Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 3.1:

Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1, wenn die Anzahl der Quadrate, die eingezeichnet werden können, gerade ist; er gewinnt nach Spielregel 2, wenn die Anzahl der Quadrattypen (also der Quadrate mit unterschiedlicher Größe) eine gerade Zahl ist.

Die folgende Tabelle enthält eine Übersicht (die man entsprechend fortsetzen kann), wie die a x b - Rechtecke (also der Breite a und der Höhe b) in möglichst große Quadrate zerlegt werden können.
Den verschiedenen unterlegten Farben kann man entnehmen, welcher Spieler das Spiel nach Spielregel 1 oder 2 gewinnt:

Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1 und nach Spielregel 2.
Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1 und verliert nach Spielregel 2.
Spieler 1 verliert nach Spielregel 1 und gewinnt nach Spielregel 2.
Spieler 1 verliert nach Spielregel 1 und nach Spielregel 2.

↓ b a →	1	2	3	4	5	6
1	$1 \cdot 1^2$					
2	$2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 2^2$				
3	$3 \cdot 1^2$	$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 3^2$			
4	$4 \cdot 1^2$	$2 \cdot 2^2$	$1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 1^2$	$1 \cdot 4^2$		
5	$5 \cdot 1^2$	$2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2$	$1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 4^2 + 4 \cdot 1^2$	$1 \cdot 5^2$	
6	$6 \cdot 1^2$	$3 \cdot 2^2$	$2 \cdot 3^2$	$1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2$	$1 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2$	$1 \cdot 6^2$

zu A 3.2:

(1) $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = [3\,;3]$ (2) $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = [3\,;4]$ (3) $\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5} = [2\,;5]$

(4) $\frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6} = 2 + \frac{1}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = [2\,;1, 5]$

(5) $\frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = [2\,;3, 2]$

(6) $\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8} = 2 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2\,;2, 1, 2]$

zu A 3.3:

$$[a_0\,;a_1\,,a_2\,,a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_1\cdot a_2\cdot a_3 + a_1 + a_3}{a_2\cdot a_3 + 1}}$$

$$= \frac{a_0\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3 + a_0\cdot a_1 + a_0\cdot a_3 + a_2\cdot a_3 + 1}{a_1\cdot a_2\cdot a_3 + a_1 + a_3}$$

zu A 3.4:

Wenn beispielsweise im Kettenbruch-Term [a_0 ; a_1 , a_2 , a_3] für a_3 gilt: $a_3 = 1$, dann ist der letzte gemischte Bruch im Kettenbruch gleich $a_2 + \frac{1}{a_3}$, also $a_2 + 1$, d. h., der letzte gemischte Bruch enthält gar keinen Bruch, sondern ist eine natürliche Zahl.

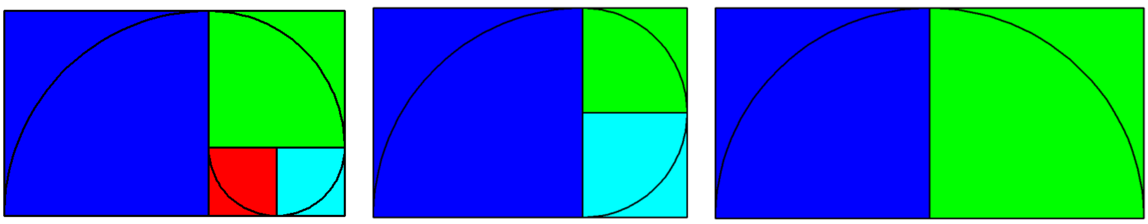
Es gilt also: [a_0 ; a_1 , a_2, …, a_{n-1}, 1] = [a_0 ; a_1 , a_2, …, $a_{n-1} + 1$]

zu A 3.5:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{13}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{4}{13}} = 1+\cfrac{1}{\frac{30}{13}} = 1+\frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

zu A 3.6:

Zerlegung eines 3x5-, eines 2x3- sowie eines 1x2-Rechtecks mit Viertelkreis-Spirale



zu A 3.7:

Mithilfe von (3.1) ergibt sich:

$$[1;2\,,n] = \frac{1\cdot 2\cdot n + 1 + n}{2\cdot n + 1} = \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} \to \frac{3}{2},$$

das Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks geht gegen 1,5 – die Seitenlängen der Rechtecke nähern sich immer mehr dem Verhältnis 3 : 2.

Mithilfe von (3.2) ergibt sich:

$$[1;1,2\,,n] = \frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot n + 1\cdot 1 + 1\cdot n + 2\cdot n + 1}{1\cdot 2\cdot n + 1 + n} = \frac{5n+2}{3n+1} = \frac{5+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{2}} \to \frac{5}{3}$$

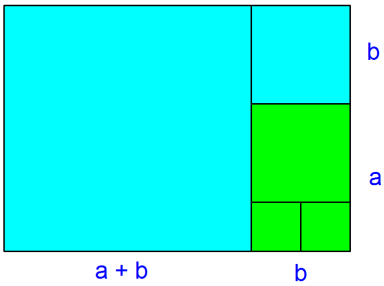
zu A 3.8:

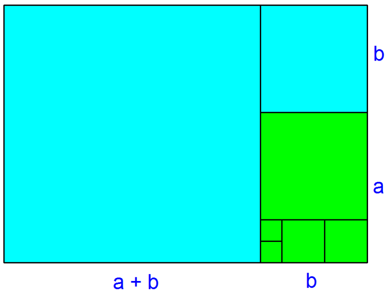
Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{2}=2{,}5$	$\frac{8}{3}=2{,}\overline{6}$	$\frac{13}{5}=2{,}6$	$\frac{21}{8}=2{,}625$	$\frac{34}{13}=2{,}61538...$	…
Zerlegung	[2 ; 2]	[2 ; 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 1 , 1 , 2]	…

Diese Quotientenfolge durchläuft die gleichen Werte wie die Quotientenfolge von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen, vermehrt um 1, wie man allgemein wie folgt nachweisen kann:

$$\frac{f_{n+1}}{f_{n-1}}=\frac{f_n+f_{n-1}}{f_{n-1}}=\frac{f_n}{f_{n-1}}+1$$

zu A 3.9:





Der erste Quotient beschreibt ein Rechteck mit den Seiten a und b (das Rechteck zum Kettenbruch [1; 2] ist grün gefärbt). Dieses Rechteck wird beim Übergang zum Kettenbruch [1; 2, 2] ergänzt um ein Quadrat mit Seitenlänge b und um ein Quadrat mit Seitenlänge a + b, sodass ein Rechteck mit den Seitenlängen (a + b) + b und a + b entsteht.

Dies gilt auch für die nächsten Schritte, vgl. Abbildung links.

zu A 3.10:

Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$	$\frac{19}{11}=1{,}\overline{72}$	$\frac{71}{41}=1{,}\overline{73170}$	…
Zerlegung	[1 ; 1 , 2]	[1 ; 1 , 2 , 1 , 2]	[1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2]	…
Kettenbruch	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$	$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}$	…

Bei dieser Folge von Quotienten wachsen die Werte immer langsamer an und streben gegen einen Grenzwert:

Setzt man für den ersten Quotienten $\frac{a}{b}$, dann gilt für den nächsten Quotienten $\frac{2a+3b}{a+2b}$.

Für den Grenzwert gilt daher:

$$\frac{a}{b}=\frac{2a+3b}{a+2b}\Leftrightarrow a\cdot(a+2b)=(2a+3b)\cdot b\Leftrightarrow a^2+2ab=2ab+3b^2\Leftrightarrow a^2=3b^2\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2=3$$

Der Grenzwert der Folge ist also gleich $[1;\overline{1,2}]=\sqrt{3}$. Die Rechtecke dieser Folge konvergieren gegen ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{3}$: 1.

zu A 3.11:

Quotient der Seitenlängen	$\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{7}{5}=1{,}4$	$\frac{17}{12}=1{,}41\overline{6}$	$\frac{41}{29}=1{,}4137...$	$\frac{99}{70}=1{,}414285...$
Abweichung von $\sqrt{2}$	+0,085786	-0,014214	+0,002453	-0,000421	+0,000072

Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{3}=1{,}\overline{6}$	$\frac{19}{11}=1{,}\overline{72}$	$\frac{71}{41}=1{,}\overline{73170}$	$\frac{265}{153}=1{,}732026...$	$\frac{989}{571}=1{,}732049...$
Abweichung von $\sqrt{3}$	-0,065384	-0,004778	-0,000343	-0,00025	-0,000002

zu A 3.12:

$$\sqrt{6}=2+\left(\sqrt{6}-2\right)=2+\frac{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}+2\right)}=2+\frac{2}{2+\sqrt{6}}=2+\cfrac{2}{2+2+\cfrac{2}{2+\sqrt{6}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}}}$$

$$=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}}}}}=[\,2;\overline{2,4}\,]$$

$$\sqrt{7}=2+\left(\sqrt{7}-2\right)=2+\frac{\left(\sqrt{7}-2\right)\cdot\left(\sqrt{7}+2\right)}{\left(\sqrt{7}+2\right)}=2+\frac{3}{2+\sqrt{7}}=2+\frac{1}{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}=2+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{6}{3\cdot\left(\sqrt{7}+1\right)}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{2}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{6}{2\cdot\left(\sqrt{7}+1\right)}}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\sqrt{7}+1}{3}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{7}}}}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{7}}}}}}}}}=\ldots=[\,2\,;\overline{1,1,1,4}\,]$$

zu A 3.13:

Betrachtet man beispielsweise den Kettenbruch [a; b], also $a+\frac{1}{b}$, dann ist der Kehrwert davon gleich

$\frac{1}{a+\frac{1}{b}}=0+\frac{1}{a+\frac{1}{b}}$, also [0; a, b].

Allgemein sind also [0; a_1, a_2, a_3, …, a_n] und [a_1; a_2, a_3, …, a_n] Kehrwerte voneinander.

zu A 3.14:

Nach den Anfangswerten 4/1 = [4;] und 9/4 = [2; 4] sowie 16/9 = [1; 1, 3, 2] tritt eine Regelmäßigkeit auf:

25/16 = [1; 1, 1, 3, 2]	36/25 = [1; 2, 3, 1, 2]
49/36 = [1; 2, 1, 3, 3]	64/49 = [1; 3, 3, 1, 3]
81/64 = [1; 3, 1, 3, 4]	100/81 = [1; 4, 3, 1, 4]
121/100 = [1; 4, 1, 3, 5]	144/121 = [1; 5, 3, 1, 5]
169/144 = [1; 5, 1, 3, 6]	196/169 = [1; 6, 3, 1, 6]

allgemein:

$(2n+1)^2/(2n)^2$ = [1; n – 1, 1, 3, n]	$(2n)^2/(2n-1)^2$ = [1; n – 1, 3, 1, n – 1]