Kap. 11 Geometrische Figuren auf kariertem Papier und auf einem Quadratgitter

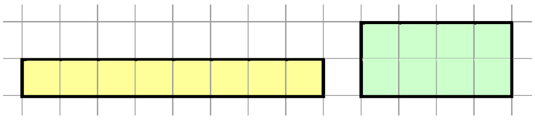
Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 11.1:

Zum Flächeninhalt $A = 8$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 8 + 1 + 8 + 1 = 2 \cdot (8 + 1) = 18$ (LE) und

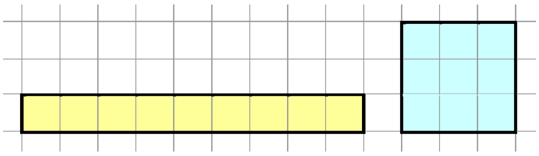
ein Rechteck mit $u = 4 + 2 + 4 + 2 = 2 \cdot (4 + 2) = 12$ (LE).



Zum Flächeninhalt $A = 9$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 9 + 1 + 9 + 1 = 2 \cdot (9 + 1) = 20$ (LE) und

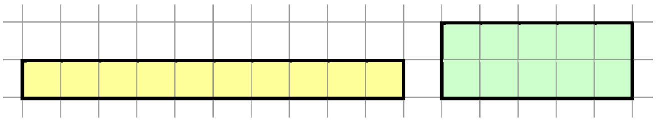
ein Rechteck mit $u = 3 + 3 + 3 + 3 = 2 \cdot (3 + 3) = 12$ (LE).



Zum Flächeninhalt $A = 10$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 10 + 1 + 10 + 1 = 2 \cdot (10 + 1) = 22$ (LE) und

ein Rechteck mit $u = 5 + 2 + 5 + 2 = 2 \cdot (5 + 2) = 14$ (LE).



zu A 11.2:

6 hat die Teiler-Paare (1 ; 6) und (2 ; 3) mit den Umfängen 14 LE und 10 LE,

8 hat die Teiler-Paare (1 ; 8) und (2 ; 4) mit den Umfängen 18 LE und 12 LE,

9 hat die Teiler-Paare (1 ; 9) und (3 ; 3) mit den Umfängen 20 Le und 12 LE,

10 hat die Teiler-Paare (1 ; 10) und (2 ; 5) mit den Umfängen 22 LE und 14 LE.

zu A 11.3:

Da es hier um die *zusätzlichen* Teilerpaare geht, müssen die Einschränkungen notiert werden, da die anderen Fälle bereits erfasst sind.

zu A 11.4:

In der Grafik sind die jeweils möglichen Rechtecke repräsentiert, die zu einem bestimmten Umfang gehören; jeweils durch ein Quadratsymbol hervorgehoben sind die Rechtecke mit maximalem Flächeninhalt, die zu den durch 4 teilbaren Rechteckumfängen gehören, also zu einem Quadrat gehören.

zu A 11.5:

Die $a \cdot b$ Kästchen können bei einem $a{\times}b$-Rechteck durch Wegnehmen von höchstens $(a-1){\cdot}(b-1)$ Eckquadrat-Kästchen vermindert werden. Dies kann man sich am besten an der L-förmigen Figur verdeutlichen, die nur aus der ersten Spalte und der untersten Zeile des Ausgangsrechtecks besteht, oder an der Kreuzform, bei der die Figur aus $a + b - 1$ Kästchen besteht ($= a \cdot b - (a-1) \cdot (b-1) = a + b - 1$).

zu A 11.6:

An den folgenden Beispielen kann man ablesen:

Ist die Breite a eine ungerade Zahl, dann kann man maximal ½ · $(a-1)$ senkrechte „Einschnitte“ vornehmen (im Bild jeweils von oben nach unten eingezeichnet), die jeweils die Höhe $b-1$ haben (mit Zuwachs des Umfangs um 2 LE pro Kästchen), d. h., der Umfang wächst

– bei **ungeradem** a um insgesamt um $(a-1) \cdot (b-1) = a \cdot b - a - b + 1$ LE.

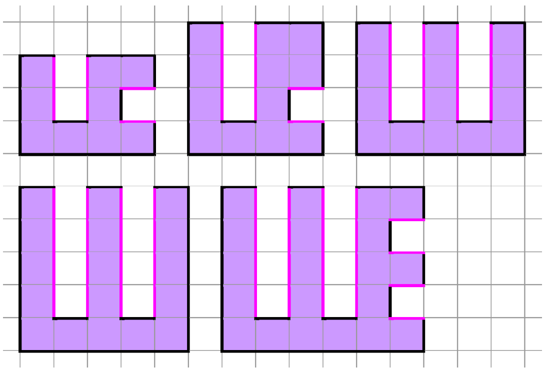
Ist die Breite a eine **gerade** Zahl, dann kann man maximal ½ · $a - 1$ senkrechte „Einschnitte“ vornehmen (im Bild jeweils von oben nach unten eingezeichnet), die jeweils die Höhe $b-1$ haben (mit Zuwachs des Umfangs um 2 LE pro Kästchen), also zusammen $(a-2) \cdot (b-1)$,

zusätzlich (in den Abbildungen rechts eingezeichnet) einzelne „Einschnitte“ von je *einem* Kästchen, und zwar bei geradem b um ½ · $b - 1$ Kästchen mit dem Zuwachs $b - 2$ LE, bei ungeradem b um ½ · $(b-1)$ Kästchen mit dem Zuwachs $b - 1$ LE, d. h., der Umfang wächst

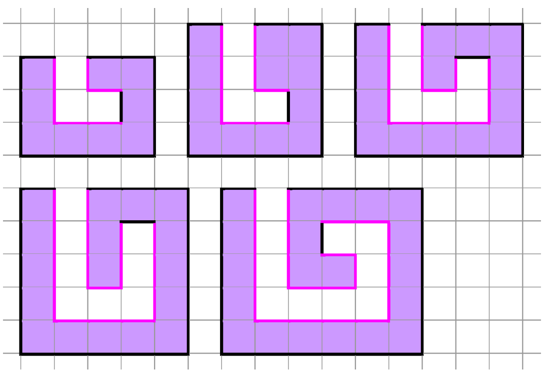
– bei **geradem** b insgesamt um $(a-2) \cdot (b-1) + (b-2) = a \cdot b - a - b = (a-1) \cdot (b-1) - 1$ LE,

– bei **ungeradem** b um insgesamt um $(a-2) \cdot (b-1) + (b-1) = (a-1) \cdot (b-1) = a \cdot b - a - b + 1$ LE.

Allgemein kann also der Umfang *maximal* um $(a-1) \cdot (b-1)$ LE wachsen, im Falle, dass *a und b* gerade sind um 1 LE weniger.



Alternativ zu den „Einschnitten“ kann man auch überlegen, welche „spiralartigen“ Einschnitte möglich sind.

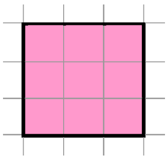


zu A 11.7:

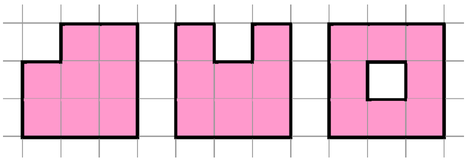
Innere Quadrate können nur eingezeichnet werden, wenn Breite a und Höhe b jeweils mindestens 3 LE betragen. Das dann jeweils maximal mögliche innere Quadrat hat den Flächeninhalt $(a-2) \cdot (b-2)$ FE und den Umfang $2 \cdot (a + b - 4)$ LE.

zu A 11.8:

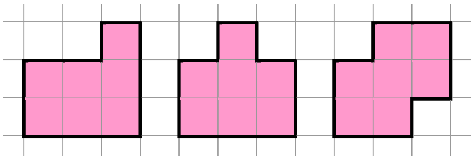
A = 9 FE, *u* = 12 LE



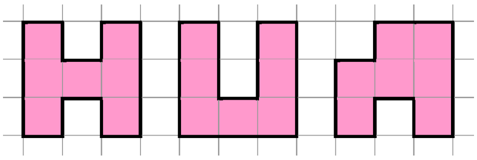
A = 8 FE und (von links nach rechts) *u* = 12 LE, *u* = 14 LE, *u* = 16 LE



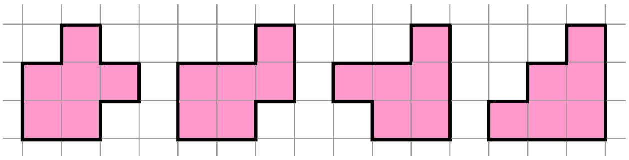
A = 7 FE und *u* = 12 LE



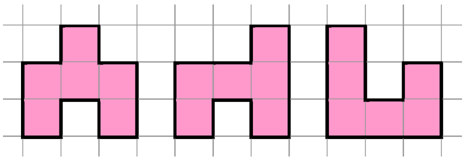
A = 7 FE und (von links nach rechts) *u* = 16 LE, *u* = 16 LE, *u* = 14 LE



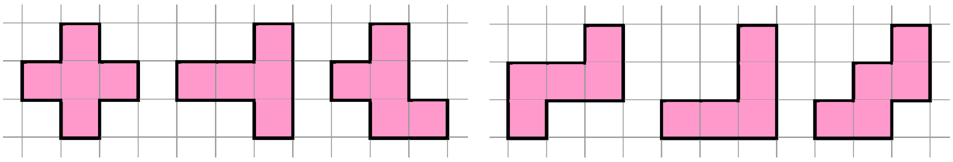
A = 6 FE und *u* = 12 LE



A = 6 FE und *u* = 14 LE

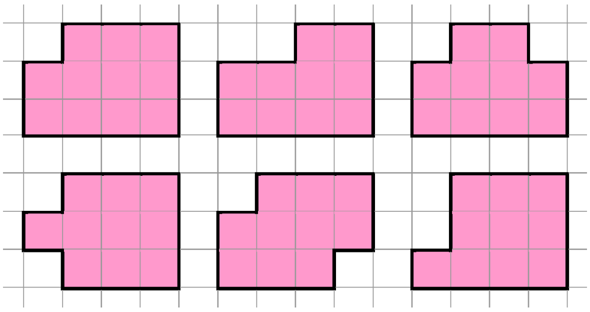


A = 5 FE und *u* = 12 LE

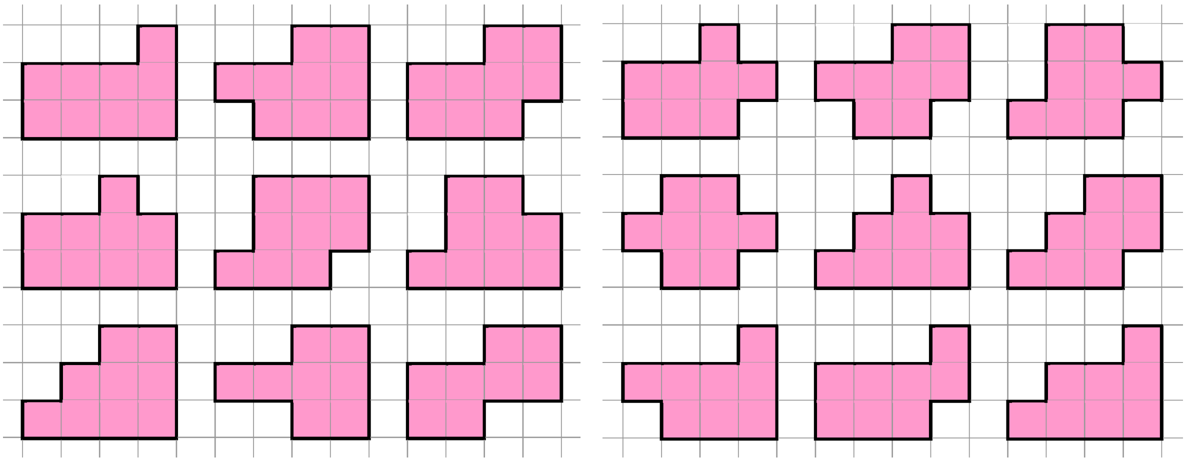


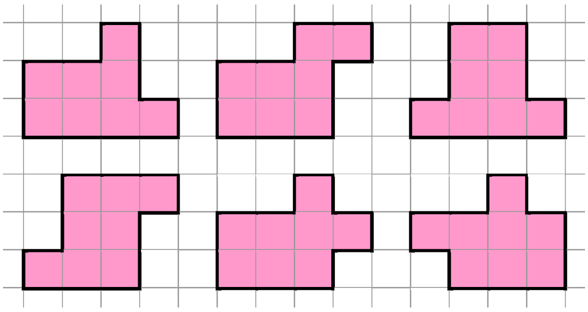
zu A 11.9:

Figuren mit Umfang *u* = 14 LE und Flächeninhalt *A* = 11 FE bzw. 10 FE

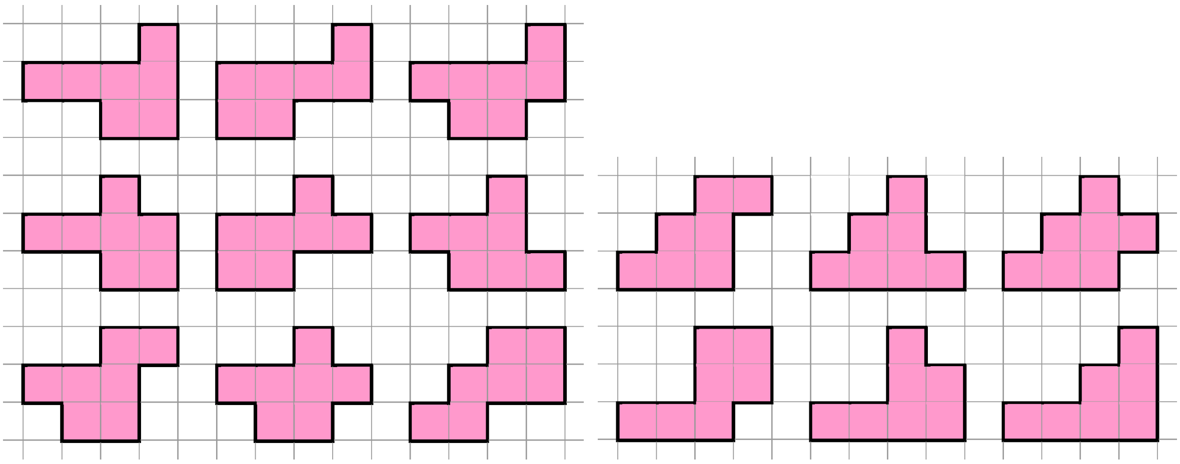


Figuren mit Umfang *u* = 14 LE und Flächeninhalt *A* = 9 FE bzw. 8 FE

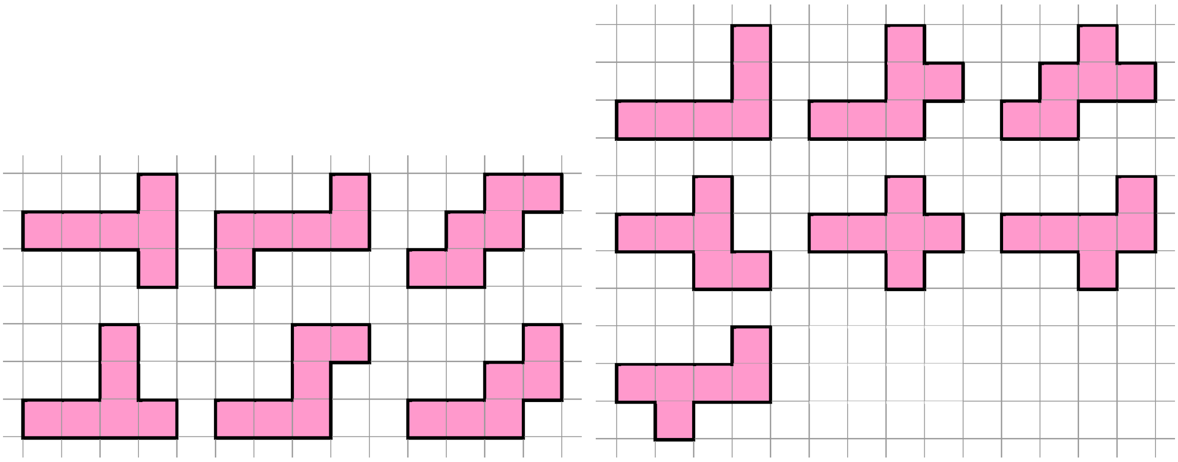




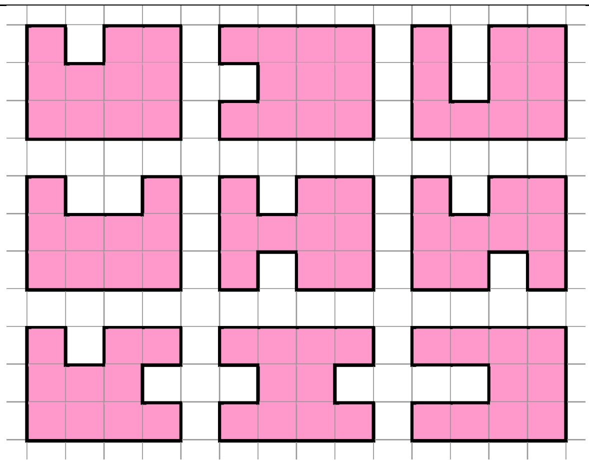
Figuren mit Umfang *u* = 14 LE und Flächeninhalt *A* = 7 FE



Figuren mit Umfang *u* = 14 LE und Flächeninhalt *A* = 6 FE

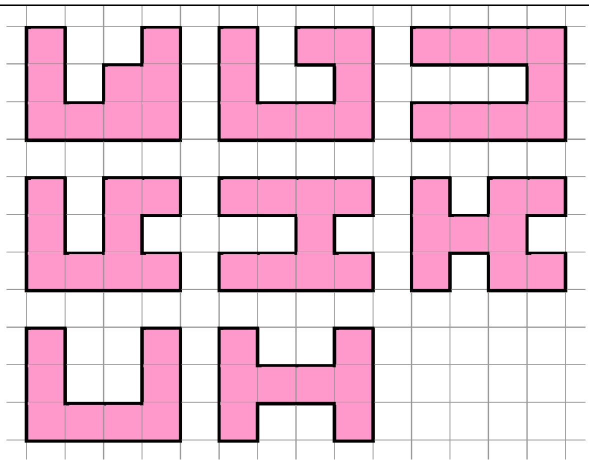


Figuren mit Flächeninhalt *A* = 11 FE bzw. *A* = 10 FE



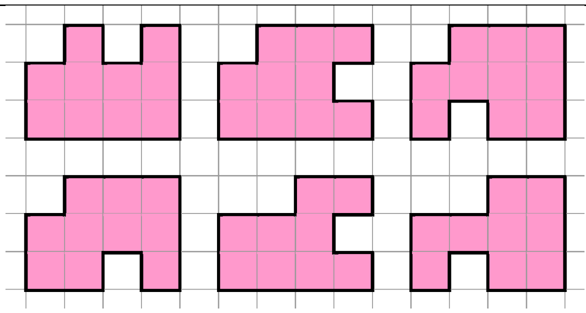
u = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 18 LE
u = 16 LE	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE
u = 18 LE	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE

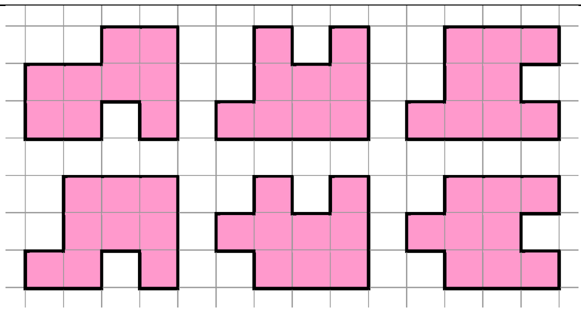
Figuren mit Flächeninhalt *A* = 9 FE bzw. *A* = 8 FE



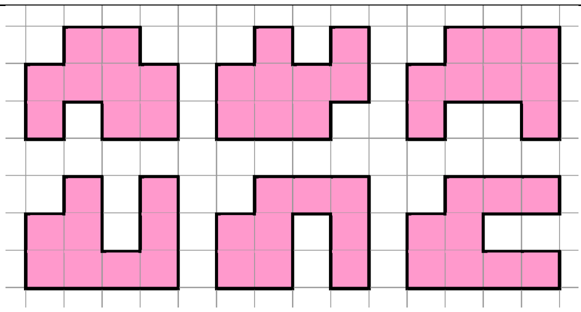
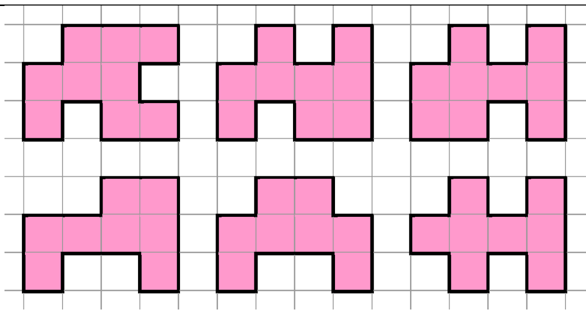
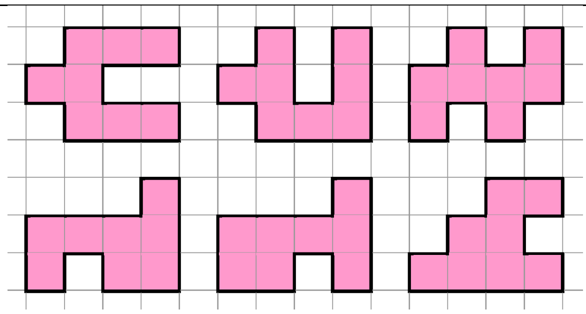
u = 18 LE	*u* = 20 LE	*u* = 20 LE
u = 20 LE	*u* = 20 LE	*u* = 20 LE
u = 18 LE	*u* = 18 LE	

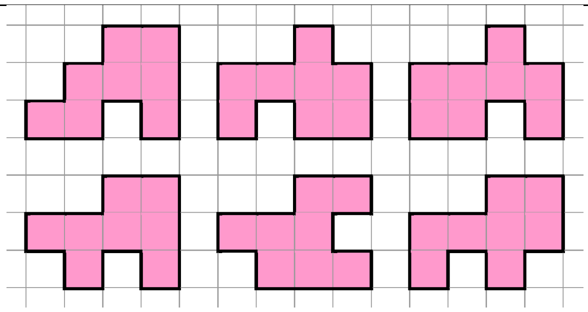
Figuren mit Flächeninhalt *A* = 10 FE bzw. *A* = 9 FE

	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE
	u = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE

	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE
	u = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE

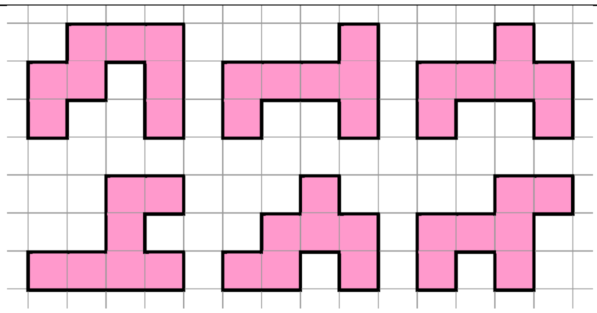
Figuren mit Flächeninhalt *A* = 9 FE bzw. *A* = 8 FE

	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE
	u = 18 LE	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE
	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE
	u = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 18 LE
	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE	*u* = 18 LE
	u = 16 LE	*u* = 16 LE	*u* = 16 LE



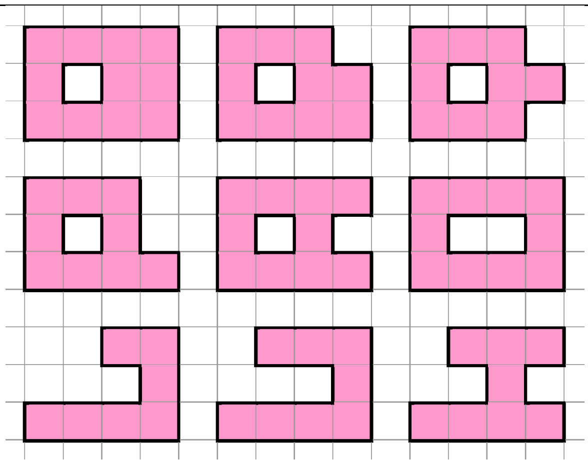
u = 16 LE	u = 16 LE	u = 16 LE
u = 16 LE	u = 16 LE	u = 16 LE

Figuren mit Umfang Flächeninhalt A = 8 FE bzw. A = 7 FE



u = 18 LE	u = 16 LE	u = 16 LE
u = 16 LE	u = 16 LE	u = 16 LE

Figuren mit Flächeninhalt A = 10 FE bzw. A = 9 FE



u = 18 LE	u = 18 LE	u = 18 LE
u = 18 LE	u = 20 LE	u = 20 LE
u = 16 LE	u = 18 LE	u = 18 LE

zu A 11.10:

Dargestellt sind Quadrate mit den Flächeninhalten

$A = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$; $A = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 4 = 5$; $A = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 6 = 10$;

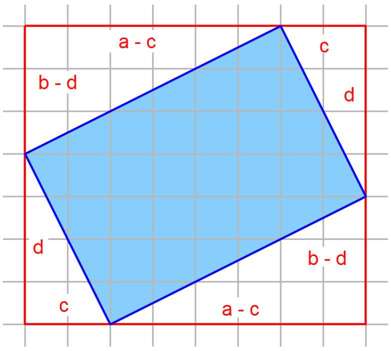
$A = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 12 = 13$; $A = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 8 = 17$

Man erhält sie, indem man von den Ausgangsquadraten mit der Seitenlänge a an den vier Ecken rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen b *und* $a - b$ gleichartig abschneidet. Für den Flächeninhalt ergibt sich dann: $A = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a - b) = a^2 - 2ab - 2b^2$, dabei gilt $0 < b \leq a - b < a$

a	*b*	*a – b*	*A*
2	1	1	2
3	1	2	5
4	1	3	10
4	2	2	8 = ½ · a
5	1	4	17
5	2	3	13 = ½ · (a + 1)
6	1	5	26
6	2	4	20
6	3	3	18 = ½ · a
7	1	6	37
7	2	5	29
7	3	4	25 = ½ · (a + 1)

a	*b*	*a – b*	*A*
8	1	7	50
8	2	6	40
8	3	5	34
8	4	4	32 = ½ · a
9	1	8	65
9	2	7	53
9	3	6	45
9	4	5	41 ½ · (a + 1)
10	1	9	82
10	2	8	68
10	3	7	58
10	4	6	52
10	5	5	50 = ½ · a

zu A 11.11:



Man erhält die inneren Rechtecke, indem man von den Ausgangsrechtecken mit den Seitenlängen *a* und *b* an je zwei einander gegenüberliegenden Ecken rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen *c* und *d* bzw. *a – c* und *b – d* gleichartig abschneidet. Für den Flächeninhalt ergibt sich dann:
$A = a \cdot b - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot d - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a-c) \cdot (b-d) = ad + bc - 2cd$, mit $0 < c \leq a - c < a$ und $0 < d \leq b - d < b$.

zu A 11.12:

Durch das Anhängen eines Quadrats erhöht sich die Anzahl der Randpunkte um 2 und es kommt kein innerer Punkt hinzu. Da die Anzahl der Randpunkte mit ½ multipliziert wird, stimmt die Berechnung des Flächeninhalts.

zu A 11.13:

Werden einzelne Quadrate am Rand ergänzt oder herausgenommen, dann verändert sich die Anzahl der Randpunkte jeweils um 2; wegen des Faktors ½ für die Anzahl der Randpunkte bedeutet dies, dass die Formel unverändert zutrifft.

Werden k nebeneinanderliegende Quadrate (k ≥ 2) am Rand ergänzt oder herausgenommen, dann verändert sich der Flächeninhalt um k FE.

Beim Herausnehmen nimmt die Anzahl der inneren Punkte um k + 1 ab, aber die Anzahl der Randpunkte nimmt um 2 zu:

$A_{neu} = (i - k - 1) + ½ \cdot (r + 2) - 1 = (i + ½ \cdot r - 1) - k = A_{alt} - k$

Beim Anhängen nimmt die Anzahl der inneren Punkte um k – 1 zu, und die Anzahl der Randpunkte nimmt um 2 zu:

$A_{neu} = (i + k - 1) + ½ \cdot (r + 2) - 1 = (i + ½ \cdot r - 1) + k = A_{alt} + k$

zu A 11.14:

Im ersten Beispiel kommt ein Randpunkt hinzu, die Anzahl der Randpunkte bleibt unverändert.
Der Flächeninhalt nimmt um ½ FE zu.

Im zweiten Beispiel kommen zwei Randpunkte hinzu, die Anzahl der Randpunkte bleibt unverändert.
Der Flächeninhalt nimmt um 1 FE zu.

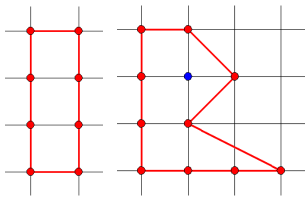
Im dritten Beispiel kommt oben kein Randpunkt hinzu, aber ein innerer Punkt; entsprechend nimmt auch der Flächeninhalt gemäß Formel um 1 FE zu. Die Erweiterung der Figur rechts entspricht dem zweiten Beispiel.

zu A 11.15:

Erstes Beispiel: Oben rechts wird eine Ecke abgeschnitten (– 1 Randpunkt). Rechts erfolgen zwei schräge Schnitte, durch die ein innerer Punkt zum Randpunkt wird und zwei Randpunkte entfallen.
In der Bilanz nimmt die Anzahl der inneren Punkte um 1 und die Anzahl der Randpunkte um 2 ab, d. h. gegenüber der Ausgangsfigur mit A = 2 + ½ · 12 – 1 = 7 FE hat die veränderte Figur einen Flächeninhalt von A = 1 + ½ · 10 – 1 = 5 FE.

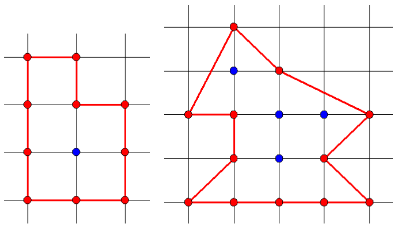
Zweites Beispiel: Durch die schrägen Schnitte entfallen oben links zwei Randpunkte, rechts oben drei Randpunkte; rechts unten entfällt ein Randpunkt, aber ein innerer Punkt wird zum Randpunkt. Links unten entfällt ein Randpunkt. Bilanz: 6 Randpunkte und ein innerer Punkt weniger: Aus A = 5 + ½ · 18 – 1 = 13 FE wird daher A = 4 + ½ · 12 – 1 = 9 FE.

zu A 11.16:



1 Randpunkt wird zum inneren Punkt, 3 Randpunkte kommen hinzu.

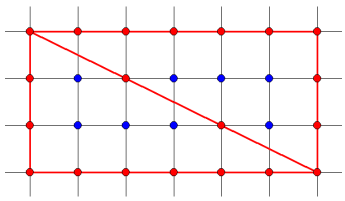
$A_{links} = 0 + ½ \cdot 8 - 1 = 3$ FE; $A_{rechts} = 1 + ½ \cdot 10 - 1 = 5$ FE



3 Randpunkte werden zu inneren Punkten, 5 Randpunkte kommen hinzu.

$A_{links} = 1 + ½ \cdot 10 - 1 = 5$ FE; $A_{rechts} = 4 + ½ \cdot 12 - 1 = 9$ FE

zu A 11.17:



Verdoppelt man ein rechtwinkliges Dreieck zu einem Rechteck, dann verdoppelt sich die Anzahl der inneren Punkte nicht nur, sondern es kommen k Randpunkte hinzu, die zwischen den Eckpunkten auf der Diagonalen liegen:

$i_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot i_{\text{Dreieck}} + k$

Für die Anzahl der Randpunkte des Rechtecks gilt:

$r_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot (r_{\text{Dreieck}} - 1 - k)$

Für ein Rechteck wurde die Richtigkeit der Formel (11.2) nachgewiesen. Es gilt also:

$A_{\text{Rechteck}} = i_{\text{Rechteck}} + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Rechteck}} - 1$

Hieraus folgt für das halb so große rechtwinklige Dreieck

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \tfrac{1}{2} \cdot A_{\text{Rechteck}} = \tfrac{1}{2} \cdot i_{\text{Rechteck}} + \tfrac{1}{4} \cdot r_{\text{Rechteck}} - \tfrac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \tfrac{1}{2} \cdot k + \tfrac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot k - \tfrac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \tfrac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - 1 \end{aligned}$$

zu A 11.18:

Figur 1: $r_1 = 8$, $i_1 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 4$ FE und $r_2 = 14$, $i_2 = 4$, $A_2 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 10$ FE

2 Randpunkte fallen zusammen, 1 gemeinsamer Randpunkt wird zum inneren Punkt.

$r = r_1 + r_2 - 4 = 18$, $i = i_1 + i_2 + 1 = 6$, $A = 6 + \frac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 14$ FE.

Figur 2: $r_1 = 6$, $i_1 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 3$ FE und $r_2 = 14$, $i_2 = 4$, $A_2 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 10$ FE

2 Randpunkte fallen zusammen, 2 gemeinsame Randpunkte werden innere Punkte.

$r = r_1 + r_2 - 6 = 14$, $i = i_1 + i_2 + 2 = 7$, $A = 7 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 13$ FE.

Figur 3: $r_1 = 6$, $i_1 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 3$ FE und $r_2 = 8$, $i_2 = 2$, $A_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 5$ FE

2 Randpunkte fallen zusammen, 2 gemeinsame Randpunkte werden innere Punkte.

$r = r_1 + r_2 - 6 = 8$, $i = i_1 + i_2 + 2 = 5$, $A = 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 8$ FE.

zu A 11.19:

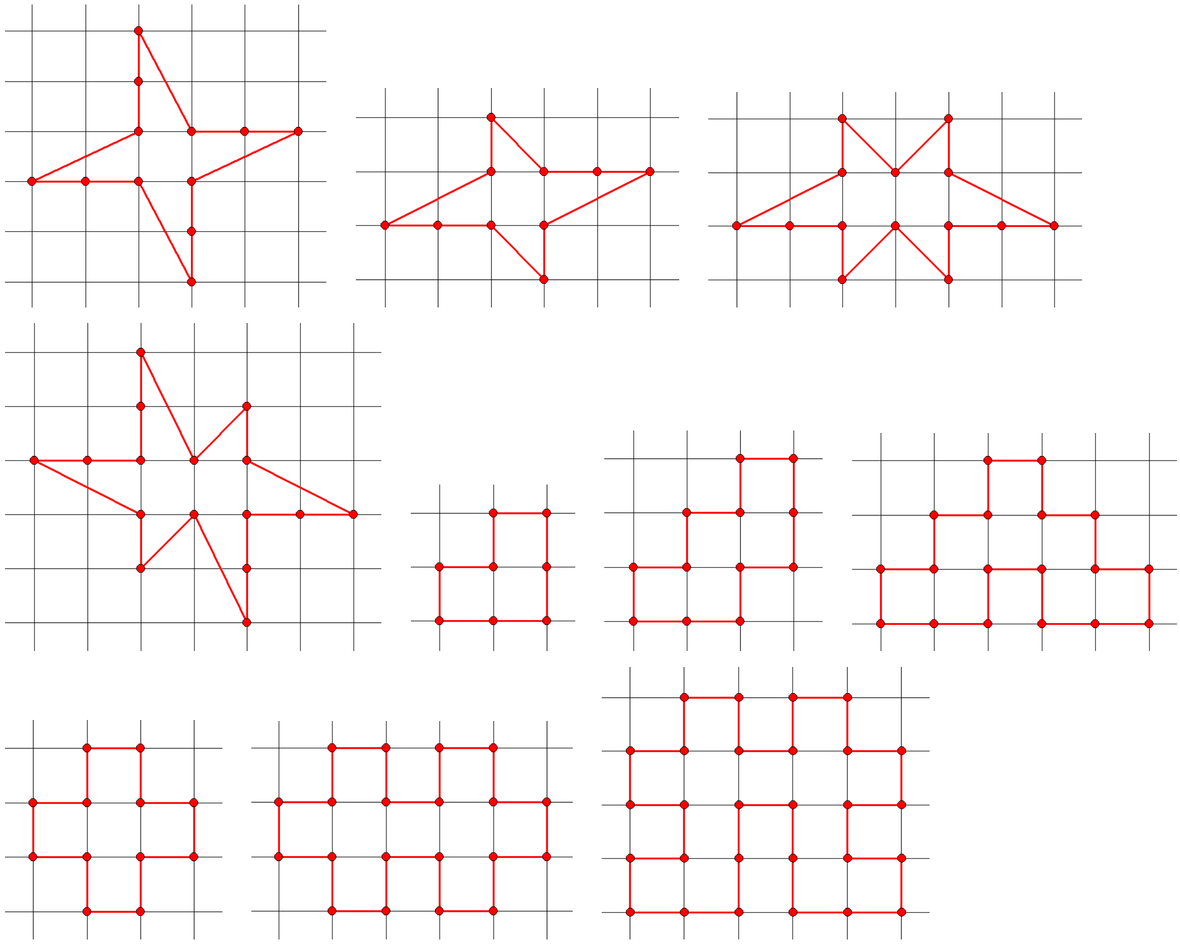
Figur 1: Der Flächeninhalt der Figur ist 15,5 FE – 2 FE = 13,5 FE. Dabei kann der Flächeninhalt der Figur innen mithilfe des Satzes von Pick berechnet werden: $r_2 = 4$, $i_2 = 1$, $A_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 2$ FE.
Die Figur außen hat $r_1 = 11$ Randpunkte und $i_1 = 6$ innere Punkte, sodass nach dem Satz von Pick gelten würde: $A_1 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = 10{,}5$ FE, allerdings sind dabei die 4 Randpunkte und der eine innere Punkt der inneren Figur nicht beachtet, die bzgl. der äußeren Figur alle innere Punkte wären. Man müsste sie also als innere Punkte zunächst mitberücksichtigen. Dann wäre der Satz von Pick anwendbar.

Figur 2: Die Flächeninhalte der beiden Teilfiguren können mitilfe des Satzes von Pick berechnet werden: links: $A_1 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 6$ FE, rechts: $A_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 3$ FE. Der Flächeninhalt der gesamten Figur ist 9 FE. Dies ergibt sich nur dann mithilfe des Satzes von Pick, wenn man den gemeinsamen Punkt der beiden Teilfiguren doppelt zählt.

Figur 3: Die Figur hat einen Flächeninhalt von 6,25 FE + 2,75 FE = 9 FE. Zählt man die Randpunkte (11) und die inneren Punkte (6), so würde dies nach dem Satz von Pick einen Flächeninhalt von $A = 6 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = 10{,}5$ FE ergeben. Der Satz von Pick ist also nicht anwendbar. (Wenn der Schnittpunkt der Randlinien ein Gitterpunkt wäre, könnte man sich wie in Figur 2 behalfen.)

zu A 11.20:

Man braucht nur die als Beispiele angegebenen Formen zu variieren …



zu A 11.21:

(1) Figur links: A = 10 FE; Figur rechts: A = 12 FE

(2) Figur links: r = 10, i = 1, $A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 2 + 10 - 2 = 10$;
Figur rechts: r = 8, i = 3, $A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 6 + 8 - 2 = 12$

(3) Die Formel für das Quadratgitter $A_Q = i + \frac{1}{2} \cdot r - 1$ und die Formel für das Dreieckgitter $A_D = 2 \cdot i + r - 2$ unterscheiden sich nur um den Faktor 2: $A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 2 \cdot (i + \frac{1}{2} r - 1) = 2 \cdot A_Q$.

Dies ist aber plausibel, denn wenn man statt eines Quadratgitters ein Rautengitter betrachtet, ändert sich *nichts* an der Flächeninhaltsformel, in der ja nur die Randpunkte und die inneren Punkte gezählt werden – die gleiche Figur hat dann auf dem Dreieckraster einen doppelt so großen Flächeninhalt wie auf dem Quadrat- oder Rautenraster.

zu A 11.22:

(1) $i_S = 1$, $i_D = 3$, $r_S = 12$, $r_D = 0$: $A_S = \frac{1}{3} \cdot (3 + 1) + \frac{1}{6} \cdot (0 + 12) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 3$

(2) $i_S = 1$, $i_D = 0$, $r_S = 8$, $r_D = 1$: $A_S = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1) + \frac{1}{6} \cdot (1 + 8) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{9}{6} - \frac{1}{3} = 1{,}5$

(3) Die Formel ergibt sich aus der bzgl. „i“ und „r“ ergänzten Formel für das Dreieckgitter und anschließender Division durch 6: $A_S = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot i + r - 2) = \frac{1}{3} \cdot (i_D + i_S) + \frac{1}{6} \cdot (r_D + r_S) - \frac{1}{3}$.