Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 11.1:

Wenn drei Positionen übereinstimmen, bleibt eine Kugel übrig; diese muss dann auch übereinstimmen.

zu A 11.2:

Beispiel:

Anzahl der richtigen Tipps	Auszahlung in GE	zu erwartender Anteil	zu erwartende Auszahlung in GE
0	0	$\frac{9}{24}$	$0 \cdot \frac{9}{24} = 0$
1	2	$\frac{8}{24}$	$2 \cdot \frac{8}{24} = \frac{16}{24}$
2	4	$\frac{6}{24}$	$4 \cdot \frac{6}{24} = \frac{24}{24}$
4	8	$\frac{1}{24}$	$8 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8}{24}$
		Summe	2

zu A 11.3:

Die blaue Kugel ist als vierte Kugel gezogen worden; bei der abgedruckten Anordnung wurden alle Fälle durchgespielt, bei denen die blaue Kugel für die zweite Position getippt wurde, dann alle Fälle mit blau auf der dritten Position und schließlich alle Fälle mit blau auf der ersten Position. Dadurch wurde es einfach zu überlegen, welche Positionen für die anderen Kugeln in Frage kommen.

Alternativ hätte man natürlich auch die erste Grafik mit allen 24 Möglichkeiten durchsehen können oder eine andere Farbe festhalten können.

zu A 11.4:

$A(6;0) = 265$	$A(6;1) = \binom{6}{1} \cdot A(5;0) = 264$	$A(6;2) = \binom{6}{2} \cdot A(4;0) = 135$	$A(6;3) = \binom{6}{3} \cdot A(3;0) = 40$
$A(6;4) = \binom{6}{4} \cdot A(2;0) = 15$	$A(5;4) = \binom{6}{5} \cdot A(1;0) = 0$	$A(6;6) = 1$	

zu A 11.5:

$$A(6;0) = 6! - [A(6;1) + A(6;2) + A(6;3) + A(6;4) + A(6;5) + A(6;6)]$$
$$= 720 - (264 + 135 + 40 + 15 + 0 + 1) = 265 = A(6;1) - 1$$

zu A 11.6:

n = 1: Es gibt nur die Möglichkeit, die Kugel als erste zu ziehen, und die Wahrscheinlichkeit für genau einen richtigen Tipp ist daher gleich 1 und die Wahrscheinlichkeit für 0 Übereinstimmungen gleich 0.

n = 0: Wenn keine Kugel gezogen wird, ist die Wahrscheinlichkeit, 0 für richtige Tipps gleich 1.

zu A 11.7:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$,

- $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ ist durch die gefärbten Flächen in den drei Grafiken erfasst
- $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$ beschreibt die gemeinsamen Flächen von je zwei Mengen
  orange + blaugrün   graublau + blaugrün   grün + blaugrün
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ = blaugrüne Fläche

zu A 11.8:

Wegen $P(n;k) = \frac{1}{k!} \cdot P(n-k;0)$ für $0 < k \leq n$ ergibt sich

$P(6;1) = \frac{1}{1!} \cdot P(5;0) = \frac{44}{120} = \frac{264}{720} \approx 0{,}367$

$P(7;1) = \frac{1}{1!} \cdot P(6;0) \approx \frac{1}{e} \approx 0{,}368$

$P(8;1) = \frac{1}{1!} \cdot P(7;0) \approx \frac{1}{e} \approx 0{,}368$

zu A 11.9:

k	$P(n\,;\,k)$	$k \cdot P(n\,;\,k)$
$k = 0$	$\frac{265}{720}$	0
$k = 1$	$\frac{264}{720}$	$\frac{264}{720}$
$k = 2$	$\frac{135}{720}$	$2 \cdot \frac{135}{720} = \frac{270}{720}$
$k = 3$	$\frac{40}{720}$	$3 \cdot \frac{40}{720} = \frac{120}{720}$
$k = 4$	$\frac{15}{720}$	$4 \cdot \frac{15}{720} = \frac{60}{720}$
$k = 5$	0	0
$k = 6$	$\frac{1}{720}$	$6 \cdot \frac{1}{720} = \frac{6}{720}$
Erwartungswert:	$\frac{0+264+270+120+60+0+6}{720} = \frac{720}{720} = 1$	

zu A 11.10:

Anzahl der Rencontres	Wahrschein-lichkeit	zu erwartende Häufigkeit	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
0	$\frac{265}{720} \approx 36{,}81\,\%$	2042	2067	37,26 %
1	$\frac{264}{720} \approx 36{,}67\,\%$	2034	2000	36,05 %
2	$\frac{135}{720} \approx 18{,}75\,\%$	1040	1035	18,66 %
3	$\frac{40}{720} \approx 5{,}56\,\%$	308	320	5,77 %
4	$\frac{15}{720} \approx 2{,}08\,\%$	116	117	2,11 %
5	0 %	0	0	0 %

6	$\frac{1}{720} \approx 0{,}14\,\%$	8	9	0,16 %

zu A 11.11:

Beteiligen sich **acht Personen** beim Wichteln, dann können wir bei den 14833 möglichen fixpunktfreien Permutationen folgende Fälle unterscheiden:

– die Permutation ist zusätzlich paarfrei: 14833 – 4480 – 1260 – 105 = 8988 Möglichkeiten,

– die Permutation setzt sich aus einem Paar und einer paarfreien 6er-Permutation zusammen: $\binom{8}{2}\cdot 160 = 4480$ Möglichkeiten,

– die Permutation umfasst zwei Paare und eine paarfreie 4er-Permutation: $\frac{1}{2!}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot 6 = 1260$ Möglichkeiten,

– die Permutation umfasst vier Paare:

$\frac{1}{4!}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 105$ Möglichkeiten.

Der Anteil der besonderen *paarfreien* Permutationen an den eigentlich für das Wichteln geeigneten fixpunktfreien Permutationen beträgt etwa 60,6 %.

Beteiligen sich **neun Personen** beim Wichteln, dann können wir bei den 133.496 möglichen fixpunktfreien Permutationen folgende Fälle unterscheiden:

– die Permutation ist zusätzlich paarfrei (133496 – 41040 – 9072 – 2520 = 80864 Möglichkeiten),

– die Permutation setzt sich aus einem Paar und einer paarfreien 7er-Permutation zusammen: $\binom{9}{2}\cdot 1140 = 41040$ Möglichkeiten,

– die Permutation umfasst zwei Paare und eine paarfreie 5er-Permutation: $\frac{1}{2!}\cdot\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot 24 = 9072$ Möglichkeiten,

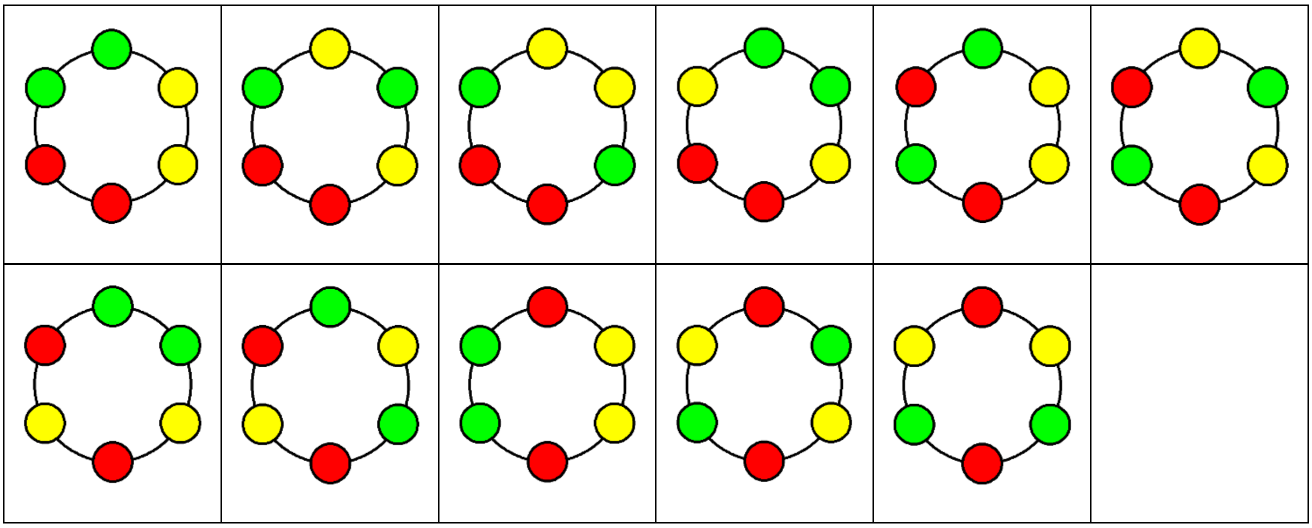
– die Permutation umfasst drei Paare und eine paarfreie 3er-Permutation:

$\frac{1}{3!}\cdot\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 2 = 2520$ Möglichkeiten.

Der Anteil der besonderen *paarfreien* Permutationen an den eigentlich für das Wichteln geeigneten fixpunktfreien Permutationen beträgt ebenfalls etwa 60,6 %.

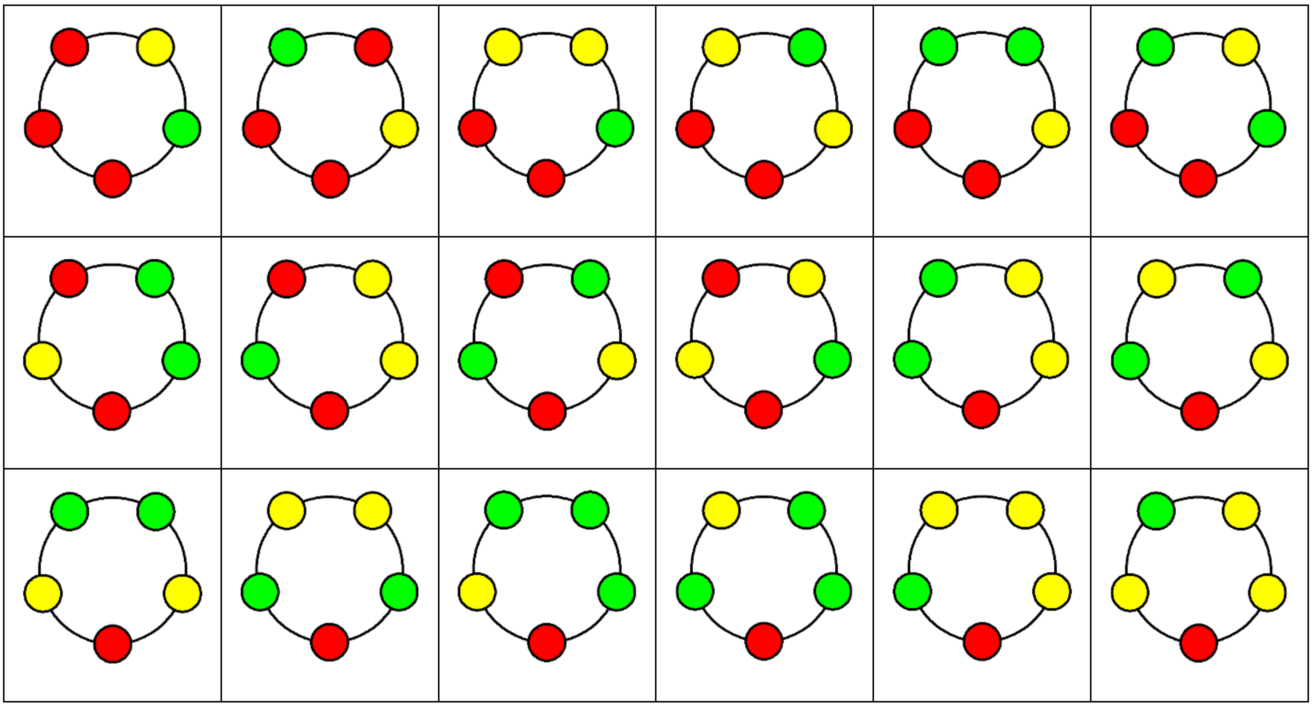
zu A 11.12:

Es gibt 11 verschiedene Ketten mit sechs Perlen und jeweils zwei Perlen einer Farbe:



zu A 11.13:

Es gibt 18 verschiedene Ketten mit fünf Perlen und drei verschiedenen Farben:



zu A 11.14:

Es gibt

- eine Möglichkeit für eine Kette mit drei blauen Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 3),
- eine Möglichkeit mit zwei blauen Perlen und einer gelben Perle (Dualzahlen-Quersumme = 2),
- eine Möglichkeit mit einer blauen Perle und zwei gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 1),
- eine Möglichkeit mit drei gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 0).

zu A 11.15:

Es gibt

– eine Möglichkeit für eine Kette mit vier blauen Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 4),
– eine Möglichkeit mit drei blauen Perlen und einer gelben Perle (Dualzahlen-Quersumme = 3),
– zwei Möglichkeiten mit zwei blauen und zwei gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 2) – eine Möglichkeit, bei der sich die Farben abwechseln, eine Möglichkeit, bei der gleichfarbige Perlen nebeneinander stehen,
– eine Möglichkeit mit einer blauen Perle und drei gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 1),
– eine Möglichkeit mit vier gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 0).

zu A 11.16:

Es gibt

– eine Möglichkeit für eine Kette mit fünf blauen Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 5),
– eine Möglichkeit mit vier blauen Perlen und einer gelben Perle (Dualzahlen-Quersumme = 4),
– zwei Möglichkeiten mit drei blauen und zwei gelben Perle (Dualzahlen-Quersumme = 3) – eine Möglichkeit, bei der sich die Farben abwechseln, eine Möglichekt, bei der gleichfarbige Perlen nebeneinander stehen,
– zwei Möglichkeiten mit zwei blauen und drei gelben Perle (Dualzahlen-Quersumme = 2) – eine Möglichkeit, bei der sich die Farben abwechseln, eine Möglichkeit, bei der gleichfarbige Perlen nebeneinander stehen,
– eine Möglichkeit mit einer blauen Perle und vier gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 1),
– eine Möglichkeit mit fünf gelben Perlen (Dualzahlen-Quersumme = 0).

zu A 11.17:

Da man die Eigenschaften *hell* und *dunkel* (oder die Zuordnung zu 0 bzw. 1) miteinander vertauschen kann, muss bzgl. der Anzahl der Möglichkeiten Symmetrie vorliegen.

zu A 11.18:

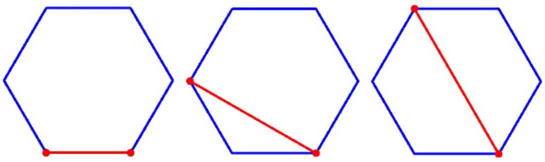
Für n = 4 und n = 5 sind alle Möglichkeiten symmetrisch! (Die Ketten können so gedreht werden, dass man deren Achsensymmetrie erkennt.)

Bei n = 6 sind 12 der 13 Möglichkeiten achsensymmetrisch; bei einer der Möglichkeiten (6. Abbildung) liegen die blauen und gelben Perlen spiegelbildlich!

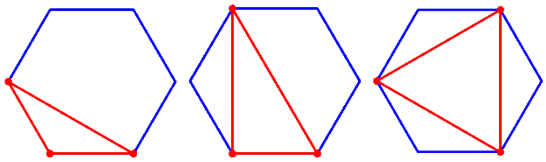
zu A 11.19:

Es gibt einen Typ von 1-Ecken, einen Typ von 5-Ecken im 6-Eck, einen Typ von 6-Ecken im 6-Eck, weiter:

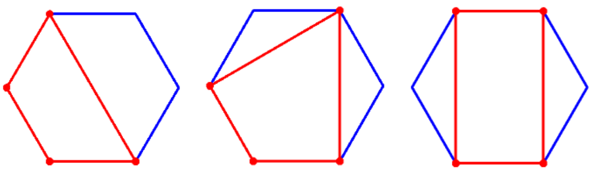
2-Ecke im 6-Eck



3-Ecke im 6-Eck

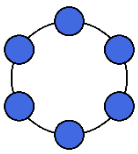
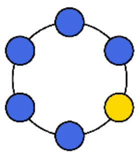
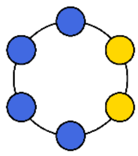
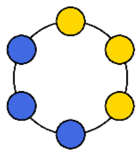
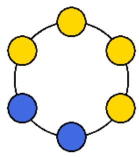
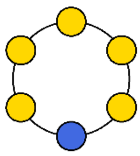
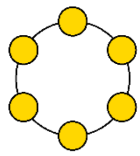
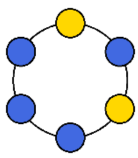
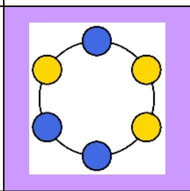
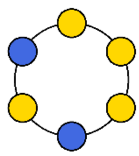
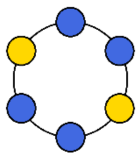
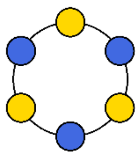
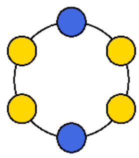


4-Ecke im 6-Eck



zu A 11.20:

$n = 6$: Bei den $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6$ möglichen Perlenketten kann man 13 Typen von *bracelets* und 14 Typen von *necklaces* von unterscheiden (zum Unterschied vgl. Lösung von 11.22).

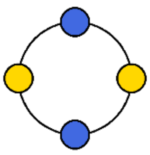
111111	111110 111101 111011 110111 101111 011111	111100 111001 110011 100111 001111 011110	111000 110001 100011 000111 001110 011100	110000 011000 001100 000110 000011 100001	100000 010000 001000 000100 000010 000001	000000
						
		111010 110101 101011 010111 101110 011101	110010 100101 001011 010110 101100 011001 110100 011010 001101 100110 010011 101001	100010 000101 001010 010100 101000 010001		
						
		110110 101101 011011	101010 010101	100100 001001 010010		
						

zu A 11.21:

In diesen Tabellen wird der Fall $a = 2$ betrachtet. Es zeigt sich, dass sich für Perlenketten aus p Perlen alle Typen zusammenfassen lassen in Gruppierungen von p Perlen – mit Ausnahme der einfarbigen Perlenketten:

$p = 3$ (A 11.13): Man kann $2^3 = 1 + 3 + 3 + 1$ Perlenketten bilden. Zieht man die beiden einfarbigen Perlenketten ab, dann stimmen von den restlichen $2^3 - 2 = 6$ Ketten jeweils 3 bis auf Drehung überein.

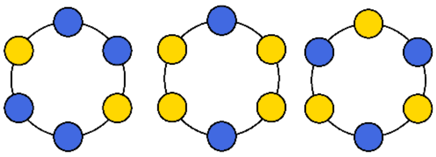
$p = 4$ (A 11.14): Man kann $2^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1$ Perlenketten bilden. Hier ist eine 4er-Gruppierung nicht durchgängig möglich. Eine Ausnahme bilden die zwei Varianten der Perlenkette zu 1010; dass es nur zwei (und nicht vier) Varianten gibt, liegt daran, dass die 4er-Kette in zwei identische 2er-Ketten unterteilt werden kann – das ist bei einer primen Anzahl von Perlen nicht möglich!



$p = 5$ (A 11.15): Man kann $2^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1$ Perlenketten bilden. Zieht man die beiden einfarbigen Perlenketten ab, dann stimmen von den restlichen $2^5 - 2 = 30$ Ketten jeweils 5 bis auf Drehung überein.

$p = 6$ (A 11.14): Man kann $2^6 = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$ Perlenketten bilden. Hier ist eine 6er-Gruppierung nicht durchgängig möglich.

Eine Ausnahme bilden die Varianten der Perlenkette zu 110110 bzw. 001001 (folgende Abb. links und Mitte) und zu 101010 (Abb. rechts); dass es nur drei oder zwei (und nicht sechs) Varianten gibt, liegt daran, dass die 6er-Kette in zwei identische 3er-Ketten (links und Mitte) und in drei identische 2er-Ketten (rechts) unterteilt werden kann – das ist bei einer primen Anzahl von Perlen nicht möglich!

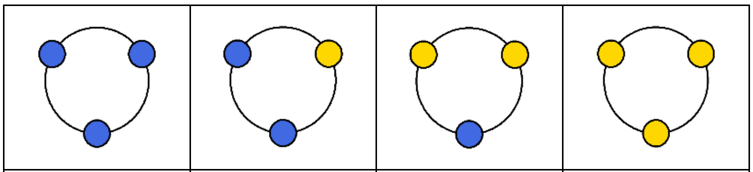


Ausführungen zum Beweis des Fermat'schen Satzes:

- https://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_Fermat%27s_little_theorem

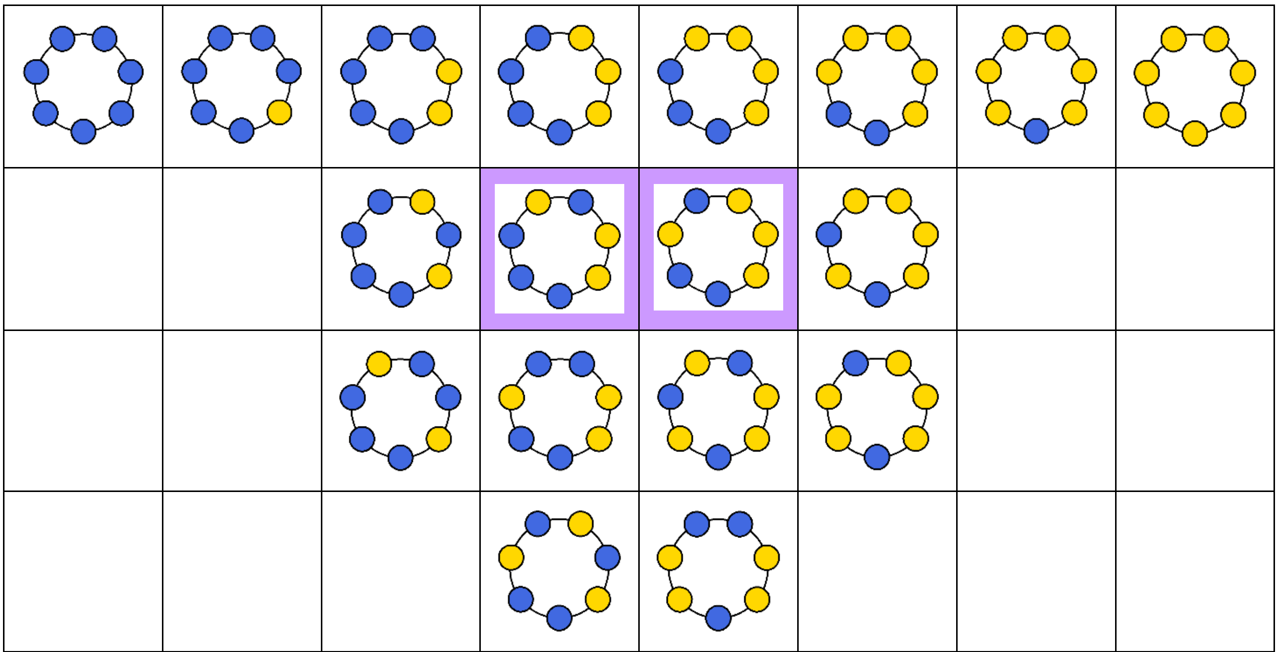
zu A 11.22:

***n* = 3:** Bei den 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 möglichen Perlenketten kann man 4 Typen unterscheiden.



1 x 1	1 x 3	1 x 3	1 x 1

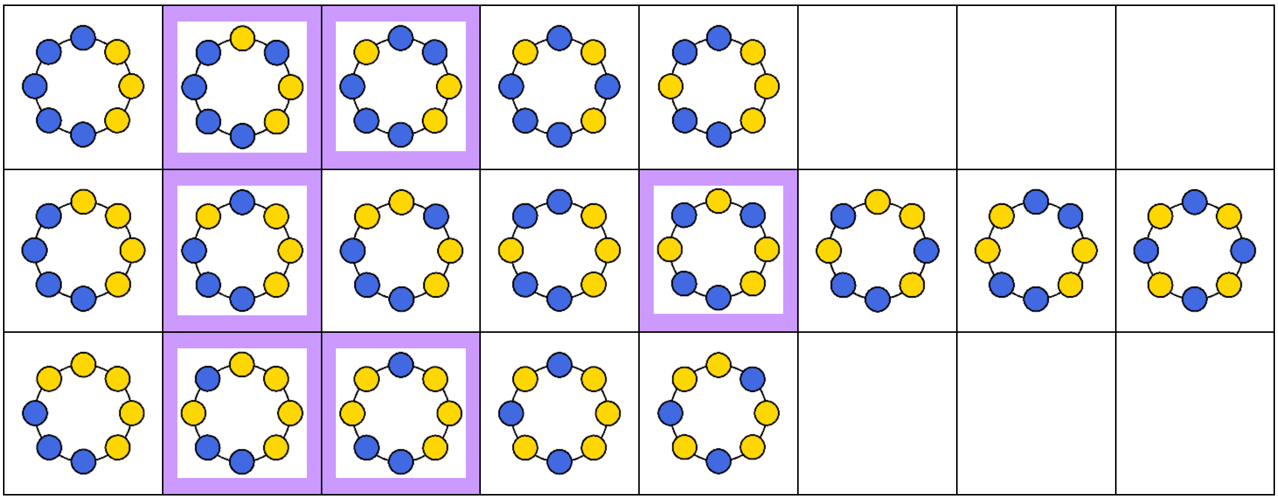
***n* = 7:** Bei den 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 2^7 möglichen Perlenketten kann man 18 Typen von *bracelets* und 20 Typen von *necklaces* unterscheiden (zum Unterschied vgl. Lösung von 11.22).



1 x 1	1 x 7	3 x 7	3 x 7 1 x 14	4 x 7 1 x 14	3 x 7	1 x 7	1 x 1

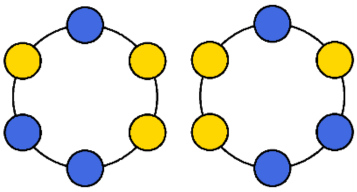
***n* = 8:** Bei den 1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 2^8 möglichen Perlenketten kann man 30 Typen von *bracelets* und 36 Typen von *necklaces* unterscheiden (zum Unterschied vgl. Lösung von 11.22).

Im Folgenden sind nur die Perlenketten mit 3, 4 bzw. 5 dunklen Perlen abgebildet; bei den übrigen Fällen treten keine Besonderheiten auf.

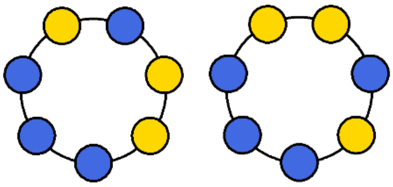


zu A 11.23:

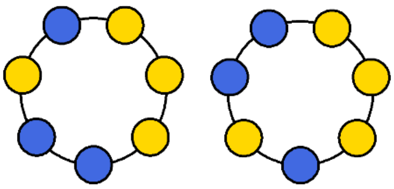
***n* = 6:** In A 11.19 findet man 12 Varianten des Typs 110010 – dies kann im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn gelesen/gezeichnet werden. Bei den *necklaces* muss man den Drehsinn beachten; bei den *bracelets* werden diese beiden Möglichkeiten nicht unterschieden.



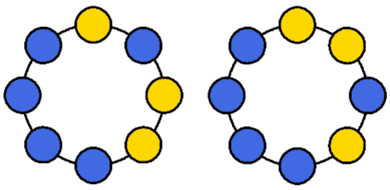
***n* = 7:** Die *necklaces* 1110100 und 1110010 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



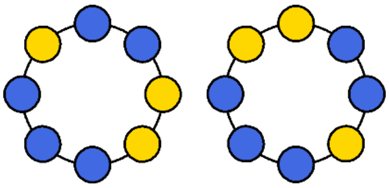
Die *necklaces* 1101000 und 1011000 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



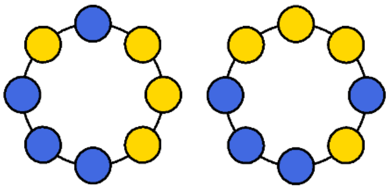
***n* = 8:** Die *necklaces* 11110010 und 11110100 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



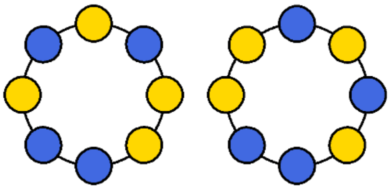
Die *necklaces* 11100110 und 11101100 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



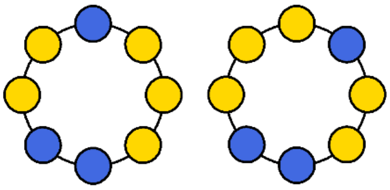
Die *necklaces* 11100010 und 11101000 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



Die *necklaces* 11001010 und 11010100 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



Die *necklaces* 11001000 und 11000100 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.



Die *necklaces* 11010000 und 11000010 müssen unterschieden werden; sie können durch Umdrehen ineinander überführt werden.