Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 16.1:

n	Σk	n^2	Σk^2	$(n+1)\cdot\Sigma k$	$\Sigma(\Sigma k)$	$(n+1)\cdot\Sigma k-\Sigma(\Sigma k)$
1	1	1	1	2	1	1
2	3	4	5	9	4	5
3	6	9	14	24	10	14
4	10	16	30	50	20	30
5	15	25	55	90	35	55
6	21	36	91	147	56	91
7	28	49	140	224	84	140
8	36	64	204	324	120	204

n	n^3	Σk^3	$(n+1)\cdot\Sigma k^3$	$\Sigma(\Sigma k^3$	$(n+1)\cdot\Sigma k^3-\Sigma(\Sigma k^3)$	k^4	Σk^4
1	1	1	2	1	1	1	1
2	8	9	27	10	17	16	17
3	27	36	144	46	98	81	98
4	64	100	500	146	354	256	354
5	125	225	1350	371	979	625	979
6	216	441	3087	812	2275	1296	2275
7	343	784	6272	1596	4676	2401	4676
8	512	1296	11664	2892	8772	4096	8772

zu A 16.2:

$c(n+1) - c(n) = \alpha \cdot (n+1)^2 + \beta \cdot (n+1) + \gamma - \alpha \cdot n^2 - \beta \cdot n - \gamma = 2\alpha \cdot n + (\alpha + \beta)$

Koeffizientenvergleich mit $b(n) = u \cdot n + v$ ergibt

$\alpha = ½ \cdot u$ und hieraus $v = ½ \cdot u + \beta \Leftrightarrow \beta = v - ½ \cdot u$

zu A 16.3:

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades: $s(n) = a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f$

Der Tabelle entnimmt man:

$s(0) = 0$; $s(1) = 1$; $s(2) = 17$; $s(3) = 98$; $s(4) = 354$; $s(5) = 979$. Wegen $s(0) = 0$ folgt unmittelbar: $f = 0$.

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 5 Variablen

$$\left|\begin{array}{c} a+b+c+d+e=1 \\ 32a+16b+8c+4d+2e=17 \\ 243a+81b+27c+9d+3e=98 \\ 1024a+256b+64c+16d+4e=354 \\ 3125a+625b+125c+25d+5e=979 \end{array}\right|.$$

Dieses hat die Lösung $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{2};\frac{1}{3};0;-\frac{1}{30}\right)$.

Es gilt also:

$$1^4+2^4+...+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

- **Summe der ersten n fünften Potenzen**

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 6. Grades:

$s(n) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$

$s(0) = 0$; $s(1) = 1$; $s(2) = 33$; $s(3) = 276$; $s(4) = 1300$; $s(5) = 4425$; $s(6) = 12201$.

Wegen $s(0) = 0$ folgt unmittelbar: $g = 0$.

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Variablen

$$\left|\begin{array}{c} a+b+c+d+e+f=1 \\ 64a+32b+16c+8d+4e+2f=33 \\ 729a+243b+81c+27d+9e+3f=276 \\ 4096a+1024b+256c+64d+16e+4f=1300 \\ 15625a+3125b+625c+125d+25e+5f=4425 \\ 46656a+7776b+1296c+216d+36e+6f=12201 \end{array}\right|.$$

Dieses hat die Lösung $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2};\frac{5}{12};0;-\frac{1}{12};0\right)$.

Es gilt also:

$$1^5+2^5+3^5+...+n^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

zu A 16.4:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

$[\, a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e \,] + (n+1)^3 = a \cdot (n+1)^4 + b \cdot (n+1)^3 + c \cdot (n+1)^2 + d \cdot (n+1) + e \Leftrightarrow$

$a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + (n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1) =$

$\quad a \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + c \cdot (n^2 + 2n + 1) + d \cdot (n + 1) + e \Leftrightarrow$

$n^4 \cdot (a - a) + n^3 \cdot (b + 1 - 4a - b) + n^2 \cdot (c + 3 - 6a - 3b - c) +$
$\quad n \cdot (d + 3 - 4a - 3b - 2c - d) + (e + 1 - a - b - c - d - e) = 0 \Leftrightarrow$

$n^3 \cdot (1 - 4a) + n^2 \cdot (3 - 6a - 3b) + n \cdot (3 - 4a - 3b - 2c) + (1 - a - b - c - d) = 0$

und hieraus schrittweise $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = 0$ (und $e = 0$ wegen $s(0) = 0$).

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

$[\, a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f \,] + (n+1)^4$
$\quad = a \cdot (n+1)^5 + b \cdot (n+1)^4 + c \cdot (n+1)^3 + d \cdot (n+1)^2 + e \cdot (n+1) + f \Leftrightarrow$

$a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f + (n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1)$
$= a \cdot (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + b \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + c \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)$
$+ d \cdot (n^2 + 2n + 1) + e \cdot (n + 1) + f \Leftrightarrow$

$n^5 \cdot (a - a) + n^4 \cdot (b + 1 - 5a - b) + n^3 \cdot (c + 4 - 10a - 4b - c) + n^2 \cdot (d + 6 - 10a - 6b - 3c - d)$
$+ n \cdot (e + 4 - 5a - 4b - 3c - 2d - e) + (f + 1 - a - b - c - d - e - f) = 0 \Leftrightarrow$

$n^4 \cdot (1 - 5a) + n^3 \cdot (4 - 10a - 4b) + n^2 \cdot (6 - 10a - 6b - 3c) + n \cdot (4 - 5a - 4b - 3c - 2d) +$
$(1 - a - b - c - d - e) = 0$

und hieraus schrittweise $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = -\frac{1}{30}$ (und $f = 0$ wegen $s(0) = 0$).

zu A 16.5:

$$a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + \binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \cdot 1$$

$$= a \cdot \left(\binom{3}{0} \cdot n^3 + \binom{3}{1} \cdot n^2 + \binom{3}{2} \cdot n + \binom{3}{3} \right) + b \cdot \left(\binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \right) + c \cdot \left(\binom{1}{0} \cdot n + \binom{1}{1} \right) + d$$

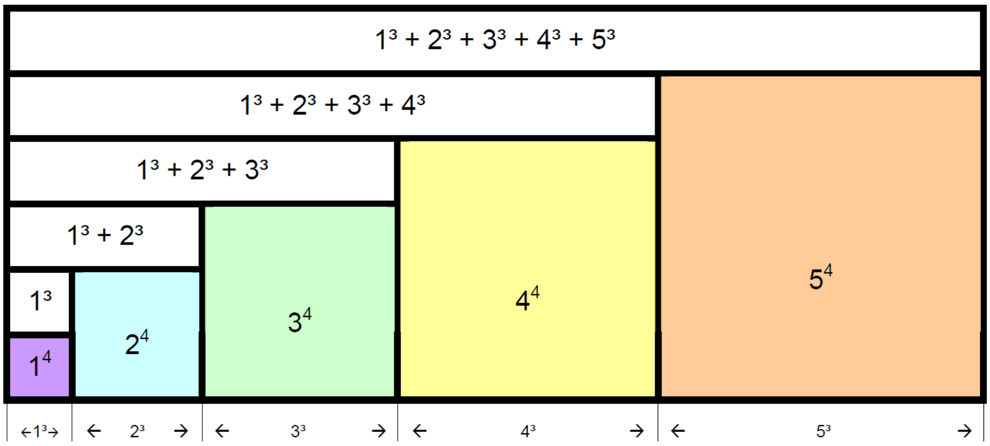
also

$$\left(\binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a \right) \cdot n^2 + \left(\binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b \right) \cdot n + \left(\binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c \right) = 0$$

Hieraus ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a = 0 \;\text{ und }\; \binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b = 0 \;\text{ und }\; \binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c = 0$$

zu A 16.6:



$$\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4\right] + \left[1^3 + (1^3 + 2^3) + (1^3 + 2^3 + 3^3) + \ldots + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)\right]$$
$$= (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$$

$$\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4\right] + \left[\left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \right) + \ldots + \left(\frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 \right) \right]$$
$$= (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$$

$$\left[1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4\right]+\left[\frac{1}{4}\cdot\left(1^4+2^4+\ldots+n^4\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)\right]$$

$$=(n+1)\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$$

$$\frac{5}{4}\cdot\left(1^4+2^4+\ldots+n^4\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)-\frac{1}{4}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{4}{5}\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)$$

und weiter

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\left(\frac{4}{5}n+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\right)-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{2}{5}n^4+\frac{1}{5}n^3+\frac{1}{10}n^4+\frac{1}{5}n^3+\frac{1}{10}n^2-\frac{1}{15}n^3-\frac{1}{10}n^2-\frac{1}{30}n$$

$$1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

zu A 16.7:

Im ersten Fall kann man die Gleichung wie folgt umformen: $\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}=\frac{2n+1}{3}$;

Dies ist möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung ein Produkt steht.

Eine solche Umformung ist bei der Herleitung der Summe der Kubikzahlen nicht möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung zwei Summenterme stehen und keine einfache Quotientenbildung möglich ist.

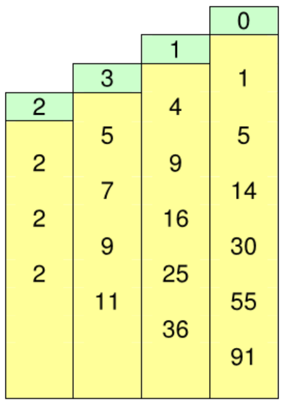
zu A 16.8:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

$$=0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+3\cdot\binom{n}{2}+2\cdot\binom{n}{3}$$

$$=0+1\cdot\frac{n}{1}+3\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot 1}+2\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}=\ldots$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$



zu A 16.9:

24	60	50	15	1	0
24	84	110	65	16	1
24	108	194	175	81	17
	132	302	369	256	98
		434	671	625	354
			1105	1296	979
				2401	2275
					4676

a	b	c	d	e	f
a	b+a	c+b	d+c	e+d	f+e
a	b+2a	c+2b+a	d+2c+b	e+2d+c	f+2e+d
	b+3a	c+3b+3a	d+3c+3b+a	e+3d+3c+b	f+3e+3d+c
		c+4b+6a	d+4c+6b+4a	e+4d+6c+4b+a	f+4e+6d+4c+b
			d+5c+10b+10a	e+5d+10c+10b+5a	f+5e+10d+10c+5b+a
				e+6d+15c+20b+15a	f+6e+15d+20c+15b+5a
					f+7e+21d+35c+35b+20a

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=0\cdot\binom{n}{0}+1\cdot\binom{n}{1}+15\cdot\binom{n}{2}+50\cdot\binom{n}{3}+60\cdot\binom{n}{4}+24\cdot\binom{n}{5}$$

$$=0+1\cdot\frac{n}{1}+15\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2\cdot1}+50\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot2\cdot1}+60\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+24\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

zu A 16.10:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=n^3+3n^2+2n$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+3\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4},$$

also

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}-3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\left[\frac{(n+2)\cdot(n+3)}{2}-(2n+1)-2\right]=\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$$

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=n^4+6n^3+11n^2+6n$ ergibt sich aus der Gleichung

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+3\cdot4\cdot5\cdot6+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5}$$

$$(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4)+6\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+11\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+6\cdot(1+2+3+\ldots+n)$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5}$$

also

$$(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4)$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5}-6\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)-11\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-6\cdot(1+2+3+\ldots+n)$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)}{5}-6\cdot\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-11\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}-6\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)}{30}\cdot[6\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot(n+4)-45\cdot n\cdot(n+1)-55\cdot(2n+1)-90]$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)}{30}\cdot[6n^3+54n^2+156n+144-45n^2-45n-110n-55-90]$$
$$=\frac{n\cdot(n+1)}{30}\cdot[6n^3+9n^2+n-1]=\frac{n\cdot(n+1)}{30}\cdot(2n+1)\cdot(3n^2+3n-1)$$

zu A 16.11:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$(n+1)^4-1^4=4\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+6\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+4\cdot(1+2+3+\ldots+n)+n\cdot 1$

also

$4\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)=(n+1)^4-1^4-6\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)-4\cdot(1+2+3+\ldots+n)-n\cdot 1$

$=n^4+4n^3+6n^2+4n+1-1-2n^3-3n^2-n-2n^2-2n-n$

$=n^4+2n^3+n^2=n^2\cdot(n^2+2n+1)=n^2\cdot(n+1)^2$

also

$(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)=\frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$(n+1)^5-1^5$

$=5\cdot(1^4+2^4+\ldots+n^4)+10\cdot(1^3+2^3+\ldots+n^3)+10\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2)+5\cdot(1+2+\ldots+n)+n\cdot 1$

also

$5\cdot(1^4+2^4+\ldots+n^4)$

$=(n+1)^5-1^5-10\cdot(1^3+2^3+\ldots+n^3)-10\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2)-5\cdot(1+2+\ldots+n)-n\cdot 1$

$=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1-1-2{,}5n^4-5n^3-2{,}5n^2-10/3\cdot n^3-5n^2-5/3\cdot n-2{,}5n^2-2{,}5n-n$

$=n^5+5/2\cdot n^4+5/3\cdot n^3-1/6\cdot n$

also

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

zu A 16.12:

$$S_4(n)=1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{5}\cdot\left[\binom{5}{0}\cdot B_0\cdot n^5+\binom{5}{1}\cdot B_1\cdot n^4+\binom{5}{2}\cdot B_2\cdot n^3+\binom{5}{3}\cdot B_3\cdot n^2+\binom{5}{4}\cdot B_4\cdot n^1\right]$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left[B_0\cdot n^5+5\cdot B_1\cdot n^4+10\cdot B_2\cdot n^3+10\cdot B_3\cdot n^2+5\cdot B_4\cdot n^1\right]=\frac{1}{5}\cdot\left[n^5+\frac{5}{2}n^4+\frac{5}{3}n^3-\frac{1}{6}n^1\right]$$

wobei $B_0=1$, $B_1=\frac{1}{2}$, $B_2={}^1/_6$, $B_3=0$ und $B_4=-{}^1/_{30}$.

$$S_5(n) = 1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left[\binom{6}{0} \cdot B_0 \cdot n^6 + \binom{6}{1} \cdot B_1 \cdot n^5 + \binom{6}{2} \cdot B_2 \cdot n^4 + \binom{6}{3} \cdot B_3 \cdot n^3 + \binom{6}{4} \cdot B_4 \cdot n^2 + \binom{6}{5} \cdot B_5 \cdot n^1 \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left[B_0 \cdot n^6 + 6 \cdot B_1 \cdot n^5 + 15 \cdot B_2 \cdot n^4 + 20 \cdot B_3 \cdot n^3 + 15 \cdot B_4 \cdot n^2 + 6 \cdot B_5 \cdot n^1 \right]$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \left[n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2} n^4 - \frac{1}{2} n^2 \right]$$

wobei $B_0 = 1$, $B_1 = ½$, $B_2 = {}^1/_6$, $B_3 = 0$, $B_4 = –{}^1/_{30}$, $B_5 = 0$

zu A 16.13:

- **Summe der ersten n Quadratzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 3. Grades soll durch die Punkte P_0 (0|0), P_1 (1|1), P_2 (2|5) und P_3 (3|14) verlaufen.

$$L_3(n) = \frac{(n-x_1)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \frac{(n-x_0)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1$$
$$+ \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot 1$$
$$+ \frac{(n-0)(n-1)(n-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot 5 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \cdot 14$$
$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot (n^3 - 5n^2 + 6n) - \frac{5}{2} \cdot (n^3 - 4n^2 + 3n) + \frac{14}{6} \cdot (n^3 - 3n^2 + 2n)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 4. Grades soll durch die Punkte P_0 (0|0), P_1 (1|1), P_2 (2|9) P3 (3|36) und P_4 (4|100) verlaufen.

$$L_4(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 1$$
$$+ \frac{(n-0)(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 9 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 36 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 100$$
$$= 0 - \frac{1}{6} \cdot (n^4 - 9n^3 + 26n^2 - 24n) + \frac{9}{4} \cdot (n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n)$$
$$- \frac{36}{6} \cdot (n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n) + \frac{100}{24} \cdot (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2$$