Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 4.1:

- 3 mögliche Kombinationen auch für den Flächeninhalt 14π:

$1\pi + 13\pi = 3\pi + 11\pi = 5\pi + 9\pi = 14\pi$

- 4 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt 16π und 18π:

$1\pi + 15\pi = 3\pi + 13\pi = 5\pi + 11\pi = 7\pi + 9\pi = 16\pi$

$1\pi + 17\pi = 3\pi + 15\pi = 5\pi + 13\pi = 7\pi + 11\pi = 18\pi$

- 5 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt 20π und 22π:

$1\pi + 19\pi = 3\pi + 17\pi = 5\pi + 15\pi = 7\pi + 13\pi = 9\pi + 11\pi = 20\pi$

$1\pi + 21\pi = 3\pi + 19\pi = 5\pi + 17\pi = 7\pi + 15\pi = 9\pi + 13\pi = 22\pi$

allgemein:

- n mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt $4n \cdot \pi$ und $(4n + 2) \cdot \pi$:

$1\pi + (4n - 1) \cdot \pi$, $3\pi + (4n - 3) \cdot \pi$, $5\pi + (4n - 5) \cdot \pi$, …, $(2n - 1) \cdot \pi + (2n + 1) \cdot \pi$

$1\pi + (4n + 1) \cdot \pi$, $3\pi + (4n - 1) \cdot \pi$, $5\pi + (4n - 3) \cdot \pi$, …, $(2n - 1) \cdot \pi + (2n + 3) \cdot \pi$

zu A 4.2:

Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Kombinationen von *drei* ungeraden Summanden bis zur maximalen Summe 39: links stehen die Summen aus zwei Summanden, oben die hinzukommenden dritten Summanden.

Demnach gibt es

1 Möglichkeit für die Summe 9π aus drei Kreisringen (nämlich $1\pi + 3\pi + 5\pi$),

1 Möglichkeit für die Summe 11π	2 Möglichkeiten für die Summe 13π
3 Möglichkeiten für die Summe 15π	4 Möglichkeiten für die Summe 17π
5 Möglichkeiten für die Summe 19π	7 Möglichkeiten für die Summe 21π
8 Möglichkeiten für die Summe 23π	10 Möglichkeiten für die Summe 25π
12 Möglichkeiten für die Summe 27π	14 Möglichkeiten für die Summe 29π
16 Möglichkeiten für die Summe 31π	19 Möglichkeiten für die Summe 33π
21 Möglichkeiten für die Summe 35π	24 Möglichkeiten für die Summe 37π
27 Möglichkeiten für die Summe 39π	

aus drei ungeraden Summanden.

Die website https://oeis.org/ kann dabei helfen, die nächsten Glieder der Folge zu finden.

	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
1 + 3	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
1 + 5	x	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	
1 + 7	x	x	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
1 + 9	x	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
1 + 11	x	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39				
1 + 13	x	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39					
1 + 15	x	x	x	x	x	x	33	35	37	39						
1 + 17	x	x	x	x	x	x	x	37	39							
3 + 5	x	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
3 + 7	x	x	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
3 + 9	x	x	x	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
3 + 11	x	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39					
3 + 13	x	x	x	x	x	31	33	35	37	39						
3 + 15	x	x	x	x	x	x	35	37	39							
3 + 17	x	x	x	x	x	x	x	39								
5 + 7	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
5 + 9	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39					
5 + 11	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39						
5 + 13	x	x	x	x	x	33	35	37	39							
5 + 15	x	x	x	x	x	x	37	39								
7 + 9	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39						
7 + 11	x	x	x	x	31	33	35	37	39							
7 + 13	x	x	x	x	x	35	37	39								
7 + 15	x	x	x	x	x	x	39									
9 + 11	x	x	x	x	33	35	37	39								
9 + 13	x	x	x	x	x	37	39									
11 + 13	x	x	x	x	x	39										

Eine andere Methode, die Anzahl der Kombinationen zu finden, könnte mithilfe einer Tabellenkalkulation wie folgt durchgeführt werden:

Zunächst stellt man die Folge der natürlichen Zahlen als Dualzahlen dar; von diesen interessieren diejenigen mit der Quersumme 3. Man betrachtet dann alle Vektoren, dessen Komponenten aus 3 Einsen und ansonsten aus Nullen bestehen. Dann bildet man das Skalarprodukt mit dem Vektor (1, 3, 5, 7, 9, …).

Die Ziffern der Dualzahlen notiert man in umgekehrter Reihenfolge.

Auf diese Weise erhält man im Prinzip alle Summen mit drei ungeraden Summanden.

Beispiele:

$7_{10} = {}_{2}111$: (1,1,1) * (1, 3, 5) = 9

$11_{10} = {}_{2}1011$: (1,1,0,1) * (1, 3, 5, 7) = 11

$13_{10} = {}_{2}1101$: (1,0,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 13

$14_{10} = {}_{2}1110$: (0,1,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 15

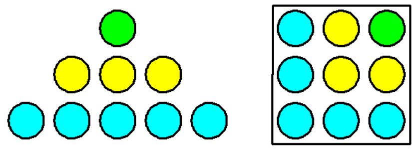
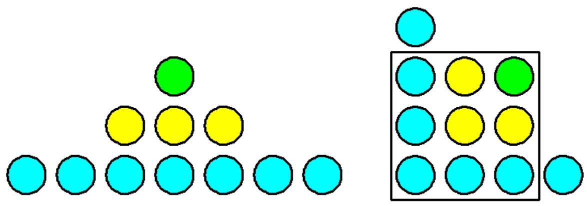
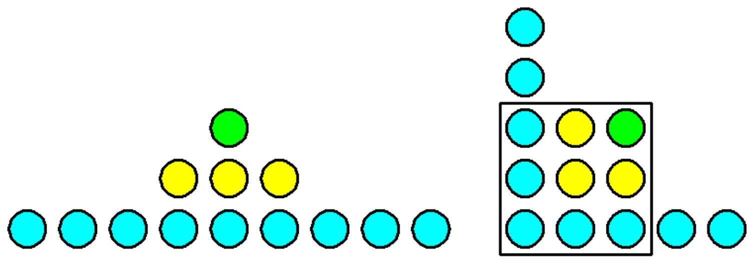
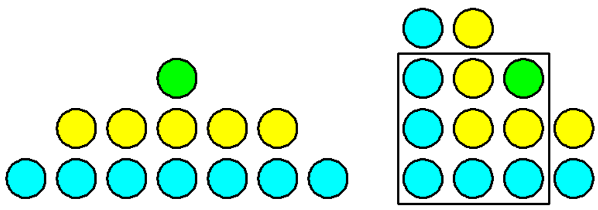
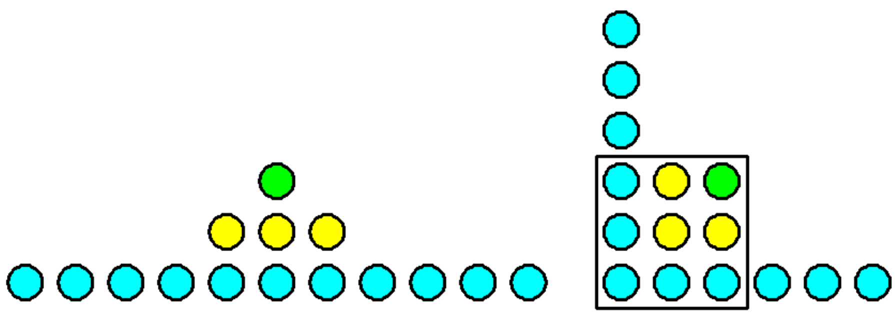
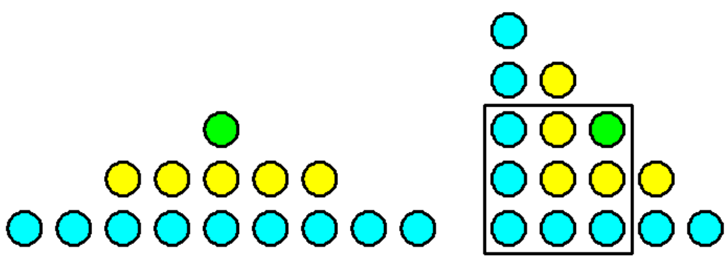
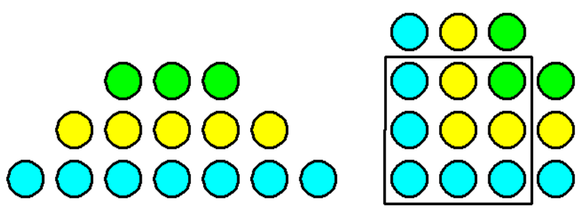
$19_{10} = {}_{2}10011$: (1,1,0,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 13

$21_{10} = {}_{2}10101$: (1,0,1,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 15

usw.

Anschließend zählt man, wie oft auf diese Weise die Summen 9, 11, 13, … zustandekommen.

Erheblich anschaulicher und einfacher umzusetzen ist allerdings die folgende graphische Methode:

1 + 3 + 5 = 9 Überstand rechts: 0 Steine (0 + 0 + 0)	
1 + 3 + 7 = 11 Überstand rechts: 1 Stein	
1 + 3 + 9 = 13 Überstand rechts: 2 Steine (0 + 0 + 2)	
1 + 5 + 7 = 13 Überstand rechts: 2 Steine (0 + 1 + 1)	
1 + 3 + 11 = 15 Überstand rechts: 3 Steine (0 + 0 + 3)	
1 + 5 + 9 = 15 Überstand rechts: 3 Steine (0 + 1 + 2)	
3 + 5 + 7 = 15 Überstand rechts: 3 Steine (1 + 1 + 1)	

Die ungerade Anzahl an Steinen wird nicht symmetrisch übereinander angeordnet (wie links dargestellt), sondern als Winkelhaken, wobei die Symmetrieachse in der Diagonale des Quadrats der Seitenlänge 3 liegt.

Die Gesamtzahl der Steine kann an den rechts überstehenden Steinen abgelesen werden:

Gesamtzahl = Steine im Quadrat + Überstand oben + Überstand rechts
= 9 + 2 · Überstand rechts

Wenn also z. B. 5 Steine rechts überstehen, bedeutet dies, dass die Summe 9 + 2 · 5 = 19 dargestellt ist.

Wenn man wissen will, auf wie viele Arten bestimmte Summen zustande kommen, muss man nur überlegen, auf wie viele Arten ein bestimmter Überstand möglich ist. Die drei Summanden sind der Größe nach aufsteigend geordnet, beginnend bei 0:

Summe	Überstand	Kombinationen
9	0	0 + 0 + 0
11	1	0 + 0 + 1
13	2	0 + 0 + 2, 0 + 1 + 1
15	3	0 + 0 + 3, 0 + 1 + 2, 1 + 1 + 1
17	4	0 + 0 + 4, 0 + 1 + 3, 0 + 2 + 2, 1 + 1 + 2
19	5	0 + 0 + 5, 0 + 1 + 4, 0 + 2 + 3, 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2
…	…	…

zu A 4.3:

Durch systematisches Probieren findet man:

1 Möglichkeit für die Summe 16π: 1π + 3π + 5π + 7π

1 Möglichkeit für die Summe 18π: 1π + 3π + 5π + 9π

2 Möglichkeiten für die Summe 20π: 1π + 3π + 5π + 11π, 1π + 3π + 7π + 9π

3 Möglichkeiten für die Summe 22π: 1π + 3π + 5π + 13π, 1π + 3π + 7π + 11π, 1π + 5π + 7π + 9π

5 Möglichkeiten für die Summe 24π:
1π + 3π + 5π + 15π, 1π + 3π + 7π + 13π, 1π + 3π + 9π + 11π, 1π + 5π + 7π + 11π, 3π + 5π + 7π + 9π,

6 Möglichkeiten für die Summe 26π:
1π + 3π + 5π + 17π, 1π + 3π + 7π + 15π, 1π + 3π + 9π + 13π, 1π + 5π + 7π + 13π, 1π + 5π + 9π + 11π, 3π + 5π + 7π + 11π

9 Möglichkeiten für die Summe 28π:
1π + 3π + 5π + 19π, 1π + 3π + 7π + 17π, 1π + 3π + 9π + 15π, 1π + 3π + 11π + 13π, 1π + 5π + 7π + 15π, 1π + 5π + 9π + 13π, 1π + 7π + 9π + 11π, 3π + 5π + 7π + 13π, 3π + 5π + 9π + 11π

11 Möglichkeiten für die Summe 30π:
1π + 3π + 5π + 21π, 1π + 3π + 7π + 19π, 1π + 3π + 9π + 17π, 1π + 3π + 11π + 15π, 1π + 5π + 7π + 17π, 1π + 5π + 9π + 15π, 1π + 5π + 11π + 13π, 1π + 7π + 9π + 13π, 3π + 5π + 7π + 15π, 3π + 5π + 9π + 13π, 3π + 7π + 9π + 11π

usw.

Man kann auch so ansetzen:

Aus den 4 Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π kann man auf *eine* Art eine Summe mit 4 Summanden bilden:
1π + 3π + 5π + 7π = 16π.

Aus den 5 Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π, 9π kann man auf $\binom{5}{4} = 5$ Arten eine Summe mit 4 Summanden bilden, also kommen noch 4 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu:
1π + 3π + 5π + 9π = 18π, 1π + 3π + 7π + 9π = 20π, 1π + 5π + 7π + 9π = 22π, 3π + 5π + 7π + 9π = 24π.

Aus den 6 Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π kann man auf $\binom{6}{4} = 15$ Arten eine Summe mit 4 Summanden bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen 11π als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für welche die Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π, 9π infrage kommen, das sind $\binom{5}{3} = 10$:

1π + 3π + 5π + 11π = 20π, 1π + 3π + 7π + 11π = 22π, 1π + 3π + 9π + 11π = 1π + 5π + 7π + 11π = 24π,
1π + 5π + 9π + 11π = 3π + 5π + 7π + 11π = 26π, 1π + 7π + 9π + 11π = 3π + 5π + 9π + 11π = 28π,
3π + 7π + 9π + 11π = 30π, 5π + 7π + 9π + 11π = 32π.

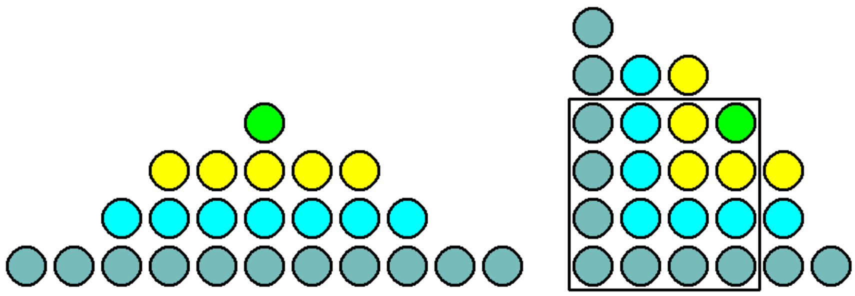
Aus den 7 Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π, 13π kann man auf $\binom{7}{4} = 35$ Arten eine Summe mit 4 Summanden bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen 11π als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für welche die Zahlen 1π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π infrage kommen, das sind $\binom{6}{3} = 20$:

1π + 3π + 5π + 13π = 22π, 1π + 3π + 7π + 13π = 24π, 1π + 3π + 9π + 13π = 1π + 5π + 7π + 13π = 26π,
1π + 3π + 11π + 13π = 1π + 5π + 9π + 13π = 3π + 5π + 7π + 13π = 28π,
1π + 5π + 11π + 13π = 1π + 7π + 9π + 13π = 3π + 5π + 9π + 13π = 30π,
1π + 7π + 11π + 13π = 3π + 5π + 11π + 13π = 3π + 7π + 9π + 13π = 32π,
1π + 9π + 11π + 13π = 3π + 7π + 11π + 13π = 5π + 7π + 9π + 13π = 34π,
3π + 9π + 11π + 13π = 5π + 7π + 11π + 13π = 36π, 5π + 9π + 11π + 13π = 38π, 7π + 9π + 11π + 13π = 40π.

usw.

Eine andere Möglichkeit ist, die Anzahl der Möglichkeiten mithilfe von Dualzahlen mit Quersumme 4 zu bestimmen (vgl. A 4.2).

Oder man wählt die oben beschriebene graphische Methode, bei der man den Überstand zu einem Quadrat mit 16 Steinen untersuchen muss … (wie in der Abbildung, dargestellt ist 1 + 5 + 7 + 11).



zu A 4.4:

Wenn beide Flächen gleich groß sind, dann ist die innen liegende Kreisfläche halb so groß wie die gesamte Kreisfläche. Für die Radien der beiden Kreislinien gilt dann, dass $r_{außen} = \sqrt{2} \cdot r_{innen}$, denn für die Flächen gilt: grün + hellblau = $\pi \cdot r_{außen}^2 = 2 \cdot (\pi \cdot r_{innen}^2) = 2 \cdot$ hellblau. Da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, also nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen dargestellt werden kann, gibt es keine geeigneten Kreisringe mit der Breite 1 LE.

Entsprechendes gilt für die zweite Figur, bei der die Gleichung $r_{außen} = \sqrt{3} \cdot r_{innen}$ erfüllt sein müsste. Außerdem müsste gelten: $r_{Mitte} = \sqrt{2} \cdot r_{innen}$

Bei der dritten Figur gilt zwar, dass der Radius des äußeren Kreises doppelt so groß ist wie der des blau gefärbten Kreises innen (die rot gefärbte Kreisfläche ist halb so groß wie die gesamte Kreisfläche), aber es müsste außerdem gelten: $r_{\text{zweiter Kreis von innen}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$ und außerdem $r_{\text{dritter Kreis von innen}} = \sqrt{3} \cdot r_{\text{innen}}$

zu A 4.5:

In den abgebildeten Figuren sind die inneren 5 Kreisringe hellblau gefärbt; sie haben zusammen einen Flächeninhalt von $5^2 = 25$ FE. Insgesamt umfasst die Figur 7 Kreisringe mit dem Flächeninhalt $7^2 = 49$ FE, d. h., die grünen Kreisringe haben einen Flächeninhalt von $7^2 - 5^2 = 24$ FE.

Es gilt also $\frac{7^2}{5^2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \approx 2$. Der Bruch $\frac{7}{5}$ ist also ein Näherungswert für $\sqrt{2}$. Aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ (vgl. Kap. 3) ergibt sich, dass man aus dem Bruch $\frac{a}{b}$ jeweils bessere Näherungen mithilfe von $\frac{a+2b}{a+b}$ erhält, also aus $\frac{7}{5}$ entsprechend $\frac{17}{12}$ und weiter $\frac{41}{29}$.

zu A 4.6:

Aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$ ergeben sich als erste Näherungsbrüche: $\frac{5}{3}, \frac{19}{11}, \frac{71}{41}$, d. h., die Kreisflächen stehen im Verhältnis: 25π zu 9π, 361π zu 121π, 5041π zu 1681π .

zu A 4.7:

Dadurch, dass der Mittelpunkt der Kreise jeweils verschoben ist, nimmt die Möglichkeit ab, die Radien miteinander zu vergleichen.

zu A 4.8:

(1) Abgebildet sind Kreisringe mit r = 1 und r = 2, also $A_{gelb} = 1\pi$ und $A_{grün} = A_{hellblau} = A_{blau} = (3\pi)/3 = 1\pi$

Es könnte auch sein, dass Vielfache der Radien für die Abbildung verwendet wurden,
hier also z. B. r = 2 und r = 4: $A_{gelb} = (1 + 3) \cdot \pi = 4\pi$ und $A_{grün} = A_{hellblau} = A_{blau} = (5\pi + 7\pi)/3 = (12\pi)/3 = 4\pi$

Entsprechendes gilt auch für die folgenden Abbildungen.

(2) $A_{pink} = 1\pi$; $A_{blauviolett} = (5\pi)/5 = 1\pi$

(3) $A_{rot} = 1\pi$; $A_{rosa} = (7\pi)/7 = 1\ \pi$

(4) $A_{gelb} = 1\pi + 3\pi = 4\pi$; $A_{hellblau} = (7\pi + 9\pi)/4 = 4\pi$

(5) $A_{rosa} = 1\pi$; $A_{blau/gold} = (3\pi + 5\pi)/8 = 1\pi$

(6) $A_{blau} = 3\pi + 5\pi = 8\pi$; $A_{blaugrau} = (7\pi + 9\pi + 11\pi + 13\pi)/5 = 8\pi$

(7) $A_{orange} = 3\pi$; $A_{braun} = (7\pi + 9\pi + 11\pi)/9 = 3\pi$

(8) $A_{oliv} = 5\pi + 7\pi = 12\pi$; $A_{grün} = (9\pi + 11\pi + 13\pi + 15\pi)/4 = 12\pi$

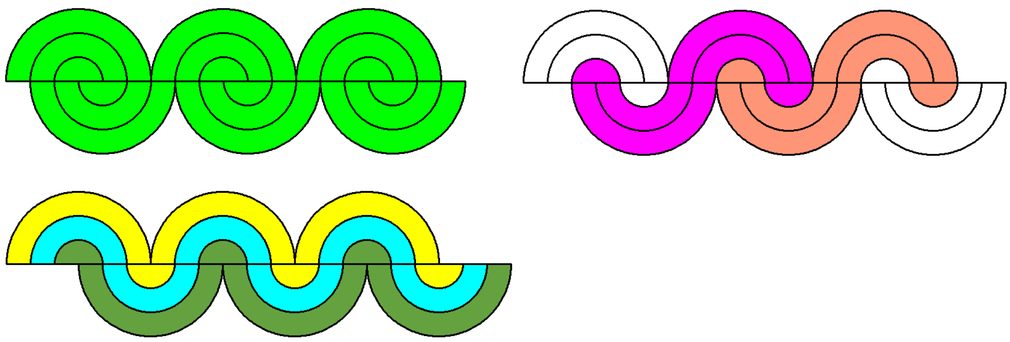
zu A 4.9:

- Figur 1: Die gesamte Fläche von 49π ist orange gefärbt.
- Figur 2: Die grün gefärbte Fläche und die hellblau gefärbte Fläche sind gleich groß:
  $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 49\pi = 24{,}5 \cdot \pi$
- Figur 3: grün = violett: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 37\pi = 18{,}5 \cdot \pi$
  blaugrün: $3\pi + 9\pi = 12\pi$

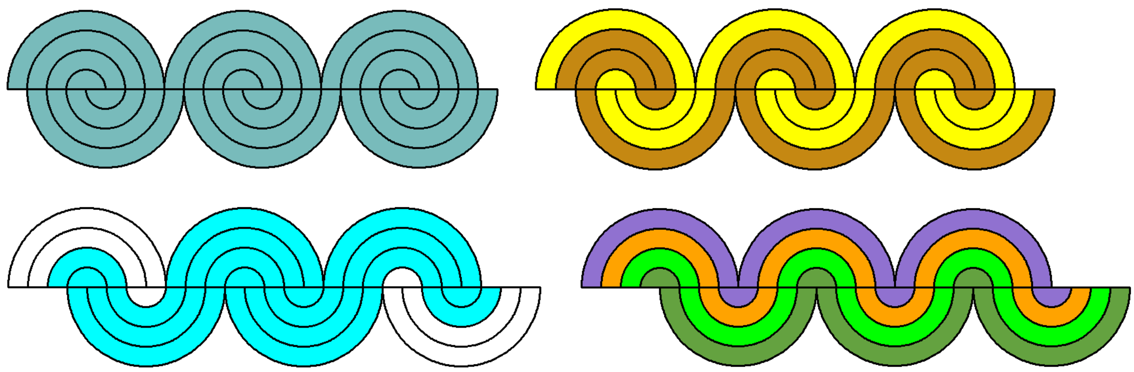
- Figur 4: gelb = orange: ½ · (1π + 7π + 9π) = ½ · 17π = 8,5 · π
  rot = rosa: ½ · (3π + 5π + 11π + 13π) = ½ · 32π = 16π
- Figur 5: rot = orange: ½ · (1π + 9π + 11π) = ½ · 21π = 10,5· π
  rosa = gelb: ½ · (3π + 7π + 13π) = ½ · 23π = 11,5 · π
  braun: 5π
- Figur 6: grau = blauviolett: ½ · (1π + 11π + 13π) = ½ · 25π = 12,5 · π
  blau = lila: ½ · (3π + 9π) = ½ · 12π = 6π
  hellblau = rot : ½ · (5π + 7π) = ½ · 12π = 6π
- Figur 7: hellblau = blauviolett: ½ · (1π + 13π) = ½ · 14π = 7π
  grün = lila: ½ · (3π + 11π) = ½ · 14π = 7π
  gelb = rot: ½ · (5π + 9π) = ½ · 14π = 7π
  orange: 7π
- Figur 8: braun = blauviolett: ½ · 1π = 0,5 · π
  rosa = blaugrau: ½ · (3π + 13π) = ½ · 16π = 8π
  gelb = hellblau: ½ · (5π + 11π) = ½ · 16π = 8π
  orange = grün: ½ · (7π + 9π) = ½ · 16π = 8π
- Figur 9: blau = braun: ½ · 1π = 0,5 · π
  blauviolett = orange: ½ · 3π = 1,5 · π
  grau = rot: ½ · (5π + 13π) = ½ · 18π = 9π
  grün = lila: ½ · (7π + 11π) = ½ · 18π = 9π
  hellblau: 9π

zu A 4.10:

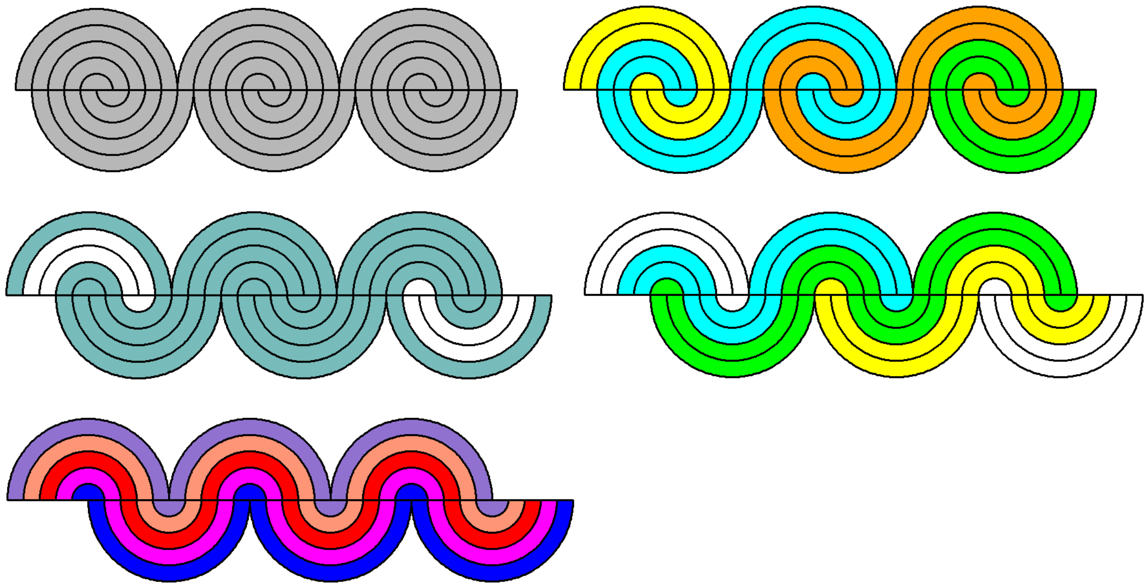
a)



b)

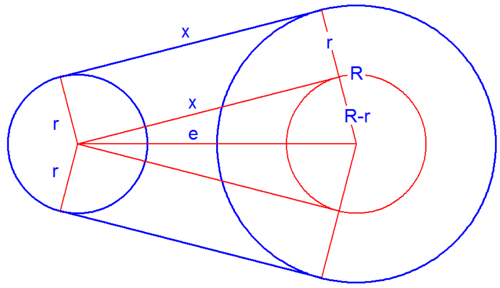


c)



zu A 4.11: Und welche Muster haben Sie noch entdeckt?

zu A 4.12:

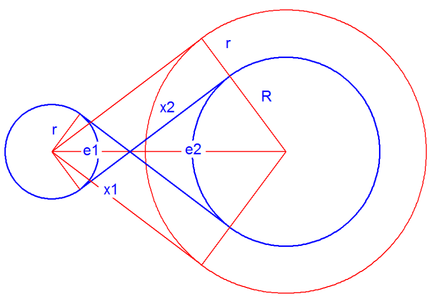


Mithilfe der Beziehung sin(α) = (R – r)/e kann aus den gegebenen Größen r, R und e der Winkel α bestimmt werden. Die Gesamtlänge u der Bahn ergibt sich aus den Längen der Bögen auf den beiden Kreisen sowie den beiden geraden Strecken der Länge x. Die Länge x kann mithilfe des Satzes von Pythagoras oder mithilfe des Kosinus von α berechnet werden: cos(α) = x/e:

$$u = 2x + b_r + b_R = 2e \cdot \cos(\alpha) + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ}$$

$$= 2e \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot r \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right) + \pi \cdot R \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)$$

zu A 4.13:



Der halbe Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Tangenten werde mit α bezeichnet.

Bei gegebenen Radien r und R sowie dem Abstand $e = e_1 + e_2$ zwischen den Mittelpunkten ergeben sich folgende Beziehungen:

$\sin(\alpha) = \frac{R+r}{e}$; hieraus kann α bestimmt werden. Weiter gilt: $\tan(\alpha) = \frac{R+r}{x}$.

Hieraus folgt: $x = \frac{R+r}{\tan(\alpha)}$, also gilt für die Länge u der Laufbahn

$$u = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180° + 2\alpha)}{360°} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180° + 2\alpha)}{360°} = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot (R+r) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90°}\right)$$

Wenn die mittlere von mehreren Bahnen durch die Radien r und R sowie den Abstand e festgelegt ist, dann ergibt sich für die Bahn, die im links abgebildeten Teil innen liegt, ein Radius von r – d, rechts dafür ein Radius von R + d, wobei d der Abstand der Bahn-Mittellinien ist. Der Abstand e der Mittelpunkte der Kreise sowie der Schnittwinkel α bleiben gleich. Daher sind die beiden Bahnlängen gleich. (Entsprechendes gilt für die Außenbahn links / Innenbahn rechts.)

Ersetzt man im Term für u die Summe R + r durch $e \cdot \sin(\alpha)$, dann ergibt sich:

$$u = 2 \cdot \frac{e \cdot \sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot e \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90°}\right) = e \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90°}\right)\right]$$

Wenn man eine solche Bahn in einem typischen Leichtathletik-Stadion mit 400 m-Bahn einrichten würde (r = R = 36,80 cm, e = 84,40 m), dann wäre $\alpha \approx 60{,}7°$ und die Laufbahn hätte eine Länge von ca. 470 m.