Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 2.1:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sum$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

zu A 2.2:

Um diese Grenzen zu bestimmen, muss eine quadratische (Un-)Gleichung gelöst werden:

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 100 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 200 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 200{,}25 \Leftrightarrow n \geq 13{,}65 \Leftrightarrow n \geq 14$

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 1.000 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 2.000 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 2000{,}25 \Leftrightarrow n \geq 44{,}22 \Leftrightarrow n \geq 45$

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 1.000.000 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 2.000.000 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 2000000{,}25 \Leftrightarrow n \geq 1413{,}71 \Leftrightarrow n \geq 1414$

zu A 2.3:

Die abgebildeten Quadrate enthalten acht Dreiecke, mit denen die Dreieckszahlen dargestellt werden; zusätzlich liegt in der Mitte ein Punkt. In den Abbildungen sind also die Beziehungen

$8 \cdot \Delta_3 + 1 = 7^2$; $8 \cdot \Delta_4 + 1 = 9^2$; $8 \cdot \Delta_5 + 1 = 11^2$

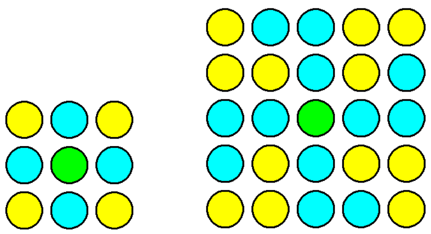
dargestellt. Allgemein lautet die Beziehung:

$8 \cdot \Delta_n + 1 = (2n+1)^2$

Der Nachweis der Beziehung kann mithilfe von $\Delta_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$ erfolgen:

$8 \cdot \Delta_n + 1 = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 = (2n+1)^2$

Grafiken für n = 1 und n = 2:



zu A 2.4:

- In den Abbildungen sind zu sehen:

links: $3^2 - 3 = 6$ rote, $6^2 - 6 = 30$ gelbe, $2 \cdot (3 \cdot 6) = 36$ orange farbene Steine;

Mitte: $6^2 - 6 = 30$ rote, $10^2 - 10 = 90$ gelbe, $2 \cdot (6 \cdot 10) = 120$ orange farbene Steine;

Mitte: $10^2 - 10 = 90$ rote, $15^2 - 15 = 210$ gelbe, $2 \cdot (10 \cdot 15) = 300$ orange farbene Steine

Allgemein: $(r^2 - r) + (g^2 - g) = 2 \cdot r \cdot g \Leftrightarrow g^2 - 2rg + r^2 = r + g \Leftrightarrow (g - r)^2 = r + g$

Sind g und r (mit g > r) zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen Δ_n und Δ_{n-1}, dann ist deren Differenz gerade gleich n. Nach Formel (2.2) gilt aber gerade: $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$.

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Die beiden gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe* berechnet sich wie folgt:

$$P(\,(r|r), (g|g)\,) = \frac{r \cdot (r-1) + g \cdot (g-1)}{(r+g) \cdot (r+g-1)} = \frac{r^2 + g^2 - r - g}{(r+g) \cdot (r+g-1)}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Die beiden gezogenen Kugeln haben unterschiedliche Farben* berechnet sich wie folgt:

$$P(\,(r|g),\,(g|r)\,) = \frac{2 \cdot r \cdot g}{(r+g)\cdot(r+g-1)}$$

Eine faire Spielregel liegt vor, wenn beide Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, also wenn gilt:

$$\frac{r^2+g^2-r-g}{(r+g)\cdot(r+g-1)} = \frac{2 \cdot r \cdot g}{(r+g)\cdot(r+g-1)}$$, d. h., wenn

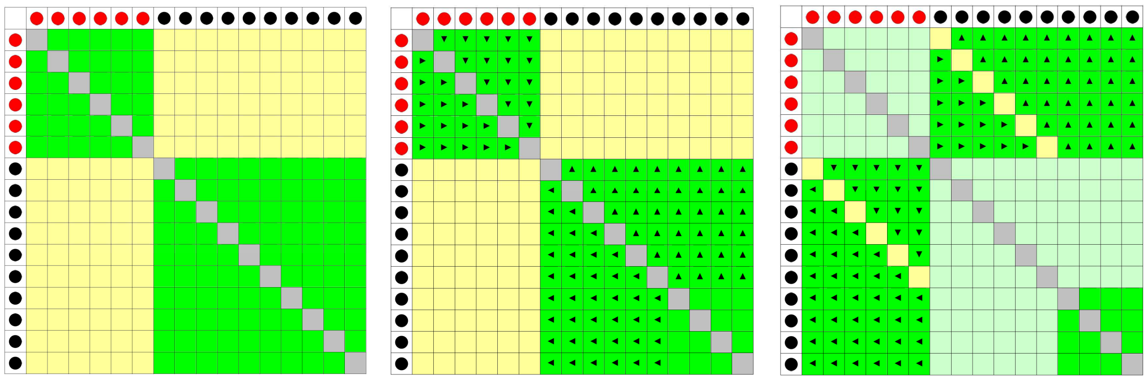
$r^2 - 2rg + g^2 - r - g = 0$, d. h., wenn

$(r-g)^2 = r + g$ oder $(g-r)^2 = r + g$

Hinweis: An der folgenden Tabelle kann abgelesen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit man gewinnt, wenn man auf das Ereignis setzt. Dabei wird deutlich, dass es nachteilig wäre, auf das Ereignis zu wetten, wenn die Anzahlen von roten und gelben Kugeln sich nur wenig unterscheiden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	0,333	0,500	0,600	0,667	0,714	0,750	0,778	0,800	0,818
2	0,333	0,333	0,400	0,467	0,524	0,571	0,611	0,644	0,673	0,697
3	0,500	0,400	0,400	0,429	0,464	0,500	0,533	0,564	0,591	0,615
4	0,600	0,467	0,429	0,429	0,444	0,467	0,491	0,515	0,538	0,560
5	0,667	0,524	0,464	0,444	0,444	0,455	0,470	0,487	0,505	0,524
6	0,714	0,571	0,500	0,467	0,455	0,455	0,462	0,473	0,486	0,500
7	0,750	0,611	0,533	0,491	0,470	0,462	0,462	0,467	0,475	0,485
8	0,778	0,644	0,564	0,515	0,487	0,473	0,467	0,467	0,471	0,477
9	0,800	0,673	0,591	0,538	0,505	0,486	0,475	0,471	0,471	0,474
10	0,818	0,697	0,615	0,560	0,524	0,500	0,485	0,477	0,474	0,474
11	0,833	0,718	0,637	0,581	0,542	0,515	0,497	0,485	0,479	0,476
12	0,846	0,736	0,657	0,600	0,559	0,529	0,509	0,495	0,486	0,481
13	0,857	0,752	0,675	0,618	0,575	0,544	0,521	0,505	0,494	0,486
14	0,867	0,767	0,691	0,634	0,591	0,558	0,533	0,515	0,502	0,493
15	0,875	0,779	0,706	0,649	0,605	0,571	0,545	0,526	0,511	0,500

Das zweifache Ziehen einer Kugel aus der Urne kann mithilfe einer Kombinationstabelle veranschaulicht werden: Da die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden (graue Felder). Die zum Ereignis „gleiche Farbe“ gehörenden Kombinationen sind durch die grünen Felder verdeutlicht. Die Pfeilspitzen zeigen an, dass diese Felder in die gelben Felder verschoben werden können. Die nicht verschobenen grünen Felder passen offensichtlich in die noch nicht belegten Felder oben rechts und unten links:



zu A 2.5:

Dargestellt sind vier Dreiecke mit n Reihen, durch die jeweils die Summe 1 + 3 + 5 + … + (2n + 1) dargestellt wird. Offensichtlich gilt:

$4 \cdot [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] = [(2n - 1) + 1]^2 = (2n)^2 = 4n^2$, also $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = n^2$

zu A 2.6:

Dargestellt sind zwei Summen von ungeraden natürlichen Zahlen

(1 + 3) + 1, (1 + 3 + 5) + (3 + 1), (1 + 3 + 5 + 7) +(5 + 3 + 1), (1 + 3 + 5 + 7 + 9) +(7 + 5 + 3 + 1),

also für n = 1, 2, 3, 4 die Summen

$[1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)] + [(2n - 1) + \ldots + 3 + 1] = (n + 1)^2 + n^2$ gemäß Formel (2.3)

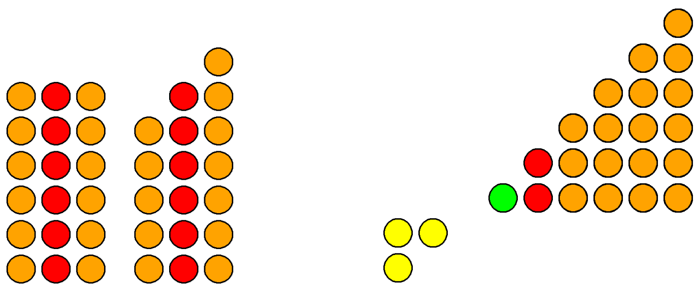
zu A 2.7:

Das Gesamt-Dreieck aus 2n Zeilen setzt sich jeweils aus vier kleineren Dreiecken zusammen: drei Dreiecken mit n Zeilen (rot, grün, blau) und ein Dreieck mit n – 1 Zeilen (gelb). Wenn dieses kleinere Dreieck um eine Zeile mit n Punkten ergänzt wird, erhält man ein Dreieck mit n Zeilen.

zu A 2.8:

- Die Zahl 18 hat zwei ungerade Teiler: 3 und 9.

Hieraus ergeben sich die beiden Summendarstellungen:

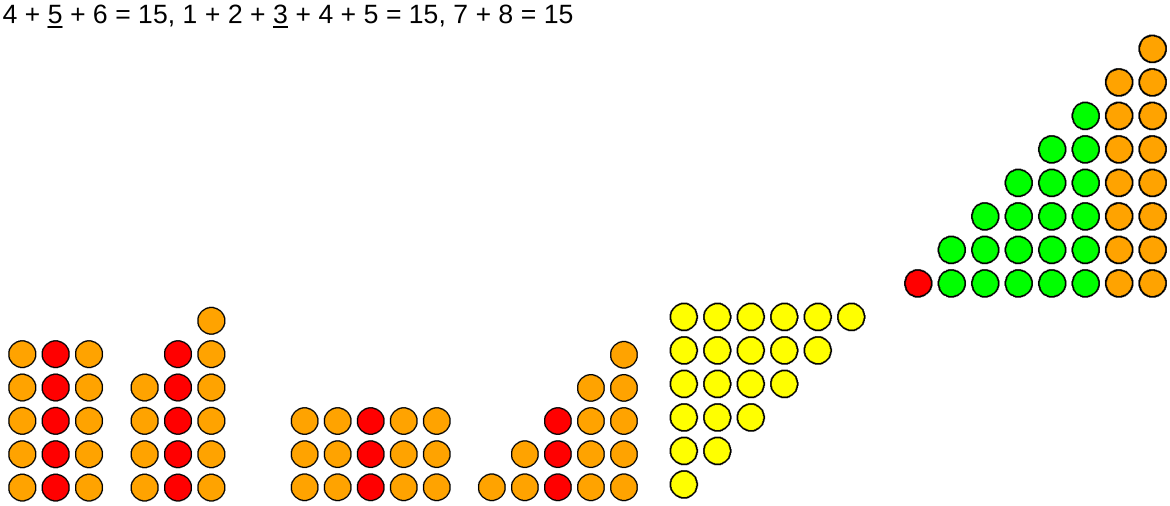


5 + 6 + 7 = 18 3 + 4 + 5 + 6 = 18

- Die Zahl 15 hat drei ungerade Teiler: 3, 5, 15.

Hieraus ergeben sich drei Summendarstellungen

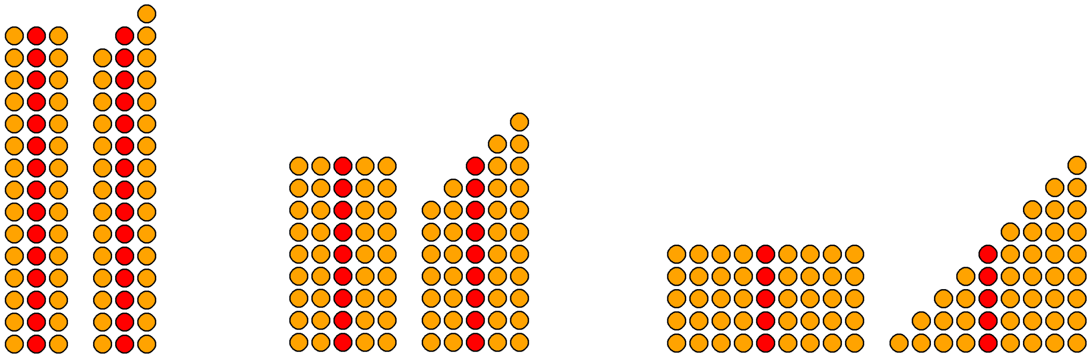
4 + $\underline{5}$ + 6 = 15, 1 + 2 + $\underline{3}$ + 4 + 5 = 15, 7 + 8 = 15



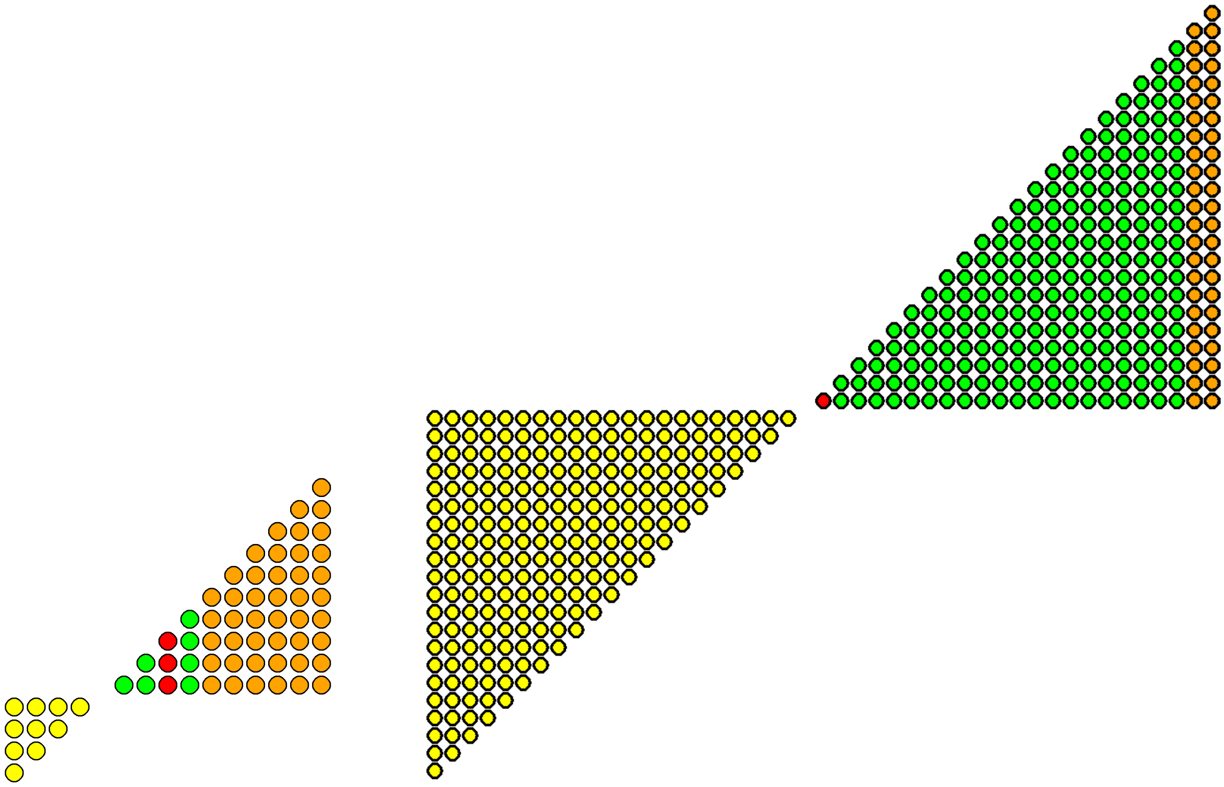
- Die Zahl 45 hat 5 ungerade Teiler: 3, 5, 9, 15, 45.

Hieraus ergeben sich die Summendarstellungen

14 + 15 + 16 = 45;   7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45;   1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =45;



5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45;   22 + 23 = 45



A 2.9:

- Übersicht über die Anzahl der ungeraden Teiler für n = 3, 4, …, 100

n	ungerade Teiler (> 1)					Anzahl
3	3					1
4						0
5	5					1
6	3					1
7	7					1
8						0
9	3	9				2
10	5					1
11	11					1
12	3					1
13	13					1
14	7					1
15	3	5	15			3
16						0
17	17					1
18	3	9				2
19	19					1
20	5					1
21	3	7	21			3
22	11					1
23	23					1
24	3					1
25	5	25				2
26	13					1
27	3	9	27			3
28	7					1
29	29					1
30	3	5	15			3
31	31					1
32						0
33	3	11	33			3
34	17					1
35	5	7	35			3
36	3	9				2
37	37					1
38	19					1
39	3	13	39			3
40	5					1
41	41					1
42	3	7	21			3
43	43					1
44	11					1
45	3	5	9	15	45	5
46	23					1
47	47					1
48	3					1
49	7	49				2
50	5	25				2
51	3	17	51			3

n	ungerade Teiler (> 1)					Anzahl
52	13					1
53	53					1
54	3	9	27			3
55	5	11	55			3
56	7					1
57	3	19	57			3
58	29					1
59	59					1
60	3	5	15			3
61	61					1
62	31					1
63	3	7	9	21	63	5
64						0
65	5	13	65			3
66	3	11	33			3
67	67					1
68	17					1
69	3	23	69			3
70	5	7	35			3
71	71					1
72	3	9				2
73	73					1
74	37					1
75	3	5	15	25	75	5
76	19					1
77	7	11	77			3
78	3	13	39			3
79	79					1
80	5					1
81	3	9	27	81		4
82	41					1
83	83					1
84	3	7	21			3
85	5	17	85			3
86	43					1
87	3	29	87			3
88	11					1
89	89					1
90	3	5	9	15	45	5
91	7	13	91			3
92	23					1
93	3	31	93			3
94	47					1
95	5	19	95			3
96	3					1
97	97					1
98	7	49				2
99	3	9	11	33	99	5
100	5	25				2

zu A 2.10:

- 2016 hat fünf ungerade Teiler: 3, 7, 9, 21, 63.

  Hieraus ergeben sich die fünf Summendarstellungen:

  $2016 = 671 + \underline{672} + 673$

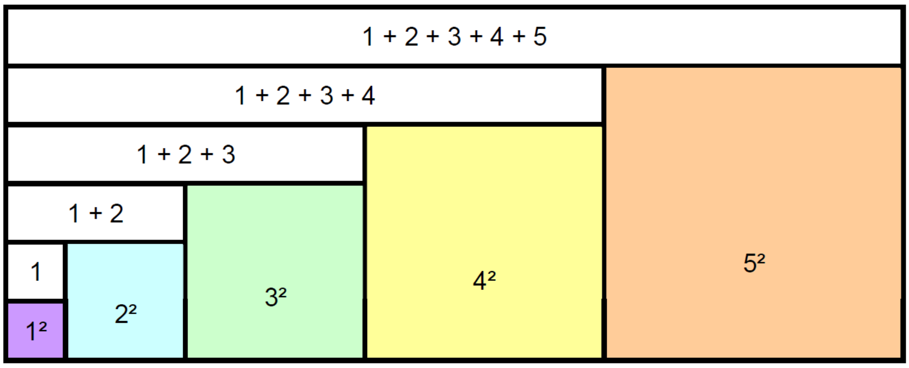
  $= 285 + 286 + 287 + \underline{288} + 289 + 290 + 291$

  $= 220 + 221 + 222 + 223 + \underline{224} + 225 + 226 + 227 + 228$

  $= 86 + 87 + \ldots + 95 + \underline{96} + 97 + \ldots + 106$

  $= 1 + 2 + \ldots + 32 + 33 + \ldots + 64$
- 2017 ist eine Primzahl, hat also nur 1 Teiler,
- $2018 = 2 \cdot 1009$ hat nur einen ungeraden Teiler (2009 ist Primzahl),
- $2019 = 3 \cdot 673$ hat drei ungerade Teiler,
- $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ hat drei ungerade Teiler,
- $2021 = 43 \cdot 47$ hat drei ungerade Teiler,
- $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ hat drei ungerade Teiler,
- $2023 = 7 \cdot 17^2$ hat fünf ungerade Teiler,
- $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ hat drei ungerade Teiler.
- $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ hat vierzehn ungerade Teiler.

zu A 2.11:



Die Rechteckfigur mit der Breite $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und der Höhe $1 + 5$ setzt sich zusammen aus den Quadraten mit den Flächeninhalten 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 und 5^2 sowie den Rechteckstreifen der Höhe 1 mit den Flächeninhalten $1 \cdot 1$, $1 \cdot (1 + 2)$, $1 \cdot (1 + 2 + 3)$, $1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$ und $1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

Es gilt also:

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) = (1+2+3+4+5) \cdot 6$

Ersetzt man die auf der linken Seite in Klammern stehenden Summen von natürlichen Zahlen jeweils durch den o. a. Summenterm, also

$1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1$; $1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2$; $1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3$; $1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4$;
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 5$,

so ergibt sich:

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + (\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1) + (\frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2) + (\frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3) + (\frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4)$
$+ (\frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 5) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6$

Nach Auflösen der Klammern und Umordnen folgt hieraus:

$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6$

und weiter

$^{3}/_{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = {}^{11}/_{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

Auflösen nach der Summe der Quadratzahlen ergibt dann

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = {}^{11}/_{3} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

und nach Ersetzen des Summenterms für die ersten 5 natürlichen Zahlen

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = {}^{11}/_{3} \cdot ½ \cdot (5^2 + 5) = 55$

zu A 2.12:

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Für die Summe der ersten n geraden Quadratzahlen folgt hieraus:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Daher gilt für die Summe der ersten n ungeraden Quadratzahlen:

$$1^2 + 3^2 + .. + (2n-1)^2 = [1^2 + 2^2 + .. + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 ... + (2n)^2] = \frac{1}{6} \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot n \cdot (2n+1) \cdot [4n+1-2n-2] = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot$$

- *Hinweis*: Wunderbare geometrische Veranschaulichungen findet man unter:

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen/Summe_unger_Quadratzahlen.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen2/Summe_unger_Quadratzahlen2.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen3/Summe_unger_Quadratzahlen3.htm

zu A 2.13:

Da die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen eine ungerade Zahl ist, lässt sie sich nach dem Satz von Sylvester stets auch als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen.

Beispiele für Summen von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen:

$1^2 + 2^2 = 5 = 2 + 3$;

$2^2 + 3^2 = 13 = 6 + 7$;

$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = 12 + 13 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$;

$4^2 + 5^2 = 41 = 20 + 21$; $5^2 + 6^2 = 61 = 30 + 31$;

$6^2 + 7^2 = 85 = 5 \cdot 17 = 42 + 43 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$; …

Bei einigen dieser Beispiele gibt es offensichtlich mehrere Möglichkeiten der Darstellung. Da aber unter den Beispielen auch Primzahlen sind, die nur einen ungeraden Teiler besitzen (nämlich sich selbst), für es also nur *eine* Möglichkeit der Summendarstellung gibt, bleibt für alle Summen von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen nur *eine* gemeinsame Möglichkeit der Darstellung, nämlich als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen:

$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n) + (n^2 + n + 1) = [\, n \cdot (n+1) \,] + [\, n \cdot (n+1) + 1 \,]$

zu A 2.14:

In jedem der Dreiecke der linken Seite ist 1-mal die 1 enthalten, 2-mal die 2, 3-mal die 3, 4-mal die 4, 5-mal die 5, 6-mal die 6 und 7-mal die 7; die Summe aller Felder eines Dreiecks ergibt also $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$.

Im Summendreieck rechts steht in jedem Feld die Summe $2 \cdot 7 + 1 = 15$.

Daher folgt: $3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot (2 \cdot 7 + 1) = 420$,
also $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$.

Allgemein gilt:

$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \cdot (2n + 1)$ und hieraus folgt wegen

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = ½ \cdot n \cdot (n + 1)$ die Behauptung.

zu A 2.15:

Die „nächsten“ Gleichungen, für welche die besondere Summendarstellung gilt, lauten:

– Die Summe der ersten 32 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von elf aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 10):
$1^3 + 3^3 + .. + 63^3 = 2^{10} + 2^{11} + \ldots + 2^{20} = 111111111110000000000_2$.

– Die Summe der ersten 64 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von 13 aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 12):
$1^3 + 3^3 + .. + 127^3 = 2^{12} + 2^{11} + \ldots + 2^{24} = 1111111111111000000000000_2$.

Eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Kubikzahlen ergibt sich aus Formel 2.5:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) = 2 \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

Daher gilt für die Summe der ersten n ungeraden Kubikzahlen:

$$1^3 + 3^3 + .. + (2n-1)^3 = [1^3 + 2^3 + .. + (2n)^3] - [2^3 + 4^3 \ldots + (2n)^3] = \frac{1}{4} \cdot (2n)^2 \cdot (2n+1)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

$$= n^2 \cdot (2n+1)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot (n+1)^2 = n^2 \cdot (4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2) = n^2 \cdot (2n^2 - 1) = 2n^4 - n^2 ,$$

also: $1^3 + 3^3 + .. + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

Für den Fall, dass es sich bei der ungeraden Zahl $2n - 1$ um den Vorgänger einer Zweierpotenz handelt,

also um $2 \cdot 2 - 1 = 3$, $2 \cdot 2^2 - 1 = 7$, $2 \cdot 2^3 - 1 = 15$, $2 \cdot 2^4 - 1 = 31$ usw.,

kann man diese Beziehung auch wie folgt notieren

$$1^3 + 3^3 + .. + (2 \cdot 2^k - 1)^3 = 2 \cdot (2^k)^4 - (2^k)^2 = 2^{4k+1} - 2^{2k}.$$

Zweierpotenzen haben die besondere Eigenschaft, dass sie jeweils um 1 größer sind als die Summe aller Zweierpotenzen mit kleinerem Exponenten: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Daher kann man 2^{4k+1} notieren als $\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{4k}\right) + 1$ und 2^{2k} als $\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2k-1}\right) + 1$,

also $1^3 + 3^3 + .. + (2 \cdot 2^k - 1)^3 = 2^{4k+1} - 2^{2k} = 2^{2k} + 2^{2k+1} + \ldots + 2^{4k}$.

zu A 2.16:

Weitere Beispiele für Summen von aufeinanderfolgenden Kubikzahlen:

$4^3 + 5^3 = 189 = 3^3 \cdot 7 = 94 + 95 = 62 + 63 + 64 = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30$
$17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = \ldots$ (Zerlegung in 2, 3, 7, 9, 21, 27 oder 63 Summanden);

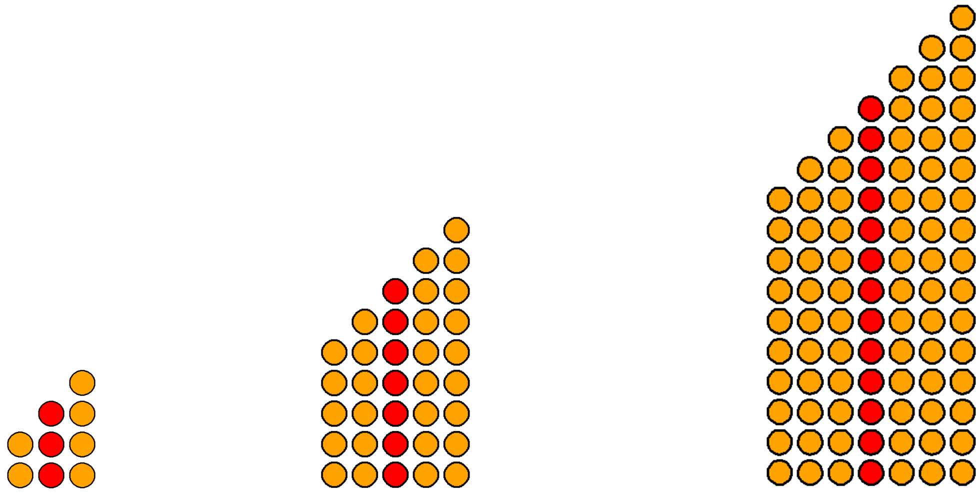
$5^3 + 6^3 = 341 = 11 \cdot 31 = 170 + 171 = 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = \ldots$
(Zerlegung in 2, 11 oder 31 Summanden);

$6^3 + 7^3 = 559 = 13 \cdot 43 = \ldots$ (Zerlegung in 2, 13 oder 43 Summanden)

Aus den Beispielen ergibt sich die Vermutung, dass es zwei gemeinsame Möglichkeiten der Summendarstellung gibt:

- Darstellung als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen:
  $n^3 + (n+1)^3 = n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = [\, n^3 + ½ \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1)\,] + [\, n^3 + ½ \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1) + 1]$
  Hinweis: $n \cdot (n+1)$ ist eine gerade Zahl, daher ist die Hälfte davon ganzzahlig.
- Darstellung als Summe von 2n + 1 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen: Die Summe der Kubikzahlen $n^3 + (n+1)^3$ ist durch $2n + 1$ teilbar; der Quotient ist $n^2 + n + 1$, d. h., der mittlere der $2n + 1$ Summanden ist $n^2 + n + 1$, die Summe lautet demnach: $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n^2 + 2n + 1)$, also $n^3 + (n+1)^3 = (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \ldots + (n + 1)^2$.

  $1^3 + 2^3 = 2 + 3 + 4$ $\quad$ $2^3 + 3^3 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ $\quad$ $3^3 + 4^3 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$



Hinweis: Eine räumliche Veranschaulichung dieser Zerlegung findet man in
Roger B. Nelsen: Proofs without Words II, MAA, 2000, S. 94.

zu A 2.17:

Für drei benachbarte Winkelhaken gilt: Eine ungerade Quadratzahl, die Summe von drei benachbarten ungeraden Zahlen ist, muss durch 3 teilbar sein (da die erste der drei Zahlen um 2 kleiner ist als die mittlere Zahl und die dritte um 2 größer). Daher ergibt sich

$9^2 = 81 = 25 + 27 + 29 = (12 + 13) + (13 + 14) + (14 + 15)$

als Gesamtzahl der blauen Steine in den drei Winkelhaken und 12^2 als Anzahl der roten Steine und 15^2 als Gesamtzahl der roten und blauen Steine, vgl. Abbildung in der Aufgabenstellung.

Hier die ersten Zahlentripel des Typs mit drei Winkelhaken:

n	$a_n = 3 \cdot (2n+1)$	$9 \cdot (2n + 1)^2 = 36n^2 + 36n + 9$	$b_n = 6n \cdot (n + 1)$	$c_n = 6n \cdot (n + 1) + 3$
1	9	81 = (12 + 13) + (13 + 14) + (14 + 15)	12	15
2	15	225 = (36 + 37) + (37 + 38) + (38 + 39)	36	39
3	21	441 = (72 + 73) + (73 + 74) + (74 + 75)	72	75
4	27	729 = (120 + 121) + (121 + 122) + (122 + 123)	120	123
5	33	...	180	183
…	…	...	…	…

Die zu den Figuren mit drei Winkelhaken gehörenden Zahlentripel erhält man durch Verdreifachen der Zahlentripel, die man aus den Figuren mit einem Winkelhaken kennt:
$a_n = 2n + 1$; $b_n = 3 \cdot (2n + 1)^2$; $c_n = 2n \cdot (n + 1) + 1$