und hellblau gefärbte Rechteck-Streifen des größeren Kathetenquadrats. Der linke Teil des Kathetenquadrats (in der dritten Abbildung weiß und gelb gefärbt) wird durch die obere rote Linie in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die ungefärbt den Rest des Hypotenusenquadrats ausfüllen.

zu A 17.6:

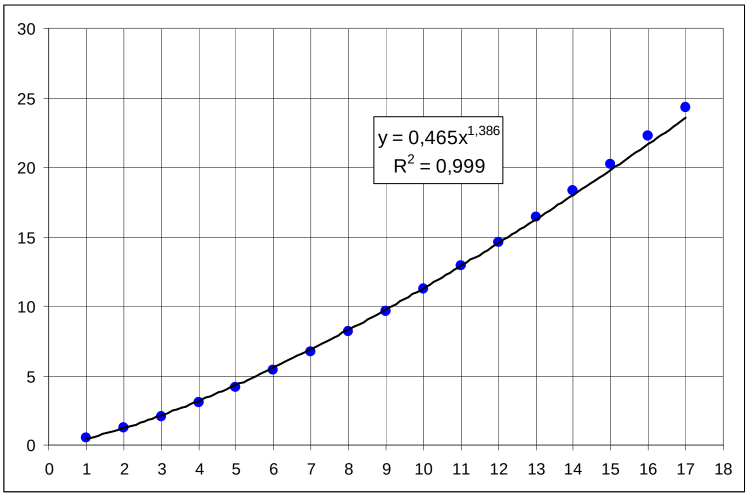
Die Flächeninhalte der Dreiecke berechnen sich nach der Formel $A_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{n}$

Mit dem 16. Dreieck ergibt sich noch keinen Vollkreis, beim 17. ist der Gesamtwinkel von 360° überschritten.

Diese Winkel ergeben sich für n = 1, 2, ... aus der Beziehung $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

n	Fläche	Fläche kumuliert	Winkel	Winkel kumuliert
1	0,500	0,500	45,000	45,000
2	0,707	1,207	35,264	80,264
3	0,866	2,073	30,000	110,264
4	1,000	3,073	26,565	136,829
5	1,118	4,191	24,095	160,924
6	1,225	5,416	22,208	183,132
7	1,323	6,739	20,705	203,837
8	1,414	8,153	19,471	223,308
9	1,500	9,653	18,435	241,743
10	1,581	11,234	17,548	259,291
11	1,658	12,892	16,779	276,070
12	1,732	14,625	16,102	292,172
13	1,803	16,427	15,501	307,673
14	1,871	18,298	14,963	322,637
15	1,936	20,235	14,478	337,114
16	2,000	22,235	14,036	351,150
17	2,062	24,296	13,633	364,783
18	2,121	26,417	13,263	378,046

Der Gesamt-Flächeninhalt der Pythagoras-Spirale kann (für n < 18) kann näherungsweise durch die Potenzfunktion f mit $f(x) = 0{,}465 \cdot x^{1{,}386}$ modelliert werden (vgl. EXCEL-Blatt mit Bestimmzheitsmaß 99,9 %).



zu A 17.7:

1. Möglichkeit:

Betrachtet man das rechtwinklige Ausgangsdreieck links mit den Seiten a_0, b_0, c_0, dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $a_0^2 + b_0^2 = c_0^2$.

Bezeichnet man die nach rechts kleiner werdenden rechtwinkligen Dreiecke im gleicher Weise, also mit a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 usw., dann besteht zwischen diesen Seiten der folgende Zusammenhang: $b_{n+1} = a_n$.

Hiermit folgt dann: $a_{n+1} : b_{n+1} = a_n : b_n$, also:

$$a_{n+1} = b_{n+1} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot a_n \text{ und analog: } c_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} \cdot c_n$$

also: $a_1 = \frac{a_0^2}{b_0}$; $a_2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{b_1} = \left(\frac{a_0^2}{b_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_0} = \frac{a_0^3}{b_0^2}$; $a_3 = a_2^2 \cdot \frac{1}{b_2} = \left(\frac{a_0^3}{b_0^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{a_0^6}{b_0^4} \cdot \frac{b_0}{a_0^2} = \frac{a_0^4}{b_0^3}$;

$a_4 = a_3^2 \cdot \frac{1}{b_3} = \left(\frac{a_0^4}{b_0^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{a_2} = \frac{a_0^8}{b_0^6} \cdot \frac{b_0^2}{a_0^3} = \frac{a_0^5}{b_0^4}$ usw., d. h. ausgehend von Startwert a_0 erhält man die folgenden Glieder der Folge durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$. Dies ergibt sich auch durch Ähnlichkeitsbetrachtungen.

Weiter gilt: $c_1 = \frac{a_0}{b_0} \cdot c_0$; $c_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot c_1 = \frac{a_0^2}{b_0} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} \cdot c_0 = \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0$;

$c_3 = \frac{a_2}{b_2} \cdot c_2 = \frac{a_0^3}{b_0^2} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0 = \frac{a_0^3}{b_0^2} \cdot \frac{b_0}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0 = \frac{a_0^3}{b_0^3} \cdot c_0$ usw., d. h. ausgehend von Startwert c_0 erhält man die folgenden Glieder der Folge durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$.

Schließlich gilt auch für die andere Kathete: $b_1 = a_0$; $b_2 = a_1 = \frac{a_0^2}{b_0}$; $b_3 = a_2 = \frac{a_0^3}{b_0^2}$ usw., d. h. auch die Seitenlängen bilden eine Folge, deren weitere Glieder durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$ entstehen.

Für die Flächeninhalte der Dreiecke gilt dann:

$$A_D = \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_1\cdot b_1 + \frac{1}{2}\cdot a_2\cdot b_2 + \frac{1}{2}\cdot a_3\cdot b_3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[a_0\cdot b_0 + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)\cdot a_0\cdot a_0 + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2\cdot a_0\cdot\left(\frac{a_0}{b_0}\right)\cdot a_0 + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^3\cdot a_0\cdot\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2\cdot a_0 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[a_0\cdot b_0 + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^1\cdot a_0^{\ 2} + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^3\cdot a_0^{\ 2} + \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^5\cdot a_0^{\ 2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_0^{\ 2}\cdot\left[q^1 + q^3 + q^5 + \ldots\right] = \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_0^{\ 2}\cdot q\cdot\left[1 + q^2 + q^4 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_0^{\ 2}\cdot q\cdot\frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_0^{\ 2}\cdot\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot a_0^{\ 2}\cdot\frac{a_0}{b_0}\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} = \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_0^{\ 3}\cdot b_0}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} = \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0\cdot\left[1 + \frac{a_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot a_0\cdot b_0\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}$$

Für die Flächeninhalte der innen liegenden Quadrate gilt:

$$A_{Qi} = b_0^{\ 2} + b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2} + b_4^{\ 2} + \ldots = b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} + \ldots$$

$$= b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2} + (q\cdot a_0)^2 + \left(q^2\cdot a_0\right)^2 + \left(q^3\cdot a_0\right)^2 + \ldots = b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2} + q^2\cdot a_0^{\ 2} + q^4\cdot a_0^{\ 2} + q^6\cdot a_0^{\ 2} + \ldots$$

$$= b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}\cdot\frac{1}{1-q^2} = b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2} = b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2}\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} = b_0^{\ 2}\cdot\left[1 + \frac{a_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}\right]$$

$$= b_0^{\ 2}\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} = \frac{b_0^{\ 4}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}$$

Für die Flächeninhalte der außen liegenden Quadrate gilt:

$$A_{Qa} = c_0^{\ 2} + c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2} + c_3^{\ 2} + c_4^{\ 2} + \ldots = c_0^{\ 2} + (q\cdot c_0)^2 + \left(q^2\cdot c_0\right)^2 + \left(q^3\cdot c_0\right)^2 + \left(q^4\cdot c_0\right)^2 + \ldots$$

$$= c_0^{\ 2}\cdot\frac{1}{1-q^2} = c_0^{\ 2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^2} = c_0^{\ 2}\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} = \left(a_0^{\ 2} + b_0^{\ 2}\right)\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}$$

Somit ergibt sich für die Gesamtfläche:

$$A = 2\cdot A_D + 2\cdot A_{Qa} + A_{Qi} = a_0\cdot b_0\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} + 2\cdot\frac{b_0^{\ 4}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}} + \left(a_0^{\ 2} + b_0^{\ 2}\right)\cdot\frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}$$

$$= \frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}\cdot\left[a_0\cdot b_0 + 2\cdot b_0^{\ 2} + a_0^{\ 2} + b_0^{\ 2}\right] = \frac{b_0^{\ 2}}{b_0^{\ 2} - a_0^{\ 2}}\cdot\left[a_0^{\ 2} + a_0\cdot b_0 + 3\cdot b_0^{\ 2}\right]$$

2. Möglichkeit

Man verwendet den Zusammenhang aus A 17.3. Hier wurde gezeigt, dass je zwei violett gefärbte Quadrate doppelt so groß sind wie je zwei hellblau gefärbte Quadrate.

zu A 17.8:

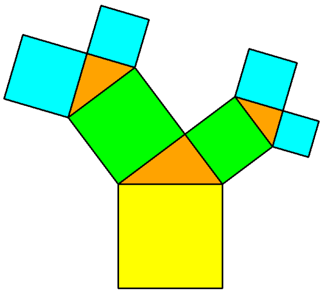
Die gesamte Figur ist festgelegt durch die Längen der Katheten der Ausgangsfigur, also durch a und b:

Im ersten Schritt besteht die Gesamtfigur aus dem Hypotenusenquadrat mit Flächeninhalt $c^2 = a^2 + b^2$, dem rechtwinkligen Dreieck mit Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ und den beiden Kathetenquadraten, also

$A_1 = 2 \cdot (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

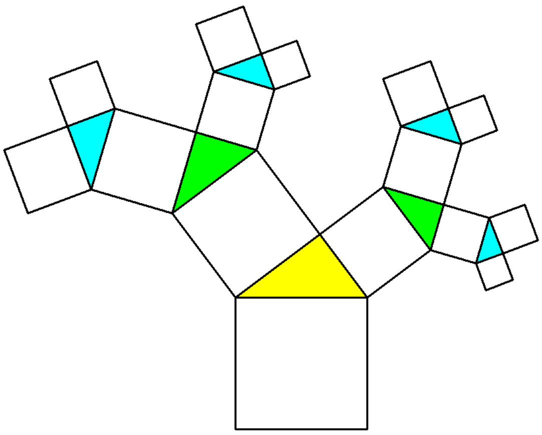
Im nächsten Schritt werden links und rechts jeweils ein rechtwinkliges Dreieck sowie zwei neue Kathetenquadrate angefügt, deren Flächen nach dem Satz von Pythagoras jeweils genauso groß sind wie die Hypotenusenquadrate.

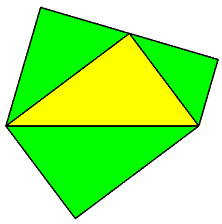
Aus der folgenden Grafik wird deutlich, dass die vier hellblau gefärbten Quadrate des 2. Schritts genauso groß sind wie die beiden grün gefärbten Quadrate des 1. Schritts, die wiederum zusammen so groß sind wie das Hypotenusenquadrats des 1. Schritts.



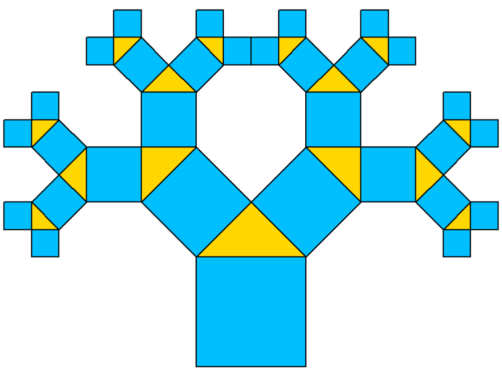
Da also im 1. Schritt die Quadrate bereits einen Flächeninhalt von $2 \cdot (a^2 + b^2)$ haben und mit jedem weiteren Schritt eine Fläche von $a^2 + b^2$ hinzukommt, beträgt die Gesamtfläche der Quadrate nach n Schritten $(n + 1) \cdot (a^2 + b^2)$.

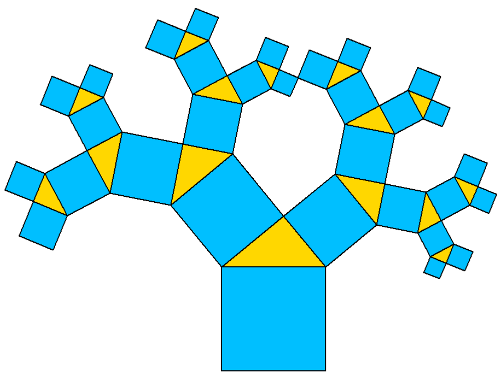
Lässt man in einem Pythagorasbaum alle Quadrate weg, dann entsteht ein Baum aus rechtwinkligen Dreiecken. Dabei sind die beiden Dreiecke des 2. Schritts zusammen genauso groß wie das Dreieck des 1. Schritts, vgl. die Abb. rechts und die Ausführungen im Abschnitt 17.7, sodass die Gesamtfläche der Dreiecke nach n Schritten $n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ beträgt.



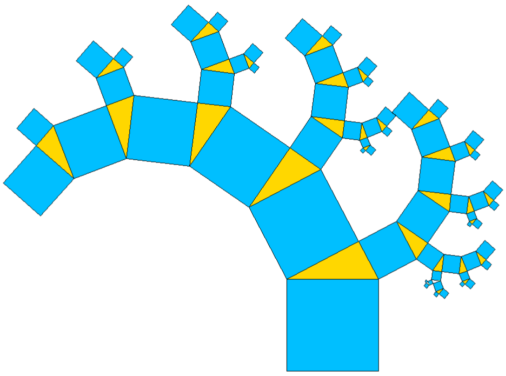


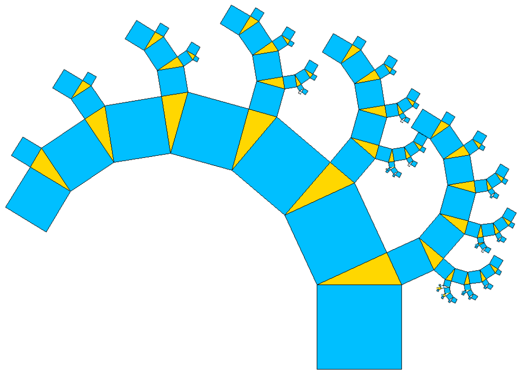
Die Gesamtfläche der Figur wächst also mit n über alle Grenzen hinaus – wenn man nicht beachtet, dass sich die Äste bereits nach wenigen Schritten überschneiden.





Für a = b, also α = 45°, berühren sich Quadrate beim 3. Schritt der Figur. Für $\alpha \approx$ 39,4°, also a $\approx$ 0,821 · b, berühren sich Quadrate beim 3. Schritt der Figur in den Ecken zweier Quadrate. Für kleinere Winkel α gibt es noch keine Überschneidungen beim 3. Schritt.





Für $\alpha \approx$ 27,7°, also a $\approx$ 0,525 · b, berühren sich beim 4. Schritt zwei Äste; bei größeren Winkeln treten Überschneidungen auf. Für $\alpha \approx$ 24,8°, also a $\approx$ 0,462 · b, berühren sich beim 5. Schritt zwei Äste; bei größeren Winkeln treten Überschneidungen auf.

Es gibt also noch viel zu untersuchen!

Obwohl die Gesamtfläche der Dreiecke und Quadrate über alle Grenzen hinauswächst, ist die tatsächlich belegte Fläche begrenzt, vgl. den deutschen Wikipedia-Beitrag

https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras-Baum.

zu A 17.9:

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Grundseite s berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2,$$

denn für das Dreieck gilt A = ½ · s · h und die Höhe h berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus der Beziehung $h^2 + (½ \cdot s)^2 = s^2$, also $h^2 = ¾ \cdot s^2$.

Dies ergibt sich auch aus der folgenden allgemeinen Betrachtung:

Der Flächeninhalt A_n eines regelmäßigen n-Ecks berechnet sich als das n-Fache des Flächeninhalts der n gleichschenkligen Dreiecke mit Grundseite s und Schenkel r, wobei gilt (vgl. Kap. 1):

$$h = \frac{s}{2 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}, \text{ also } A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = n \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{180°}{n}\right)}.$$

Für n = 3 ist $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \sqrt{3}$, also $A_3 = 3 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

Für n = 5 ist $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, also

$$A_5 = 5 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} \cdot s^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 20}} \cdot s^2.$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \cdot s^2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot s^2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot s^2$$

Für n = 6 ist $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, also $A_6 = 6 \cdot \frac{3 \cdot s^2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2$.

Für n = 8 ist $\tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \sqrt{2} - 1$, also

$$A_8 = 8 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = 2 \cdot \frac{s^2}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot s^2 .$$

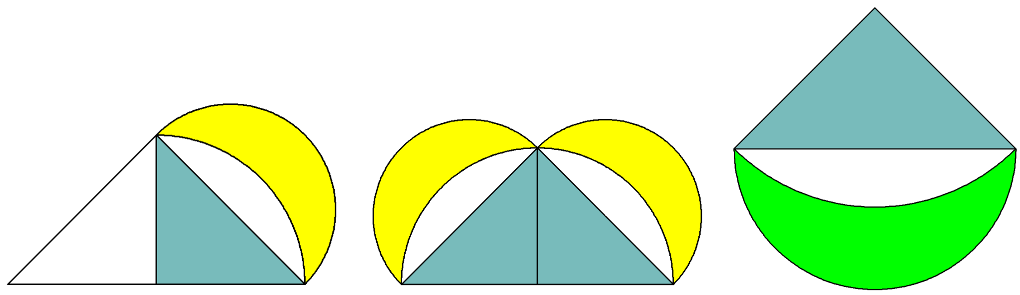
Für die Halbkreise gilt:

A = ½ · (½ · s)² · π = $\frac{\pi}{8} \cdot s^2$.

zu A 17.10:

Bei der Abbildung links handelt es sich um den Spezialfall eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, das verdoppelt wurde. Die vier Möndchen über den Seiten eines Quadrats sind flächengleich zum Quadrat.

Bei der Abbildung rechts wird die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für zueinander ähnliche Figuren über den Seiten angewandt. Hier handelt es sich um Möndchen über der Hypotenuse von gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken. Man kann es auch so formulieren: Die beiden gelb gefärbten Möndchen sind jeweils flächengleich zu halben Dreieck. Das ganze Dreieck ist flächengleich zum grün gefärbten Möndchen.



zu A 17.11:

Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, deren Seiten gleich dem Radius r des Umkreises des regelmäßigen Sechsecks sind. Die 6 Halbkreise über den Seiten des Sechsecks nehmen eine Fläche von $A_{HK} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$ ein, das Sechseck eine Fläche von

$A_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2$, zusammen ergibt das eine Fläche von $A_{ges} = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(\pi + 2\sqrt{3}\right)$

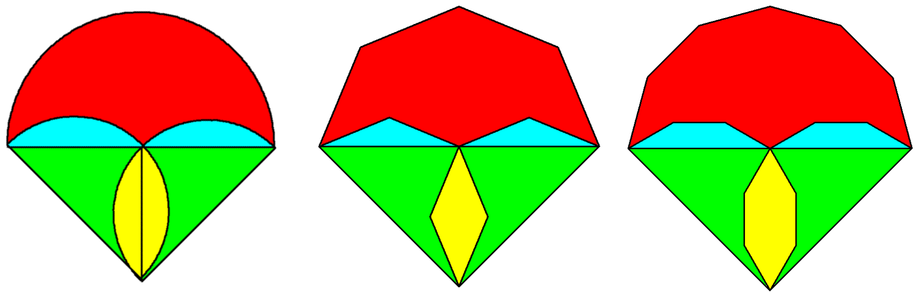
Subtrahiert man hiervon die Fläche des Kreises mit Radius r, dann ergibt sich für die grün gefärbten Möndchen:

$$A_M = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(\pi + 2\sqrt{3}\right) - \pi \cdot r^2 = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(\pi + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi\right)$$

Das stimmt überein mit dem Flächeninhalt der gelb gefärbten Fläche:

$$A_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi\right) \cdot r^2$$

zu A 17.12:



Betrachtet wird ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Bei diesem ist die Höhe genauso groß wie die halbe Hypotenuse und folglich sind die hellblau gefärbten Flächenstücke jeweils genauso groß wie die gelb gefärbten.

Im Unterschied zu dem Hippokrates-Möndchen sind die Katheten-Halbkreise nach oben geklappt. Die blauen Flächenstücke gehören dann sowohl zur Fläche des Hypotenusen-Halbkreises als auch zu den hochgeklappten Katheten-Halbkreisen und könnten daher zunächst einmal weggelassen werden. Da aber die beiden gelben Flächenstücke zu beiden Katheten-Halbkreisen gehören, braucht man Ausgleichsflächen – und das sind genau die blauen Flächen, die ja genauso groß sind wie die gelben.

Somit ergibt sich: rote Fläche = hellblaue + gelbe + grüne Flächen

Statt der Halbkreise kann man auch halbe regelmäßige 8-Ecke betrachten, auf die sich die Überlegungen entsprechend übertragen lassen. Und da die Anzahl der Möndchen über den Katheten der halben gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken geradzahlig ist, ergibt sich für das zugrundeliegende regelmäßige Vieleck, dass die Anzahl der Ecken durch 4 teilbar sein muss.

zu A 17.13:

Abbildung links: Nicht eingezeichnet ist die Höhe zur Hypotenuse und die beiden Halbkreise. Für die Flächen dieser beiden nicht gezeichneten Halbkreise gilt:

links: A_h = hellblau – violett rechts: A_h = grün – olivgrün

also: **hellblau + olivgrün = grün + violett.**

Abbildung rechts: Die beiden orange gefärbten Halbkreise über dem Hypotenusenabschnitt p und der nach unten abgetragenen Höhe h sind zusammen genauso groß wie der gelb gefärbte Halbkreis, also

gelb = orange.

Da der gesamte Halbkreis unter der Hypotenuse (also olivgrün + orange) so groß ist wie die beiden Halbkreise über den Katheten (gelb + grün), folgt:

grün = olivgrün.

zu A 17.14:

Die Fläche des hellblauen Halbkreis über der Hypotenuse ist genauso groß wie die der beiden dunkelblauen Halbkreise über den Katheten. Diese blauen Halbkreise wiederum sind genauso groß wie die grünen und roten Halbkreise im (durch die Höhe) unterteilten rechtwinkligen Dreieck, d. h.

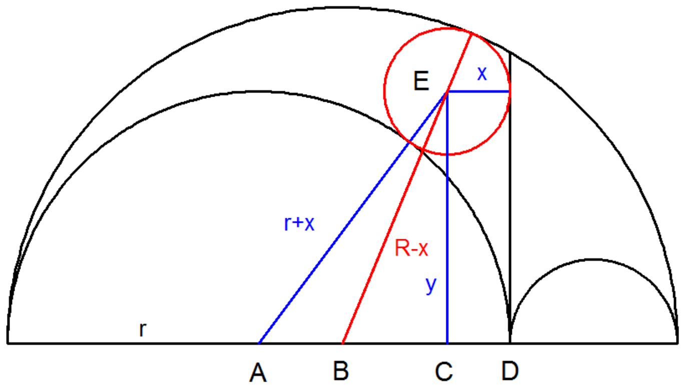
grün + rot = hellblau, also **hellblau – grün = gelb**.

Schneidet man die grünen Halbkreise aus dem hellblauen Halbkreis heraus, dann hat man das gelb gefärbte Schustermesser, also

gelb = rot.

zu A 17.15:

Der Beweis kann beispielsweise mithilfe des Satzes von Pythagoras geführt werden.



Bezeichnet man den Radius des Halbkreises mit R und den Radius des größeren Halbkreises unterhalb mit r, den Radius des Zwillingskreises mit x sowie den Abstand des Mittelpunktes des Zwillingskreises vom Durchmesser mit y = CE, dann kann man folgende Beziehungen für y^2 aufstellen:

ΔADE: $|AC|^2 + y^2 = |AE|^2$, wobei $|AC| = |AD| - x = r - x$ und $|AE| = r + x$,

also: $y^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2 = 4 \cdot rx$

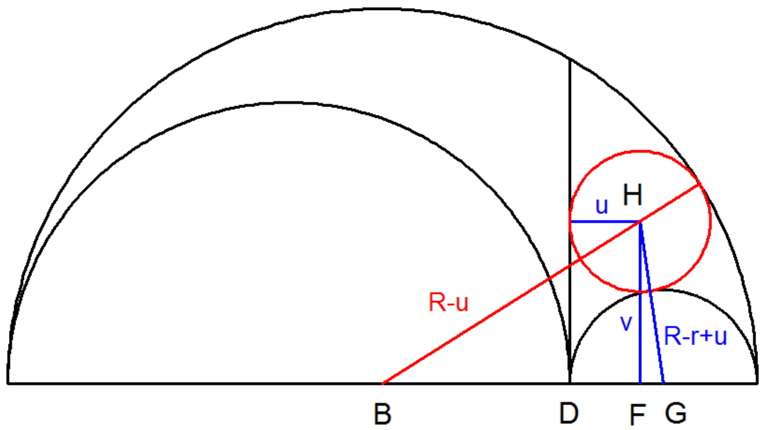
ΔBCE: $|BC|^2 + y^2 = |BE|^2$, wobei $|BC| = |BD| - x = 2r - R - x$ und $|BE| = R - x$,

also: $y^2 = (R - x)^2 - (2r - R - x)^2 = 4 \cdot (Rr + rx - Rx - r^2)$.

Hieraus folgt: $rx = Rr + rx - Rx - r^2 \Leftrightarrow Rx = Rr - r^2$ und daher

$$x = \frac{r \cdot (R - r)}{R}$$

Im rechts liegenden Teil gilt:



ΔBFH: $|BF|^2 + v^2 = |BH|^2$, wobei $|BF| = 2r - R + u$ und $|BH| = R - u$,

also: $v^2 = (R - u)^2 - (2r - R + u)^2 = 4 \cdot (rR + ru - r^2)$

ΔFGH: $|FG|^2 + v^2 = |GH|^2$, wobei $|FG| = R - r - u$ und $|GH| = R - r + u$,

also: $v^2 = (R - r + u)^2 - (R - r - u)^2 = 4 \cdot (R - r) \cdot u$

Hieraus folgt: $Ru - ru = Rr + ru - r^2 \Leftrightarrow Ru = Rr - r^2$ und daher

$u = \dfrac{r \cdot (R - r)}{R}$. Daher gilt $x = u$.

Bei der auf der italienischen Briefmarke erkennbaren Grafik wird der Beweis mithilfe von Ähnlichkeitsüberlegungen geführt, vgl. u. a. Dietmar Herrmann: Die antike Mathematik, Springer Spektrum, 2014.

zu A 17.16:

Die grün gefärbte Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche eines Halbkreises mit Radius r, aus der zwei Halbkreise mit Radius r/3 herausgenommen sind und ein Halbkreis mit Radius r/3 ergänzt wurde.

Der Flächeninhalt ist also ½ · π · $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(r^2-2\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^2+\left(\frac{r}{3}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{8}{9}\cdot r^2=\pi\cdot\frac{4}{9}\cdot r^2=\pi\cdot\left(\frac{2}{3}r\right)^2$

Der hellblau gefärbte Kreis hat den Durchmesser r + r/3, also den Radius $\frac{2}{3}r$. Der Flächeninhalt dieses Kreises ist also genauso groß wie der der grün gefärbten Fläche in der Abbildung links. Färbt man in der Abbildung rechts die nicht gefärbte Fläche grün, dann stimmt die insgesamt grün gefärbte Fläche mit der in der ersten Abbildung überein, färbt man sie hellblau, dann stimmt die insgesamt hellblau gefärbte Fläche mit der in der zweiten Abbildung überein.

zu A 17.17:

Betrachtet wird ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, das durch eine Höhe in zwei zueinander kongruente Teildreiecke zerlegt wird, die selbst wiederum gleichschenklig-rechtwinklig sind. Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden. Der Streckenzug beginnt am oberen Endpunkt der Höhe und führt dsnn zum Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Hypotenuse, der wiederum oberer Endpunkt einer Höhe ist usw. Im nächsten Schritt wird jeweils das links von der Höhe liegende Dreieck gewählt.

Wie in A 17.10 untersucht wurde, hat das jeweilige Möndchen über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck.

Das Ausgangsdreieck hat den Flächeninhalt A = ½ · g · h = ½ · (2h) · h = h² = (1 LE)². Wegen der fortgesetzten Halbierung haben die nächsten Dreiecke der Folge jeweils einen halb so großen Flächeninhalt. Wie in Kap. 8 erläutert wurde, hat die unendliche Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$ den Wert 2.

Hinweis: Der Streckenzug hat die Länge

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{16}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=2+\sqrt{2}\,.$$

zu A 17.18:

(1) Das Viereck ist eigentlich ein Dreieck, das durch die Höhe h_c auf c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Hier gilt: $h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$, also $a^2 + q^2 = b^2 + p^2$.

(2) Wenn x = y, ist das Viereck achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen ist, z. B. beim symmetrischen Drachen, dann gilt: a = d und b = c. Dann ist die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ erst recht erfüllt.

zu A 17.19:

Die nächsten Summen von zwei Quadratzahlen, für die es mehr als eine Darstellung gibt:

$125 = 5^2 + 10^2 = 2^2 + 11^2$	$130 = 3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$
$145 = 1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2$	$170 = 1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$
$185 = 4^2 + 13^2 = 8^2 + 11^2$	$200 = 2^2 + 14^2 = 10^2 + 10^2$
$205 = 6^2 + 13^2 = 3^2 + 14^2$	$221 = 5^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2$
$250 = 5^2 + 15^2 = 9^2 + 13^2$	$260 = 2^2 + 16^2 = 8^2 + 14^2$

Dass hier überwiegend Zahlen mit Endziffer 0 bzw. 5 vorkommen, lässt sich wie folgt nachvollziehen:

Als Endziffern von Quadratzahlen kommen nur in Frage:

$0^2 \equiv 0$, $1^2 \equiv 1$, $9^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $8^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 9$, $7^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 6$, $6^2 \equiv 6$, $5^2 \equiv 5 \pmod{10}$

Bildet man die Summe von Quadratzahlen mit diesen Endziffern, dann ergeben sich die folgenden Kombinationen:

	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

zu A 17.20:

(1) In Beispiel 1 wurden die Tripel (5 ; 12 ; 13) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) betrachtet, in Beispiel 2 die Tripel (5 ; 12 ; 13) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5), in Beispiel 3 das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (5 ; 12 ; 13), in Beispiel 4 das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (5 ; 12 ; 13).

(2) Betrachtet man das 8-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (8 ; 15 ; 17), dann ergeben sich die Zahlentripel (**24**; 32; 40) und (**24**; 45; 51).
Betrachtet man das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (8 ; 15 ; 17) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (**15**; 20; 25) und (8; **15**; 17). Betrachtet man das 2-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (8 ; 15 ; 17) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (6; **8**; 10) und (**8**; 15; 17). Betrachtet man das 15-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (8 ; 15 ; 17), dann ergeben sich die Zahlentripel (45; **60**; 75) und (32; **60**; 68).

(3) Betrachtet man das 7-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (7 ; 24 ; 25), dann ergeben sich die Zahlentripel (**21**; 28; 35) und (**24**; 72; 75).
Betrachtet man das 8-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (7 ; 24 ; 25) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (**24**; 32; 40) und (7; **24**; 25). Betrachtet man das 7-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (7 ; 24 ; 25), dann ergeben sich die Zahlentripel (21; **28**; 35) und (**28**; 96; 100). Betrachtet man das 6-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (7 ; 24 ; 25) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (18; **24**; 30) und (7; **24**; 25).