Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 15.1:.

Problem 1:

r	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	3/10	1/3	2/5	1/2
x	9/91	8/73	7/57	6/43	5/31	4/21	3/13	21/79	2/7	6/19	1/3

Problem 2:

r	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	3/7	1/2	3/5	2/3	3/4
x	36/121	8/25	28/81	3/8	20/49	4/9	12/25	1/2	12/25	4/9	3/8	8/25	12/49

zu A 15.2:

Man beachte, dass in Formel 15.3 die Variable x für die Krümmung des zu bestimmenden Kreises verwendet wird, bei der Lösung der beiden Probleme steht die Variable x für den Radius des Kreises. Daher wird hier die Variable z für die Krümmung des zu bestimmenden Kreises verwendet.

- **Problem 1**

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r und ein Kreis mit Radius 1 – r sowie der äußere Kreis mit Radius 1. Dann gilt für die beiden zu ergänzenden Kreise mit Krümmung z gemäß Formel 15.3:

$$\left[z-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{1-r}-1\right)\right]^2=2\cdot\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{1-r}-1\right)^2-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(1-r)^2}+1\right)\right]$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{1-r}-1=\frac{1-r+r-r\cdot(1-r)}{r\cdot(1-r)}=\frac{1-r+r^2}{r\cdot(1-r)}\text{, also }\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{1-r}-1\right)^2=\frac{(1-r+r^2)^2}{r^2\cdot(1-r)^2}$$

$$\frac{1}{r^2}+\frac{1}{(1-r)^2}+1=\frac{(1-r)^2+r^2+r^2\cdot(1-r)^2}{r^2\cdot(1-r)^2}=\frac{1-2r+r^2+r^2+r^2-2r^3+r^4}{r^2\cdot(1-r)^2}$$

$$=\frac{1-2r+3r^2-2r^3+r^4}{r^2\cdot(1-r)^2}=\frac{(1-r+r^2)^2}{r^2\cdot(1-r)^2}$$

d. h. auf der rechten Seite der quadratischen Gleichung steht null. Die quadratische Gleichung hat also nur die Lösung $z=\frac{1-r+r^2}{r\cdot(1-r)}$. Der Radius der zu ergänzenden Kreise ist dann gleich dem Kehrwert dieses Bruchterms, vgl. Lösung von Problem 1.

- **Problem 2**

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r und zwei Kreise mit Radius x. Der äußere Kreis wird zunächst nicht beachtet. Dann gilt für die beiden zu ergänzenden Kreise mit Krümmung z gemäß Formel 15.3:

$$\left[z-\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)\right]^2=2\cdot\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

Nebenrechnung:

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{r}+\frac{2}{x}\right)^2=\frac{1}{r^2}+\frac{4}{rx}+\frac{4}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^2-\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{r^2}+\frac{4}{rx}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{4}{rx}+\frac{2}{x^2}=\frac{2\cdot(2x+r)}{rx^2}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$z_1=\frac{1}{r}+\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4\cdot(2x+r)}{rx^2}} \text{ und } z_2=\frac{1}{r}+\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{4\cdot(2x+r)}{rx^2}},$$

wobei für die negative Lösung z_2 gilt: $z_2 = -1$, denn der äußere Kreis hat den Radius 1.

Es gilt also $-1=\frac{1}{r}+\frac{2}{x}-\sqrt{\frac{4\cdot(2x+r)}{rx^2}}$, d. h. $\sqrt{\frac{4\cdot(2x+r)}{rx^2}}=\frac{1}{r}+\frac{2}{x}+1=\frac{x+2r+rx}{rx}$.

Quadrieren der beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$\frac{4\cdot(2x+r)}{rx^2}=\frac{(x+2r+rx)^2}{r^2x^2}$ ⇔ $4r \cdot (2x + r) = (x + 2r + rx)^2$

⇔ $8rx + 4r^2 = x^2 + 4r^2 + r^2x^2 + 4rx + 2rx^2 + 4r^2x$

⇔ $4rx – 4r^2x = x^2 + r^2x^2 + 2rx^2$

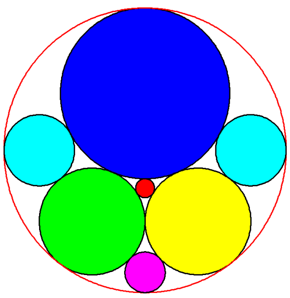
⇔ $4rx \cdot (1 – r) = x^2 \cdot (1 + 2r + r^2)$

⇔ $4r \cdot (1 – r) = x \cdot (1 + r)^2$,

vgl. Lösung von Problem 2.

zu A 15.3:

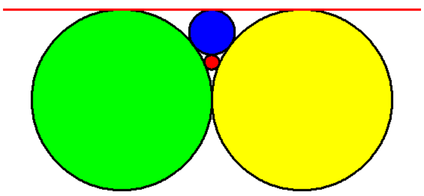
- **Descartes-Tripel (5 ; 8 ; 8)**



Wählt man r_5 = 360/3 = 120 LE für den äußeren Radius, dann ist r_1 = 360/5 = 72 LE (blau);
$r_2 = r_3$ = 360/8 = 45 LE (grün, gelb), dann ist r_4 = 360/45 = 8 LE (rot).

weitere Radien: r_6 = 360/21 = 120/7 LE (pink), r_7 = 360/12 = 30 LE (hellblau)

- **Descartes-Tripel (1 ; 1 ; 4), vgl. Abschnitt 15.5**

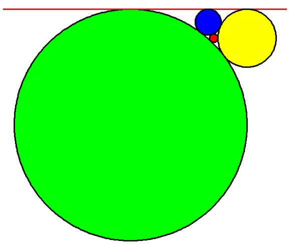


Wählt man r_1 = 12/1 = 12 LE (grün), r_2 = 12/1 = 12 LE (gelb) und r_3 = 12/4 = 3 LE (blau), dann ist r_4 = 12/12 = 1 LE (rot) und r_5 = 12/0 = ∞ (außen).

weiterer Radius (hier nicht eingezeichnet): r_6 = 4/3 LE (berührt den gelben bzw. grünen und den blauen Kreis sowie die Gerade)

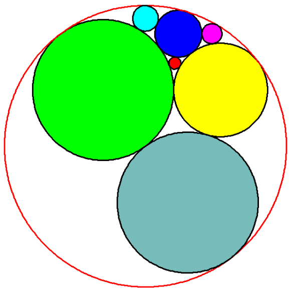
- **Descartes-Tripel (1 ; 4 ; 9), vgl. Abschnitt 15.5**

Wählt man r_1 = 252/1 = 252 LE (grün), r_2 = 252/4 = 63 LE (gelb) und r_3 = 252/9 = 28 (blau), dann ist r_4 = 252/28 = 9 (rot) und r_5 = 252/0 = ∞ (außen).



weiterer Radius (hier nicht eingezeichnet): r_6 = 63/4 LE (berührt den grünen und den blauen Kreis sowie die Gerade)

- **Descartes-Tripel (2 ; 3 ; 6)**

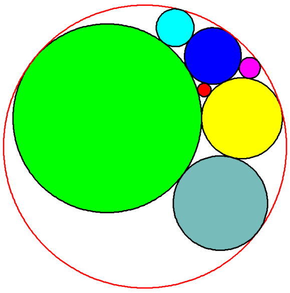


Wählt man r_5 = 138/1 = 138 LE für den äußeren Radius, dann ist r_1 = 138/2 = 69 LE (grün); r_2 = 138/3 = 46 LE (gelb) und r3 = 128/6 = 23 LE (blau), dann ist r_4 = 128/23 = 6 LE (rot).

weitere Radien: r_6 = 138/2 = 69 LE (blaugrau), r_7 = 11 (türkis), r_8 = 14 (pink).

Die Grafik stimmt mit der des Descartes-Tripels (2 ; 2 ; 3) überein.

- **Descartes-Tripel (3 ; 7 ; 10)**

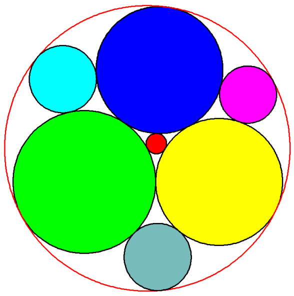


Wählt man r_5 = 210/2 = 105 LE für den äußeren Radius, dann ist r_1 = 210/3 = 70 LE (grün); r_2 = 210/7 = 30 LE (gelb) und r_3 = 210/10 = 10 LE (blau), dann ist r_4 = 210/42 = 5 LE (rot).

weitere Radien: r_6 = 210/6 = 35 LE (blaugrau), r_7 = 210/15 = 14 LE (hellblau), r_8 = 210/27 = 70/9 LE (pink).

Die Grafik stimmt mit der des Descartes-Tripels (3 ; 6 ; 7) überein.

- **Descartes-Tripel (8 ; 9 ; 9)**



Wählt man r_5 = 504/4 = 126 LE für den äußeren Radius, dann ist r_1 = 504/8 = 63 LE (grün);
$r_2 = r_3$ = 504/9 = 56 LE (blau, gelb), dann ist r_4 = 504/56 = 9 LE (rot).

weitere Radien: k_6 = 504/17 LE (blaugrau/hellblau), k_7 = 504/20 = 126/5 LE (pink)

zu A 15.4:

(1) Die Anordnung der Kreise ist punkt- und achsensymmetrisch

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ (grün, gelb, blau)

Lösen der Descartes-Gleichung liefert $x = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{3}$, also

$r_4 = \frac{1}{3+2\cdot\sqrt{3}} \approx 0{,}1547$ (rot) und $r_5 = -\frac{1}{3-2\cdot\sqrt{3}} \approx 2{,}1547$ (außen)

$\frac{1}{r_6} = 2\cdot\left(1+1+(3-2\cdot\sqrt{3})\right)-1 \approx 2{,}072$, also $r_6 \approx 0{,}483$ (hellblau).

(2) $r_1 = r_2 = 5$ (grün, gelb), $r_3 = 8$ (blau)

Lösen der Descartes-Gleichung liefert

$$x = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right) \pm 2\cdot\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{21}{40} \pm 2\cdot\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{21}{40} \pm \frac{24}{40}$$

Hieraus ergibt sich $r_4 = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$ (rot) und $r_5 = \frac{40}{3} \approx 13{,}333$ (außen).

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2\cdot(k_1+k_2+k_3)-x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
grün (5), blau (8), außen (40/3)	gelb (5)	$2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{3}{40}\right)-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$	$\frac{10}{3} \approx 3{,}3$ (hellblau)
grün (5), gelb (5), außen (40/3)	blau (8)	$2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{3}{40}\right)-\frac{1}{8}=\frac{21}{40}$	$\frac{40}{21} \approx 1{,}905$ (pink)

(3) $r_1 = 6$ (grün), $r_2 = 5$ (gelb), $r_3 = 3$ (blau)

$$2\cdot\left(\frac{1}{6^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{161}{900}+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{7}{10}+\frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}-\frac{7}{5x}-\frac{119}{900}=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{180}{17}x=\frac{900}{119} \Leftrightarrow x=-\frac{90}{17}\pm\frac{\sqrt{504000}}{119},$$

also $r_4 \approx 0{,}672$ und $r_5 \approx 11{,}260$

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
grün (6), blau (3), außen (11,260)	gelb (5)	$2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11{,}260}\right) - \frac{1}{5} \approx 0{,}622$	1,607 (hellblau)
blau (3), gelb (5), außen (11,260)	grün (6)	$2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11{,}260}\right) - \frac{1}{6} \approx 0{,}722$	1,384 (pink)
grün (6), gelb (5), außen (11,260)	blau (3)	$2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11{,}260}\right) - \frac{1}{3} \approx 0222$	4,497 (blaugrau)

zu A 15.5:

(1) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 14$, $k_2 = 15$ und $k_3 = 11$
ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(14 + 15 + 11) \pm 2 \cdot \sqrt{14 \cdot 15 + 14 \cdot 11 + 15 \cdot 11} = 40 \pm 2 \cdot \sqrt{529} = 40 \pm 46$, also $k_4 = -6$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 86$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

2 · (14 + 15 – 6) – 11 = 35 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1, k_2 und k_4),

2 · (14 + 11 – 6) – 15 = 23 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1, k_3 und k_4) usw.

(2) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 8$, $k_2 = 8$ und $k_3 = 5$
ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(8 + 8 + 5) \pm 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 5} = 21 \pm 2 \cdot \sqrt{144} = 21 \pm 24$, also $k_4 = -3$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 45$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

2 · (8 + 8 – 3) – 5 = 21 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1, k_2 und k_4),

2 · (8 + 5 – 3) – 8 = 12 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1, k_3 und k_4) usw.

(3) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 4$, $k_2 = 12$ und $k_3 = 13$
ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(4 + 12 + 13) \pm 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 12 + 4 \cdot 13 + 12 \cdot 13} = 29 \pm 2 \cdot \sqrt{256} = 29 \pm 32$, also $k_4 = -3$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 61$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

2 · (12 + 13 – 3) – 4 = 40 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_2, k_3 und k_4),

2 · (13 + 4 – 3) – 12 = 16 (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1, k_3 und k_4) usw.

zu A 15.6:

In Beispiel 2 ist $r = \frac{1}{2}$ und $r_0 = \frac{1}{3}$.

Für die Krümmung der beiden benachbarten Kreise K_1 ergibt sich: $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 7$, weiter: $\frac{1}{r_2} = \frac{4}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{4}{\frac{1}{2}} = 10$ und $\frac{1}{r_3} = \frac{9}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{9}{\frac{1}{2}} = 15$ sowie $\frac{1}{r_4} = \frac{16}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{16}{\frac{1}{2}} = 22$

Allgemein: $\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{2}} = (n+1)^2 + 6 = n^2 + 2n + 7$

und somit die Folge der Kreiskrümmungen 6, 7, 10, 15, 22, 31, 42, …

zu A 15.7:

z. B. Kette 12, 13, 16, 21, …

Hier ist r = 1/3 (äußerer Kreis) und r_0 = ¼

$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} = 13$; $\frac{1}{r_2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{4}{\frac{1}{3}} = 16$; $\frac{1}{r_3} = \frac{9}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{9}{\frac{1}{3}} = 21$;
$\frac{1}{r_4} = \frac{16}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{16}{\frac{1}{3}} = 28$

Allgemein: $\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{3}} = (n+1)^2 + 12 = n^2 + 2n + 13$

zu A 15.8:

Gemäß Formel 15.4 ergibt sich für die Krümmung k_4 eines Kreises, der die Kreise mit den Krümmungen $k_1 = n^2$, $k_2 = (n + k)^2$, $k_3 = (2n + k)^2$ berührt:

$k_4 = 2 \cdot (n^2 + (n + k)^2 + (2n + k)^2) - 0 = 2 \cdot (n^2 + n^2 + 2nk + k^2 + 4n^2 + 4nk + k^2)$, also

$k_4 = 4 \cdot (3n^2 + 3nk + k^2)$ mit $n, k \in$ IN

Für n = 1 und k = 0 ergibt sich beispielsweise: $k_4 = 4 \cdot (3 + 0 + 0) = 12$, vgl. Abb. 15.7a.

Für n = 1 und k = 1 ergibt sich beispielsweise: $k_4 = 4 \cdot (3 + 3 + 1) = 28$, vgl. Abb. 15.7b.

zu A 15.9:

Aus der Beziehung $k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2 = 2 \cdot (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)$ ergibt sich

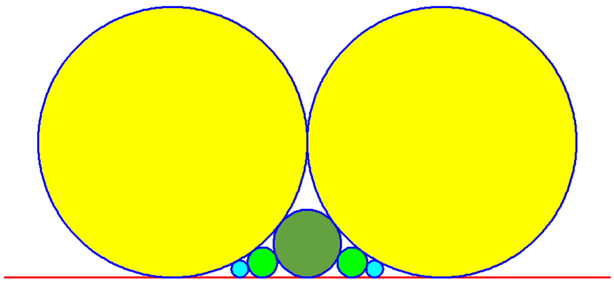
$k_3^2 - 2 \cdot k_3 \cdot (k_1 + k_2) = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 - k_1^2 - k_2^2 \Leftrightarrow (k_3 - (k_1 + k_2))^2 = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 - k_1^2 - k_2^2 + (k_1 + k_2)^2 \Leftrightarrow$

$(k_3 - (k_1 + k_2))^2 = 4 \cdot k_1 \cdot k_2$, also $k_3 = (k_1 + k_2) \pm 2 \cdot \sqrt{k_1k_2}$

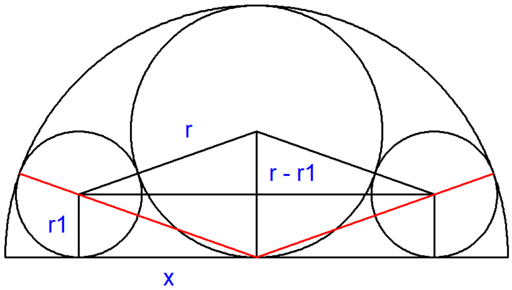
Im Beispiel mit $k_1 = k_2 = 1$ ergeben sich die beiden Lösungen $k_3 = 0$ bzw. $k_3 = 4$.

Im Beispiel mit $k_1 = 1$ (gelb) und $k_2 = 4$ (grün) ergeben sich die beiden Lösungen $k_3 = 1$ bzw. $k_3 = 9$, d. h., außer dem Kreis mit Radius $r_3 = 1/9$ (hellblau) gibt es einen weiteren Kreis mit Radius $r_3 = 1$.

usw.



zu A 15.10:



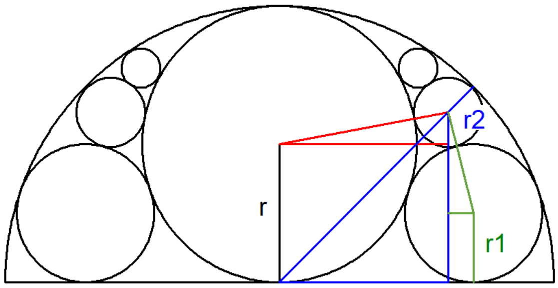
Für das rechtwinklige Dreieck, das bestimmt ist durch die Mittelpunkte des gelb gefärbten und des grün gefärbten Kreises, gilt:

$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2$, hieraus ergibt sich: $x^2 = 4 \cdot r \cdot r_1$, also mit $r = \frac{1}{2}$: $x^2 = 2 \cdot r_1$

Für den Abstand x der Berührpunkte der Kreise mit Radius r und r_1 gilt außerdem:

$x^2 = (1 - r_1)^2 - r_1^2 = 1 - 2r_1$

Hieraus folgt: $1 - 2r_1 = 2r_1 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{4}$, also $x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.



Um dem Mittelpunkt M_2 $(x_2|y_2)$ und den Radius r_2 zu bestimmen, betrachte man drei Dreiecke:

rot: $(y_2 - \frac{1}{2})^2 + x_2^{\ 2} = (\frac{1}{2} + r_2)^2$

grün: $(y_2 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - x_2)^2 = (\frac{1}{4} + r_2)^2$

blau: $x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} = (1 - r_2)^2$

Umformen dieser drei Gleichungen ergibt

$x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} - r_2^{\ 2} = y_2 + r_2$

$x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} - r_2^{\ 2} = \sqrt{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} r_2 - \frac{1}{2}$

$x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} - r_2^{\ 2} = 1 - 2r_2$

Es gelten also die Gleichungen $y_2 + r_2 = 1 - 2r_2$, also $y_2 = 1 - 3r_2$, sowie
$y_2 + r_2 = \sqrt{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} r_2 - \frac{1}{2}$, also $\sqrt{2} \cdot x_2 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} r_2 = \frac{1}{2}$.

Ersetzt man die Variable y_2, so erhält man hieraus $\sqrt{2} \cdot x_2 + r_2 = 1$, also $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - r_2)$.

Setzt man dies beispielsweise in die dritte Gleichung $x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} = (1 - r_2)^2$ ein, so ergibt sich:

$\frac{1}{2} \cdot (1 - r_2)^2 + (1 - 3r_2)^2 = (1 - r_2)^2$, also

$\frac{1}{2} - r_2 + \frac{1}{2} \cdot r_2^{\ 2} + 1 - 6r_2 + 9r_2^{\ 2} = r_2^{\ 2} - 2r_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{17}{2} r_2^{\ 2} - 5r_2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

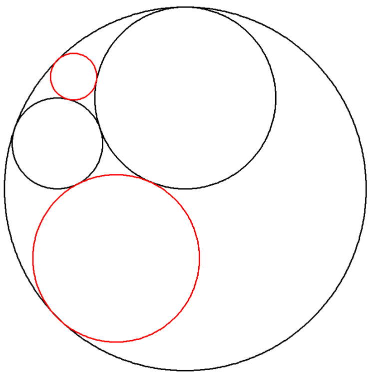
$r_2{}^2 - \frac{10}{17} r_2 = -\frac{1}{17} \Leftrightarrow (r_2 - \frac{5}{17})^2 = \frac{25}{289} - \frac{1}{17} (= \frac{8}{289}) \Leftrightarrow r_2 \approx 0{,}128$ (kleinere der beiden Lösungen)

Hieraus folgt dann: $x_2 \approx 0{,}617$ und $y_2 \approx 0{,}617$.

Den Radius kann man auch mithilfe der Descartes'schen Formel (15.3) berechnen – man beachtet dabei die Beschränkung auf einen Halbkreis nicht.

Einsetzen von $k_1 = \frac{1}{0{,}5} = 2$, $k_2 = \frac{1}{0{,}25} = 4$ und $k_3 = \frac{1}{-1} = -1$ führt zu $(k_4 - 5)^2 = \pm 2\sqrt{3}$, also $r_4 = \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{3}}$.

Die kleinere der beiden Lösungen ist der Radius, der oben berechnet wurde; in der folgenden Abbildung ist auch der andere berührende Kreis eingetragen.



Der Radius des in der Aufgabenstellung rot gefärbten Kreises kann dann mithilfe des Vieta'schen Wurzelsatzes (Formel 15.4) berechnet werden: Bekannt sind die Radien des gelb ausgefüllten Kreises (0,5) bzw. blau ausgefüllten Kreises (0,128) sowie der Radius des äußeren Kreises (1); eine Lösung ist dann bereits bekannt, nämlich der Radius des grün gefüllten Kreises (0,25):

$2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{0{,}128} - \frac{1}{1}\right) - \frac{1}{0{,}25} \approx 13{,}657 \approx \frac{1}{0{,}073}$. Demnach ist also der gesuchte Radius 0,073 LE!

zu A 15.11:

Abb. links: Für die Diagonale des Quadrats gilt: $\sqrt{2} = 2r \cdot (1 + \sqrt{2})$ und weiter

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}293 .$$

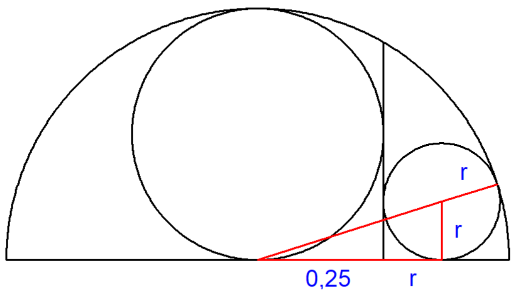


Abb. rechts: Im rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt des Halbkreises und dem Mittelpunkt des kleinen Kreises rechts ist, gilt:

$(\frac{1}{4} + r)^2 + r^2 = (\frac{1}{2} - r)^2$, also $r^2 + \frac{3}{2} r = \frac{3}{16} \Leftrightarrow (r + \frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \approx 0{,}116$.

zu A 15.12:

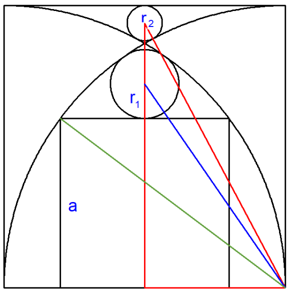
Für den Radius R = 1 des Viertelkreisbogens (= Seitenlänge des Quadrats) gilt:

$1 = r_1 + r_1 \cdot \sqrt{2}$, also $r_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414$

und weiter für die Diagonale des Quadrats $\sqrt{2} = 1 + (r_2 + r_2 \cdot \sqrt{2})$, also

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}172$$

zu A 15.13:



rechtwinkliges Dreieck mit roter Hypotenuse: $(1-r_2)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1+r_2)^2$, also $4r_2 = \frac{1}{4}$ und somit $r_2 = \frac{1}{16}$

rechtwinkliges Dreieck mit grüner Hypotenuse: $(\frac{1}{2} + \frac{a}{2})^2 + a^2 = 1^2$, also $\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \; a^2 + \frac{2}{5}a = \frac{3}{5} \Leftrightarrow (a + \frac{1}{5})^2 = \frac{16}{25} \; \Leftrightarrow \; a = \frac{3}{5}$

rechtwinkliges Dreieck mit blauer Hypotenuse: $(a + r_1)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1-r_1)^2$, und mit $a = \frac{3}{5}$ ergibt sich:

$\frac{16}{5} r_2 = \frac{39}{100} \Leftrightarrow r_2 = \frac{39}{320}$

zu A 15.14:

Zwischen der Diagonale des Quadrats (Länge $\sqrt{2}$ LE) und dem Radius *r* des rot gefärbten Kreises gilt der Zusammenhang: $2r_1 + 2\cdot(1-2r_1) = \sqrt{2}$, also $2r_1 = 2 - \sqrt{2}$, d. h. $r_1 = 1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}293$

Verbindet man beispielsweise den linken oberen Eckpunkt des Quadrats mit dem Mittelpunkt eines kleinen Kreises (hier dann oben rechts), dann ist dies die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Seitenlänge x und $1 - x$ und einer Hypotenuse der Länge $1 - r_2$. Daher gilt

$$x^2 + (1-x)^2 = (1-r_2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = (1-r_2)^2$$

Für die Diagonale des großen Quadrats gilt: $2\cdot r_1 + 2\cdot r_2 + 2\cdot x\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$, also

$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (1 - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}) - x\cdot\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1) - x\cdot\sqrt{2}$ und demnach

$1 - r_2 = x\cdot\sqrt{2} + (2-\sqrt{2})$ und weiter

$$(1-r_2)^2 = 2x^2 + 2\cdot(2-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}\cdot x + (6 - 4\cdot\sqrt{2}) = 2x^2 + (4\cdot\sqrt{2}-4)\cdot x + (6-4\cdot\sqrt{2})$$

Setzt man den rechts stehenden Term und den oben erhaltenen gleich, so ergibt sich:

$$2x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + (4\cdot\sqrt{2}-4)\cdot x + (6-4\cdot\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$(4\cdot\sqrt{2}-2)\cdot x = 4\cdot\sqrt{2} - 5$, also

$x = \dfrac{4\cdot\sqrt{2}-5}{4\cdot\sqrt{2}-2} = \frac{1}{14}\cdot(11 - 6\cdot\sqrt{2}) \approx 0{,}180$, also

$$r_2 = (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{14}\cdot(11-6\cdot\sqrt{2})\cdot\sqrt{2} = \frac{3}{14}\cdot\sqrt{2} - \frac{1}{7} \approx 0{,}160$$

zu A 15.15:

rechtwinkliges Dreieck OAM$_1$ (rot): $(\frac{1}{2})^2 + r_1^{\;2} = (1-r_1)^2$, also $\frac{1}{4} + r_1^{\;2} = 1 - 2r_1 + r_1^{\;2} \Leftrightarrow 2r_1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow r_1 = \frac{3}{8}$

Weitere rechtwinklige Dreiecke (blau):

OBM$_2$: $OB^2 + BM_2^{\;2} = OM_2^{\;2} \Leftrightarrow (1-r_2)^2 + BM_2^{\;2} = (1+r_2)^2$

BCM$_2$: $BC^2 + BM_2^{\;2} = CM_2^{\;2} \Leftrightarrow r_2^{\;2} + BM_2^{\;2} = (1-r_2)^2$

Auflösen der beiden Gleichungen nach $BM_2^{\;2}$ und gleichsetzen:

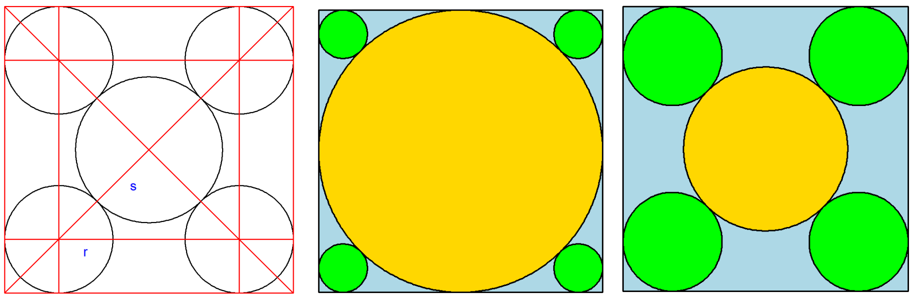
$BM_2^{\;2} = (1+r_2)^2 - (1-r_2)^2 = (1-r_2)^2 - r_2^{\;2}$ und weiter

$1 + 2r_2 + r_2^{\;2} - 1 + 2r_2 - r_2^{\;2} = 1 - 2r_2 + r_2^{\;2} - r_2^{\;2} \Leftrightarrow 6r_2 = 1 \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{6}$

rechtwinkliges Dreieck OAM$_3$ (grün): $(\frac{1}{2})^2 + (1 - r_3)^2 = (1 + r_3)^2$, also

$\frac{1}{4} + 1 - 2r_3 + r_3^{\;2} = 1 + 2r_3 + r_3^{\;2} \Leftrightarrow 4r_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r_3 = \frac{1}{16}$

zu A 15.16:



Gleichgültig, welche der Lagen der Kreise man betrachtet, gilt: Die 5 Kreise nehmen die Fläche $A = \pi \cdot (s^2 + 4r^2)$ ein.

Die Diagonale des Quadrates hat die Länge $\sqrt{2}$; sie setzt sich zusammen aus je zweimal der Länge des Radius *r* und des Radius *s* sowie je zwei halben Diagonalen in den kleineren Quadraten in den Ecken; diese Strecken haben die Länge $r \cdot \sqrt{2}$. Insgesamt gilt also: $2 \cdot r \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot r + 2 \cdot s = \sqrt{2}$.

Aus dieser Bedingung kann man einen Term für *s* herleiten: $s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2}+1) \cdot r$ und nach Einsetzen erhält man dann eine quadratische Funktion

$$A(r) = \pi \cdot (s^2 + 4r^2) = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} - (2+\sqrt{2}) \cdot r + (7 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot r^2\right),$$

deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel darstellt. Die größten Werte werden am rechten oder linken Rand der Definitionsmenge des Problems angenommen.

Daher bestimmen wir diese Definitionsmenge:

(1) Der Kreis mit Radius *s* berührt die Quadratseiten, d.h. *s* = 0,5 LE. In diesem Fall gilt

$2 \cdot (\sqrt{2}+1) \cdot r + 2 \cdot 0{,}5 = \sqrt{2}$, also $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}086$

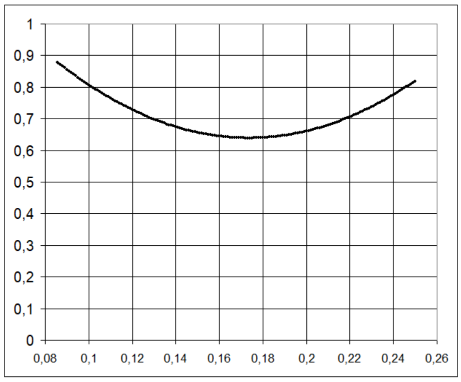
(2) Die vier Kreise in den Quadratecken berühren einander, d.h. *r* = 0,25 LE, d.h. die Definitionsmenge bzgl. der Variablen *r* ist: $0{,}086 \le r \le 0{,}25$

Die Funktionswerte an diesen Stellen sind: A(0,086) ≈ 0,878 FE bzw. A(2,5) ≈ 0,819 FE, d. h., das Maximum wird in dem Fall angenommen, dass der innere Kreis die Quadratseiten berührt.

Bleibt noch zu berechnen,

– welche Fläche bedeckt ist, wenn die fünf Radien gleich groß sind. Dann gilt: $(2\cdot\sqrt{2}+4)\cdot r=\sqrt{2}$ und daher $r=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}-1)\approx 0{,}207$ mit A ≈ 0,674 FE.

– wo das Minimum der Bedeckung liegt. Aus der Grafik kann man ablesen, dass dieses Minimum bei r ≈ 0,174 liegt. Den exakten Wert findet man, indem man den Scheitelpunkt der quadratischen Parabel bestimmt. Dieser liegt bei $r=\dfrac{10+3\cdot\sqrt{2}}{82}\approx 0{,}1737$, vgl. die rechte Grafik oben.



zu A 15.17:

Figur Mitte: Der große Kreis ist der Inkreis des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1, d. h., sein Radius ist ein Drittel so groß wie dessen Höhe, also $s=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}$. Tangenten durch die Berührpunkte trennen vom großen gleichseitigen Dreieck kleinere gleichseitige Dreiecke ab. Für die Eckkreise gilt, dass sie Inkreise dieser „restlichen" gleichseitigen Dreiecke sind, also einen Radius *r* besitzen, der ein Drittel so groß ist wie die Höhe dieser gleichseitigen Teildreiecke, also: $r=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{18}\cdot\sqrt{3}\approx 0{,}096$.

Für die bedeckte Fläche gilt daher: $A=\pi\cdot(\frac{1}{36}\cdot 3+3\cdot\frac{1}{324}\cdot 3)=\pi\cdot\frac{1}{9}$, das ist 80,6% der Gesamtfläche von $A_{Dreieck}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{3}$.

Figur rechts: Hier sind alle Kreise gleich groß; sie sind Inkreise der 4 gleich großen gleichseitigen Dreiecke, die man bei Einzeichnen der Tangenten durch die Berührpunkte erhält. Hier gilt also: $r=\frac{1}{12}\cdot\sqrt{3}$, d. h. $A=\frac{1}{12}\cdot\pi$; der bedeckte Anteil beträgt demnach 60,5%.

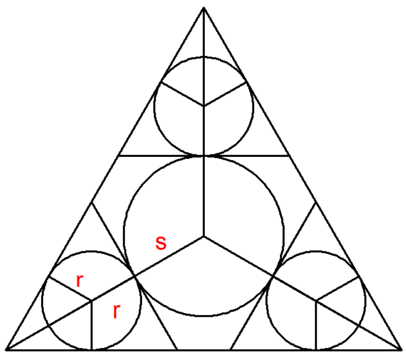
Figur links: Verbindet man die Mittelpunkte der drei großen Kreise miteinander, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2*r*. Fällt man dann die Lote von diesen Mittelpunkten auf die Dreieckseiten, dann kann man ablesen: Die Höhe des Ausgangsdreiecks ist so groß wie die Höhe des innen liegenden Dreiecks der Mittelpunkte plus *r* (unten) und plus 2*r* (oben), also: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=r+\frac{2r}{2}\cdot\sqrt{3}+2r$. Nach *r* aufgelöst ist dies: $r=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Bevor man jetzt etwas mühsam den Rdius des innen liegenden Kreises bestimmt, sollte man doch eher die geometrische Situation allgemein betrachten:

Man kann stets die Eckkreise mit Radius *r* als Inkreise von gleichseitigen Dreiecken auffassen, die durch die Tangenten durch die Berührpunkte mit dem Mittenkreis entstehen.

Dann gilt für die Höhe *h* dieser Eck-Dreiecke: $h=3r$.

Der Abstand des Mittelpunkts des Ausgangsdreiecks von den drei Eckpunkten des Dreiecks (Radius des Umkreises) beträgt $h+s=\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3})=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$, also $s=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}-3r$



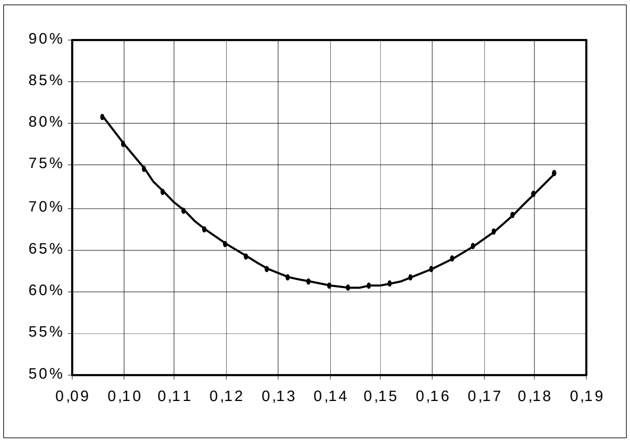
Demnach gilt für den überdeckten Teil des gleichseitigen Dreiecks:

$$A=\pi\cdot(3r^2+s^2)=\pi\cdot(3r^2+(\tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}-3r)^2)=\pi\cdot(3r^2+\tfrac{1}{3}-2\cdot\sqrt{3}\cdot r+9r^2)=\pi\cdot(12r^2+\tfrac{1}{3}-2\cdot\sqrt{3}\cdot r).$$

Es sich also um den Funktionsterm einer quadratischen Funktion mit der Variablen *r*:

$$A=12\pi\cdot(r^2-\tfrac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot r+\tfrac{1}{36})$$

Das Minimum der Funktion liegt bei $r = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}144$, also für den Fall vor, dass vier gleich große Kreise gezeichnet werden. Das Maximum der Funktion muss an einem der beiden Randwerte der Definitionsmenge liegen. Diese Definintionsmenge ist gegeben durch das Intervall $\frac{1}{18} \cdot \sqrt{3} \approx 0{,}096 \le r \le \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}183$.
Aus der folgenden Abbildung ist zu erkennen, dass die maximale Bedeckung vorliegt, wenn zunächst der Inkreis des gleichseitigen Dreiecks gezeichnet wird und dann in die Ecken jeweils die kleineren Kreise.



zu A 15.18:

Bezeichnet man die Dreiecksseiten (wie üblich) mit *a* (kurze Kathete), *b* (lange Kathete) und *c* (= 1 LE), dann gilt: $a^2 + b^2 = 1$, außerdem gilt für den Flächeninhalt: $(2r)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 1$. Weiter gilt: $b = a + 2r$, also $(2r)^2 = (b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$. Diese Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, wie man sieht, wenn man in die Gleichung für den Flächeninhalt einsetzt: $b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = 1$.

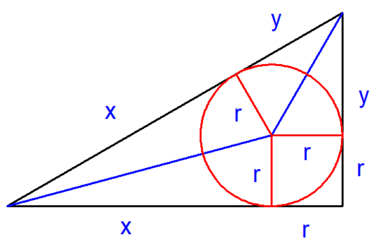
Weiter hilft hier die Formel für den Radius eines Inkreises im rechtwinkligen Dreieck: $r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$.

Einsetzen in $b = a + 2r$ ergibt: $b = a + (a + b - 1)$, also 2*a* = 1, d. h., es handelt sich bei den Dreiecken um halbe gleichseitige Dreiecke. Folglich gilt $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und somit

$$r = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1) = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0{,}183.$$

Hinweis zur Inkreis-Formel: Für den Flächeninhalt *A* eines rechtwinkligen Dreiecks mit Inkreis-Radius *r* gilt

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot r + r^2 = x \cdot r + y \cdot r + r^2 .$$



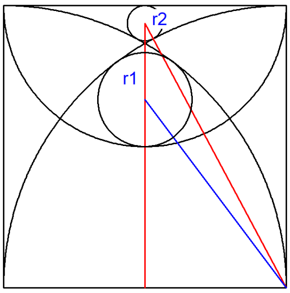
Dies ist einerseits gleich

$$A = (x \cdot r + r^2) + (y \cdot r + r^2) - r^2 = (x + r) \cdot r + (y + r) \cdot r - r^2$$
$$= a \cdot r + b \cdot r - r^2$$

andererseits gleich $A = (x + y) \cdot r + r^2 = c \cdot r + r^2$, also gilt:

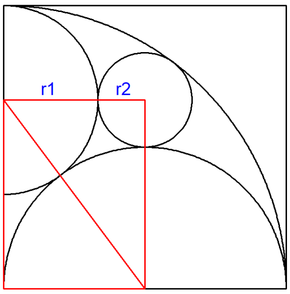
$a \cdot r + b \cdot r - r^2 = c \cdot r + r^2$, also $a + b - r = c + r \Leftrightarrow a + b - c = 2r$, d. h. $r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$

zu A 15.19:



rechtwinkliges Dreieck mit blauer Hypotenuse: $(\frac{1}{2}+r_1)^2+(\frac{1}{2})^2=(1-r_1)^2$, also $3r_1=\frac{1}{2}$ und somit $r_1=\frac{1}{6}$.

rechtwinkliges Dreieck mit roter Hypotenuse: $(1-r_2)^2+(\frac{1}{2})^2=(1+r_2)^2$, also $4r_2=\frac{1}{4}$ und somit $r_2=\frac{1}{16}$

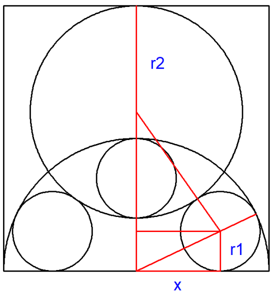


Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke gilt:

$(1-r_1)^2+(\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2}+r_1)^2$, also $3r_1=1$ und somit $r_1=\frac{1}{3}$.

$(r_1+r_2)^2+(\frac{1}{2}+r_2)^2=(\frac{1}{2}+r_1)^2$, also $(\frac{1}{3}+r_2)^2+(\frac{1}{2}+r_2)^2=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})^2$; hieraus ergibt sich:

$\frac{1}{9}+\frac{2}{3}r_2+r_2^{\;2}+\frac{1}{4}+r_2+r_2^{\;2}=\frac{25}{36} \;\Leftrightarrow\; 2r_2^{\;2}+\frac{5}{3}r_2=\frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; (r_2+\frac{5}{12})^2=\frac{49}{144} \;\Leftrightarrow\; r_2=\frac{1}{6}$.



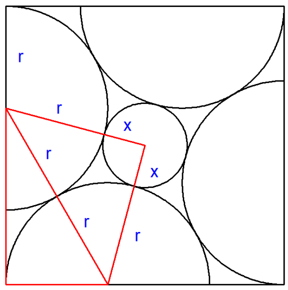
Zwischen den beiden Radien r_1 und r_2 besteht folgende Beziehung (Abstand des Kreises mit Radius r_2 von der unteren Quadratseite) : $1-2r_2=\frac{1}{2}-2r_1$, also $r_2=r_1+\frac{1}{4}$

Im unten liegenden rechtwinkligen Dreieck gilt: $r_1^{\;2}+x^2=(\frac{1}{2}-r_1)^2$, also $x^2=(\frac{1}{2}-r_1)^2-r_1^{\;2}=\frac{1}{4}-r_1$.

Im darüber liegenden rechtwinkligen Dreieck gilt: $(1-r_2-r_1)^2+x^2=(r_1+r_2)^2$. Ersetzt man $r_2=r_1+\frac{1}{4}$, dann ergibt sich hieraus: $(1-(r_1+\frac{1}{4})-r_1)^2+x^2=(r_1+r_1+\frac{1}{4})^2$, also $(\frac{3}{4}-2r_1)^2+x^2=(2r_1+\frac{1}{4})^2$ und weiter

$\frac{9}{16}-3r_1+4r_1^{\;2}+x^2=4r_1^{\;2}+r_1+\frac{1}{16} \;\Leftrightarrow\; x^2=4r_1-\frac{1}{2}$

Aus den beiden Gleichungen mit x^2 ergibt sich: $x^2=4r_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-r_1$, also $5r_1=\frac{3}{4}$, d. h. $r_1=\frac{3}{20}=0{,}15$ und hieraus weiter $r_2=0{,}4$ sowie $x^2=4\cdot 0{,}15-\frac{1}{2}=0{,}1$, also $x=\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}316$.

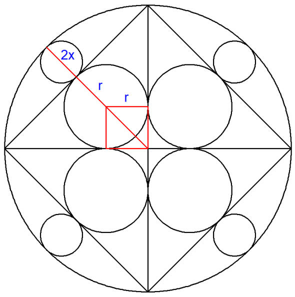


Für das untere der rechtwinkligen Dreiecke gilt: $r^2 + (1-r)^2 = (2r)^2$, also $r^2 + r = \frac{1}{2}$ und weiter $(r+\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, d.h. $r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \approx 0{,}366$.

Im oberen rechtwinkligen Dreieck gilt:

$(x+r)^2 + (x+r)^2 = (2r)^2$, also $(x+r)^2 = 2r^2$ und somit $x = (\sqrt{2}-1) \cdot r$ und schließlich

$x = (\sqrt{2}-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}-1) \approx 0{,}152$

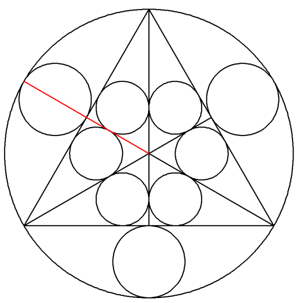


Das einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Zwischen der halben Seitenlänge des Quadrats und den innen liegenden Kreisen besteht der Zusammenhang: $r + r \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, also ist

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-1)}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}293$$

Somit ergibt sich wegen $1 = 2x + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ für den Radius *x* der außen liegenden Kreise:

$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}146$, d. h., dieser Radius ist halb so groß wie der der innen liegenden Kreise.

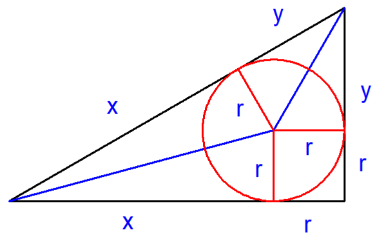


Der Durchmesser 2*r* der außerhalb des gleichseitigen Dreiecks liegenden Kreise ist halb so groß wie der Radius des Ausgangskreises, d. h. der Radius *r* dieser Kreise beträgt *r* = ¼.

Aus dem Radius 1 des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge *s* ergibt sich $\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 1$, also $s = \sqrt{3}$. Für den Radius *x* eines Inkreises eines rechtwinkligen Dreiecks gilt $x = \frac{1}{2} \cdot (a+b-c)$, hier ist $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und *c* = 1. Somit gilt: $x = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3}-1) \approx 0{,}183$.

Hinweis zur Inkreis-Formel: Für den Flächeninhalt A eines rechtwinkligen Dreiecks mit Inkreis-Radius r gilt

$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot r + r^2 = x \cdot r + y \cdot r + r^2$.



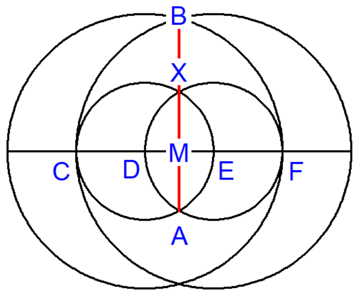
Dies ist einerseits gleich

$A = (x \cdot r + r^2) + (y \cdot r + r^2) - r^2 = (x + r) \cdot r + (y + r) \cdot r - r^2$
$= a \cdot r + b \cdot r - r^2$

andererseits gleich $A = (x + y) \cdot r + r^2 = c \cdot r + r^2$, also gilt:

$a \cdot r + b \cdot r - r^2 = c \cdot r + r^2$, also $a + b - r = c + r \Leftrightarrow a + b - c = 2r$, d. h. $r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$

zu A 15.20:



Die Mittelpunkte der kleinen Kreise sind D und E. Der Radius r dieser Kreise ist genauso groß wie die Streckenlängen von CD, DE, EF, DX, XE, AD, AE. Das Dreieck DEX ist demnach ein gleichseitiges Dreieck und es gilt: $|XM| = |AM| = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{3}$, also $|AX| = r \cdot \sqrt{3}$.

Die Mittelpunkte der großen Kreise sind ebenfalls D und E. Der Radius R dieser Kreise ist genauso groß wie die Streckenlängen von CE, DF, EB, DB, nämlich $R = 2 \cdot r$. Im rechtwinkligen Dreieck MEB gilt:
$|ME|^2 + |MB|^2 = |EB|^2$, also $(\frac{1}{2} r)^2 + |MB|^2 = (2r)^2$. Hieraus ergibt sich $|MB|^2 = \frac{15}{4} r^2$, also $|MB| = \frac{\sqrt{15}}{2} r$.

Hieraus ergibt sich das folgende Teilungsverhältnis:

$$\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{2 \cdot |MX|}{|MB| - |MX|} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2} \cdot r - \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \Phi \text{ und auch}$$

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{2 \cdot |MX|}{|MB| + |AM|} = \frac{r \cdot \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2} \cdot r + \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{1}{\Phi} .$$