Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 12.1:

Dass die beiden Würfel nicht unterscheidbar sind, ändert nichts an der Tatsache, dass es sich um zwei verschiedene Würfel handelt, es daher einen Unterschied macht, ob beispielsweise das Ergebnis (2|3) oder das Ergebnis (3|2) auftritt.

zu A 12.2:

(1) 3 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 4 und für Augensumme 10; 4 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 5 und für Augensumme 9; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8; 6 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 7.

1. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 5, 6 oder 7 fällt*.

2. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 5, 8 oder 7 fällt*.

3. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 9, 6 oder 7 fällt*.

4. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 9, 8 oder 7 fällt.*

5. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 5, 6 oder 7 fällt*.

6. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 5, 8 oder 7 fällt*.

7. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 9, 6 oder 7 fällt*.

8. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 9, 8 oder 7 fällt*.

(2) Insgesamt gibt es 44 verschiedene faire Spielregeln

denn man kann die Summe 18 wie folgt aus 5 Summanden bilden:

18 = 1+1+5+5+6 (1 Spielregel)

> nämlich: 1 mögliche Kombination gibt es für Augensumme 2 und für Augensumme 12; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8; 6 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 7. Daher lautet die faire Spielregel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 2, 12, 6, 8 oder 7 fällt*.

18 = 1+2+4+5+6 (16 verschiedene Spielregeln)

18 = 1+3+3+5+6 (8 verschiedene Spielregeln)

18 = 1+3+4+4+6 (4 verschiedene Spielregeln)

18 = 1+3+4+5+5 (8 verschiedene Spielregeln)

18 = 2+2+3+5+6 (4 verschiedene Spielregeln)

18 = 2+2+4+4+6 (1 Spielregel)

18 = 2+2+4+5+5 (2 verschiedene Spielregeln)

> nämlich: 2 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 3 und für Augensumme 11; 4 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 5 und für Augensumme 9; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8. Daher lauten die beiden fairen Spielregeln:
> *Man gewinnt, wenn Augensumme 3, 11, 5, 6 oder 8 fällt*. bzw.
> *Man gewinnt, wenn Augensumme 3, 11, 9, 6 oder 8 fällt*. bzw.

18 = 2+3+3+5+5 (2 verschiedene Spielregeln)

18 = 2+3+4+4+5 (8 verschiedene Spielregeln)

(3) Um faire Spielregeln für drei oder vier Mitspieler zu bestimmen, muss man überlegen auf welche Weise die Kombinationsanzahlen 12 bzw. 9 erhalten werden können. Hier einige Beispiele

… für faire Spielregeln für drei Personen:

A gewinnt mit den Augensummen	B gewinnt mit den Augensummen	C gewinnt mit den Augensummen
4, 5 oder 6 (3+4+5 = 12 Kombinationen)	8, 9 oder 10 (5+4+3 = 12 Kombinationen)	2, 3, 7, 11 oder 12 (1+2+6+2+1 = 12 Kombinationen)
2, 3, 4 oder 7 (1+2+3+6 = 12 Kombinationen)	5, 6 oder 10 (4+5+3 = 12 Kombinationen)	8, 9, 11 oder 12 (5+4+2+1 = 12 Kombinationen)
2, 4, 5 oder 9 (1+3+4+4 = 12 Kombinationen)	3, 6 oder 8 (2+5+5 = 12 Kombinationen)	7, 10, 11 oder 12 (6+3+2+1 = 12 Kombinationen)

… für faire Spielregeln für vier Personen:

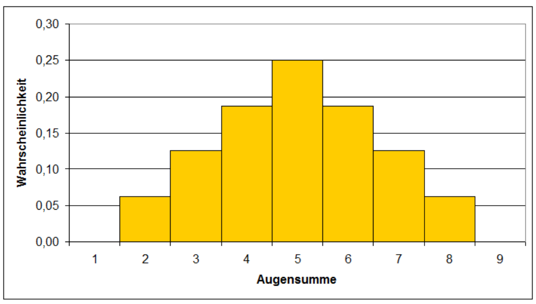
A gewinnt mit den Augensummen	B gewinnt mit den Augensummen	C gewinnt mit den Augensummen	D gewinnt mit den Augensummen
4 oder 7 (3+6 = 9 Kombinationen)	5 oder 6 (4+5 = 9 Kombinationen)	8 oder 9 (5+4 = 9 Kombinationen)	2, 3, 10, 11 oder 12 (1+2+3+2+1 = 9 Kombinationen)
3, 4 oder 5 (2+3+4 = 9 Kombinationen)	7, 11 oder 12 (6+2+1 = 9 Kombinationen)	6 oder 9 (5+4 = 9 Kombinationen)	2, 8 oder 10 (1+5+3 = 9 Kombinationen)

zu A 12.3:

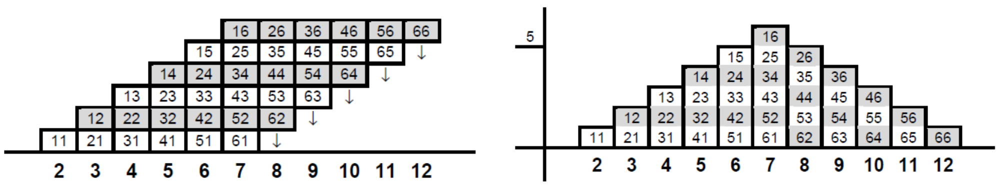
Kombinationstabelle für den 2-fachen Tetraederwurf

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung des 2-fachen Tetraederwurfs



weitere Möglichkeit:



(2) Erzeugende Funktion für den 1-fachen Tetraederwurf: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4\right)$

Zerlegung des Polynoms in Faktoren: f(x) = ¼ · x · (1 + x) · (1 + x²)

Hieraus ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Faktoren zu kombinieren:

$f(x) = ½ \cdot (x^1 + x^2) \cdot ½ \cdot (x^0 + x^2)$ und $f(x) = ½ \cdot (x^0 + x^1) \cdot ½ \cdot (x^1 + x^3)$

Hierzu gehören 2er-Glücksräder mit den Augenzahlen (1, 2) und (0, 2) bzw. (0, 1) und (1, 3),

wie man den folgenden Kombinationstabellen entnehmen kann:

	0	2
1	1	3
2	2	4

	1	3
0	1	3
1	2	4

(3)

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

erzeugende Funktion für die Augensumme:

$$f^2(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4\right] \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4\right]$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8\right)$$

	1	3	3	5
1	2	4	4	6
2	3	5	5	7
2	3	5	5	7
3	4	6	6	8

alternative Beschriftung für zwei 4er-Glücksräder (1, 2, 2, 3) und (1, 3, 3, 5)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[1x^1 + 2x^2 + 1x^3\right] \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[1x^1 + 2x^3 + 1x^5\right]$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8\right)$$

	1	2	3	3	4	4	5	6
1	2	3	4	4	5	5	6	7
2	3	4	5	5	6	6	7	8

8er-Glücksrad mit 2er-Glücksrad mit Beschriftung (1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6) und (1, 2)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{8} \cdot \left[1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1x^1 + 1x^2\right]$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8\right)$$

	1	2	2	3	3	4	4	5
1	2	3	3	4	4	5	5	6
3	4	5	5	6	6	7	7	8

8er-Glücksrad mit 2er-Glücksrad mit Beschriftung (1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5) und (1, 3)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{8} \cdot \left[1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 1x^5\right] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1x^1 + 1x^3\right]$$
$$= \frac{1}{16} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8\right)$$

(4) f'(x) = ¼ · (1 + 2x + 3x² + 4x³); f''(x) = ¼ · (2 + 6x + 12x²), also

f'(1) = ¼ · (1 + 2 + 3 + 4) = 2,5 = μ

f''(1) = ¼ · (2 + 6 + 12) = 5, also σ^2 = 2,5 + 5 – 2,5² = 1,25

zu A 12.4:

Die erzeugende Funktion der Augensumme ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6\right)$$
$$= \frac{1}{24} \cdot \left(1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 1x^{10}\right)$$

Aus den verschiedenen Zerlegungen der erzeugenden Funktionen ergeben sich die alternativen Zufallsgeräte, wobei ein 2er-Glücksrad durch eine Münze ersetzt werden kann, ein 8er-Glücksrad durch ein regelmäßiges Oktaeder und ein 12er-Glücksrad durch ein regelmäßiges Dodekaeder:

$$\tfrac{1}{4}\cdot\left(1x^1+1x^2+1x^3+1x^4\right)\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(1x^1+1x^2+1x^3+1x^4+1x^5+1x^6\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\left[1x+1x^2\right]\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\left[1x^1+1x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+1x^7+1x^8\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\left[1x+1x^3\right]\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\left[1x^1+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+1x^7\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\left[1x^1+1x^4\right]\cdot\tfrac{1}{12}\cdot\left[1x^1+2x^2+3x^3+3x^4+2x^5+1x^6\right]$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\left[1x^1+1x^2+1x^3+2x^4+1x^5+1x^6+1x^7\right]\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\left[1x+1x^2+1x^3\right]$$
$$=\tfrac{1}{8}\cdot\left[1x^1+2x^2+2x^3+2x^4+1x^5\right]\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\left[1x^1+1x^3+1x^5\right]$$
$$=\tfrac{1}{4}\cdot\left[1x+2x^2+1x^3\right]\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left[1x^1+2x^3+2x^5+1x^7\right]$$
$$=\tfrac{1}{4}\cdot\left[1x^1+1x^2+1x^4+1x^5\right]\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left[1x^1+1x^2+2x^3+1x^4+1x^5\right]$$
$$=\tfrac{1}{4}\cdot\left[1x^1+1x^3+1x^4+1x^6\right]\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left[1x^1+2x^2+2x^3+1x^4\right]$$

Zufallsgerät 1	Beschriftung	Zufallsgerät 2	Beschriftung
Münze	(1, 2)	Dodekaeder	(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8)
Münze	(1, 3)	Dodekaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7)
Münze	(1, 4)	Dodekaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6)
3er-Glücksrad	(1, 2, 3)	Oktaeder	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)
3er-Glücksrad	(1, 3, 5)	Oktaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)
Tetraeder	(1, 2, 2, 3)	Hexaeder	(1, 3, 3, 5, 5, 7)
Tetraeder	(1, 2, 4, 5)	Hexaeder	(1, 2, 3, 3, 4, 5)
Tetraeder	(1, 3, 4, 6)	Hexaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4)

zu A 12.5:

- 10-faches Würfeln mit einem regelmäßigen Hexaeder:

$\mu = 10 \cdot 3{,}5 = 35$; $\sigma^2 = 10 \cdot 35/12 \approx 29{,}17$; $\sigma \approx 5{,}40$

– in ca. zwei Drittel der Fälle im Intervall zwischen 30 und 40 (exakt: 69,1 %),

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % im Intervall zwischen 26 und 44 (exakt: 92,1 %),

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall zwischen 25 und 45 (exakt: 94,8 %)

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99 % im Intervall zwischen 21 und 49 (exakt: 99,3 %).

- 10-faches Würfeln mit einem regelmäßigen Oktaeder:

$\mu = 10 \cdot 4{,}5 = 45$; $\sigma^2 = 10 \cdot 63/12 = 52{,}5$; $\sigma \approx 7{,}25$

– in ca. zwei Drittel der Fälle im Intervall zwischen 38 und 51 (exakt: 66,5 %),

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % im Intervall zwischen 33 und 57 (exakt: 91,5 %),

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall zwischen 31 und 59 (exakt: 95,4 %),

– mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99 % im Intervall zwischen 26 und 64 (exakt: 99,3 %).