Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 10.1:

n = 5: $1+2+3+...+25=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot(25+1)=325$

n = 6: $1+2+3+...+36=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot(36+1)=666$

zu A 10.2:

Die magische Zahl eines 2×2-Quadrats ist die Zahl 5 (wegen 1 + 2 + 3 + 4 = 10). Es gibt aber nur zwei Möglichkeiten, diese Zahl als Summe der Elemente darzustellen. In einem magischen 2×2-Quadrat müssten sechs Gleichungen aufgestellt werden können.

zu A 10.3:

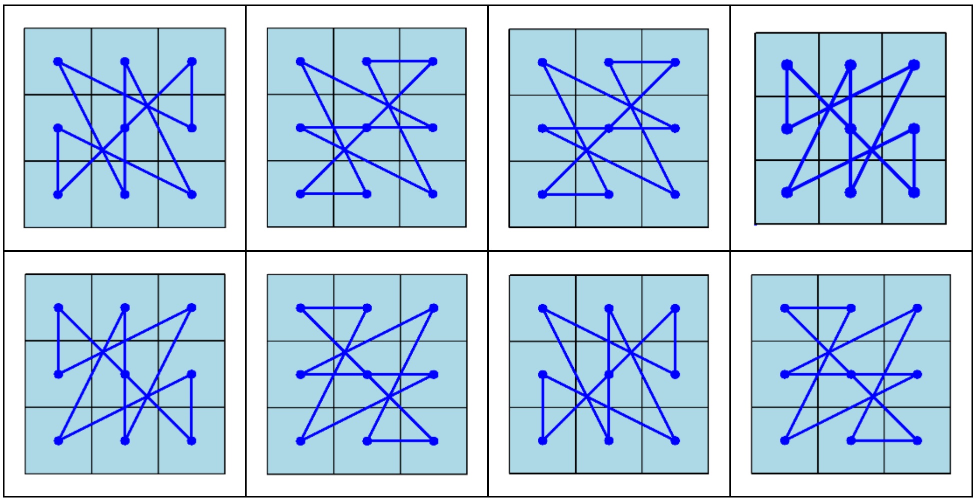
Durch systematisches Einsetzen der Parameterwerte für y und z findet man die folgenden acht Möglichkeiten:

y	1	1	3	3	7	7	9	9
z	6	8	4	8	2	6	2	4
a	4	2	6	2	8	4	8	6
b	9	9	7	7	3	3	1	1
c	2	4	2	6	4	8	6	8
d	3	7	1	9	1	9	3	7
e	5	5	5	5	5	5	5	5
f	7	3	9	1	9	1	7	3
g	8	6	8	4	6	2	4	2
h	1	1	3	3	7	7	9	9
i	6	8	4	8	2	6	2	4

zu A 10.4:

((die Möglichkeiten sind auf der nächsten Buchseite ausgeführt))

zu A 10.5:



Da es im Prinzip nur einen Typ von magischen 3x3-Quadraten gibt, sehen natürlich auch die Grafiken gleich aus – bis auf Spiegelung bzw. Drehung.

zu A 10.6:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

→

6	1	8
7	5	3
2	9	4

zu A 10.7:

Wie im Text hergeleitet wurde, muss e = 5 sein. Da die magische Zahl gleich 15 ist, gilt für die Elemente a und i: a = 5 – n und i = 5 + n (oder umgekehrt – Lucas beschränkt sich auf die erste Möglichkeit). Entsprechend gelten die Beziehungen für die Elemente c und g: c = 5 – m und g = 5 + m. Hieraus ergeben sich jeweils in den Zeilen und Spalten die übrigen Terme für die Elemente b, d, f und h.

zu A 10.8:

((selbst für die o. a. Typen überprüfen oder nach der Methode von Lucas nachrechnen:

Demnach müsste gelten: 5 + (m + n) + 5 + (m – n) + 5 + m = 15 ⇔ 15 + 3m = 15 und

5 – (m + n) + 5 – (m + n) + 5 – m = 15 ⇔ 15 – 3m = 15, also m = 0

(im Widerspruch zu den Rahmenbedingungen für m).

zu **A 10.9:**

Die magische Zahl ist 177, denn 5 + 17 + 29 + 47 + 59 + 71 + 89 + 101 + 113 = 531 = 3 · 177 = 9 · 59.

Wegen 177 = 3 · 59 ist der mittlere Summand 59 also gleich dem Element e.

Für die Partnerzahlen (x ; y) einer Diagonale und einer mittleren Zeile bzw. einer mittleren Spalte muss also gelten x + y = 118. Dies ist der Fall für die Kombinationen 5 + 113 = 17 + 101 = 29 + 89 = 47 + 71.

Damit weiß man schon mal, welche Zahlen einander gegenüberstehen müssen.

Für die erste und dritte Zeile bzw. Spalte müssen dann noch Zahlentripel (x ; y ; z) gesucht werden, für die gilt x + y + z = 177.

Hier findet man die Kombinationen:

177 = 47 + 113 + 17 (vierte, neunte und zweite Zahl) = 101 + 5 + 71 (achte, erste und sechste Zahl)

= 47 + 29 + 101 (vierte, dritte und achte Zahl) = 17 + 89 + 71 (zweite, siebte und sechste Zahl).

((Warum wohl habe ich die Klammerbemerkungen hinzugefügt?))

Hieraus ergibt sich das folgende magische Quadrat (und durch Drehung und Spiegelung sieben weitere Varianten):

47	113	17
29	59	89
101	5	71

Hinweis: Die neun Primzahlen 5, 17, 29, 47, 59, 71, 89, 101 und 113 haben eine besondere Lage zueinander – sie lassen sich nämlich wie folgt darstellen:

5 + 0 · 12 + 0 · 42, 5 + 1 · 12 + 0 · 42, 5 + 2 · 12 + 0 · 42,

5 + 0 · 12 + 1 · 42, 5 + 1 · 12 + 1 · 42, 5 + 2 · 12 + 1 · 42,

5 + 0 · 12 + 2 · 42, 5 + 1 · 12 + 2 · 42, 5 + 2 · 12 + 2 · 42.

zu A 10.10:

Bestimmung der magischen Zahl: $1^2 + 2^2 + \ldots + 9^2 = 285$

Wenn es ein magisches Quadrat mit Quadraten gäbe, müssten alle Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen gleich 95 sein.

Es fällt auf, dass diese Zahl nicht durch 3 teilbar ist. (Beim gewöhnlichen magischen 3x3-Quadrat und in A 10.9 hatte man auf diese Weise das mittlre Elemente e bestimmen können.)

Sucht man beispielsweise zum größten Summanden 81 zwei weitere Quadratzahlen, sodass diese drei Zahlen zusammen 95 ergeben, so wird man keine finden: 14 ist nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellbar. Entsprechendes gilt auch für die nächstkleinere Quadratzahl 64: Es gibt keine zwei Quadratzahlen, deren Summe 31 ist usw.

Es ist also nicht möglich, aus den ersten neun Quadratzahlen ein magisches 3x3-Quadrat herzustellen.

zu A 10.11:

Bestimmung der magischen Zahl: $2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^9 = 2^{1+2+\ldots+9} = 2^{45}$

Die magische Zahl ergibt sich hieraus durch Ziehen der dritten Wurzel: $2^{15} = 32768$. Das mittlere Element erhält man, indem man hieraus noch einmal die dritte Wurzel zieht: $2^5 = 32$.

Die neun Potenzen können analog zum Lo-Shu-Quadrat angeordnet werden (oder wie bei einem der gespiegelten/gedrehten Typen):

$2^4 = 16$	$2^9 = 512$	$2^2 = 4$
$2^3 = 8$	$2^5 = 32$	$2^7 = 128$
$2^8 = 256$	$2^1 = 2$	$2^6 = 64$

zu A 10.12:

Die im Teilerdiagramm enthaltenen Zahlen lassen sich wie folgt darstellen:

$1, 2^1, 2^2, 3^1, 2^1 \cdot 3^1, 2^2 \cdot 3^1, 3^2, 2^1 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3^2$. Das Produkt dieser 9 Zahlen ist $2^9 \cdot 3^9$, die dritte Wurzel hieraus ist gleich $2^3 \cdot 3^3 = 216$. Das mittlere Element erhält man hieraus, indem man noch einmal die dritte Wurzel zieht: $2 \cdot 3 = 6$.

Auch hier kann man sich wieder am Lo-Shu-Quadrat orientieren und entsprechend die Elemente auswählen.

In jeder Zeile, Spalte und Diagonale ergibt sich als Produkt $2^3 \cdot 3^3$.

$3 = 3^1$	$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$2 = 2^1$
$4 = 2^2$	$6 = 2^1 \cdot 3^1$	$3 = 3^2$
$18 = 2^1 \cdot 3^2$	1	$12 = 2^2 \cdot 3^1$

zu A 10.13:

$3 + 11 + 12 + 4 = 30 \neq 34$; $2 + 8 + 9 + 15 = 34$; $5 + 6 + 14 + 13 = 38 \neq 34$

zu A 10.14:

$17 = 16 + 1 = 3 + 14 = 2 + 15 = 13 + 4 = 5 + 12 = 10 + 7 = 11 + 6 = 8 + 9$

zu A 10.15:

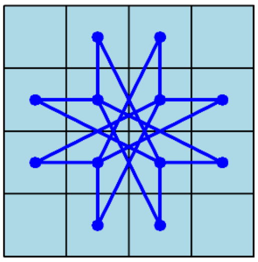
Wegen der Eigenschaft der Symmetrie (vgl. A 10.14) können zwei beliebige Felder und deren Symmetrie-Partner ausgewählt und zu einem 4-Tupel zusammengefasst werden. Dies ist bei den ersten 15 Abbildungen der Fall.

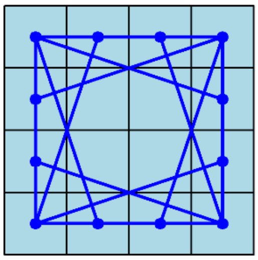
In Abb. 16 ergeben die vier Zahlen in den Eckfeldern von 3x3-Quadraten jeweils die Summe 34. Dies gilt auch für die schräg eingezeichneten Quadrate in Abb. 21.

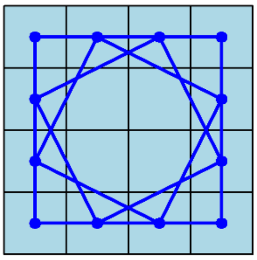
Zu Abb. 17 und 18 gibt es bemerkenswerterweise keine Analogie im Querformat.

Abb. 19 und 20 verdeutlichen, warum dies kein pandiagonales Quadrat ist.

zu A 10.16:







In der ersten Abbildung sind die zusammengehörigen Felder, die jeweils eine Raute bilden, miteinander verbunden (gelbe und grüne Felder in Abb. 4 und 5 in A 10.15):

5 + 10 + 7 + 12 = 9 + 6 + 11 + 8 = 3 + 10 + 7 + 14 = 6 + 15 + 2 + 11

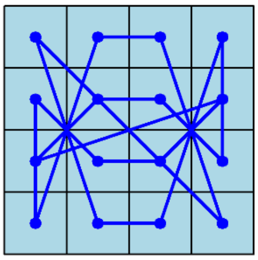
In der zweiten Abbildung sind die zusammengehörigen Felder, die jeweils eine Raute bilden, miteinander verbunden (golden und rosa Felder in Abb. 9 und 10 in A 10.15), außerdem das äußere Quadrat (aus Abb. 2 in A 10.15):

16 + 8 + 1 + 9 = 5 + 4 + 13 + 12 = 16 + 2 + 15 + 1 = 3 + 13 + 4 + 14 = 16 + 13 + 1 + 4

In der dritten Abbildung sind die zusammengehörigen Felder, die jeweils ein gedrehtes Quadrat bilden, miteinander verbunden (gelbe und grüne Felder in Abb. 21 in A 10.15), außerdem das äußere Quadrat (aus Abb. 2 in A 10.15):

3 + 8 + 14 + 9 = 2 + 12 + 15 + 5 = 16 + 13 + 1 + 4

zu A 10.17:



zu A 10.18:

Spiegelung an der horizontalen bzw. vertikalen Mittellinie:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

13	2	3	16
8	11	10	5
12	7	6	9
1	14	15	4

Spiegelung an den Diagonalen

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

16	5	9	4
3	10	6	15
2	11	7	14
13	8	12	1

1	12	8	13
14	7	11	2
15	6	10	3
4	9	5	16

Drehung um 90° (im Uhrzeigersinn)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

4	8	5	16
15	6	10	3
14	7	11	2
1	12	8	13

1	14	15	4
12	7	6	8
8	11	10	5
13	2	3	16

13	8	12	1
2	11	7	14
3	10	6	15
16	5	8	4

zu A 10.19:

Nur die Zahlen 5, 8, 9 und 12 behalten ihre Position. Die symmetrisch angeordneten Zahlen 1 und 16 sowie 4 und 13 tauschen ihre Position, weiter auch die symmetrisch zu einer Mittelparallele liegenden Felder 2 und 3, 6 und 10, 7 und 11, 14 und 15.

zu A 10.20:

Grafik links: Nur die Zahlen 13 und 8 sowie die hierzu am Quadratmittelpunkt gespiegelten Zahlen 9 und 4 behalten ihre Position. Jeweils drei übereinanderstehende Zahlenpaare tauschen zyklisch ihre Plätze:

(12 ; 1) → (3 ; 10) → (2 ; 11) → (12 ; 1); (16 ; 5) → (7 ; 14) → (6 ; 15) → (16 ; 5)

Grafik rechts: Dieses magische Quadrat geht durch Spiegelung an der horizontalen Quadratmittellinie hervor.

zu A 10.21:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

10	5	15	4
3	16	6	9
8	11	1	14
13	2	12	7

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	11
1	15	14	4

zu A 10.22:

((pandiagonal: selbst nachrechnen))

Beispiele von weiteren Kombinationen von Feldern mit Summe 34:

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

zu A 10.23:

Wenn man bei dem gegebenen Quadrat Spalten (Reihenfolge 3, 1, 4, 2) und Zeilen (Reihenfolge 1, 4, 2, 3) vertauscht, dann bleibt der Effekt erhalten, dass die Summe der vier übrig bleibenden Zahlen gleich 34 ist; aber man erkennt auch, wie die Tabelle entstanden ist: Es handelt sich um eine einfache Additionstabelle mit den am Rand stehenden Ausgangszahlen. Die Summe dieser am Rand stehenden Zahlen ist 34. Wenn man im vorgelegten Quadrat in jeder Zeile und Spalte nur eine Zahl stehen lässt, dann kommen bei diesen vier Zahlen alle Randzahlen genau einmal als Summand vor; da die Randzahlen zusammen 34 ergeben, ergibt sich also auch bei diesem Quadrat mit „magischen“ Eigenschaften immer die Summe 34.

Durch das anschließende Vertauschen von Spalten und Zeilen verschleiert man die Art und Weise, wie das Quadrat konstruiert wurde.

+	**0**	**2**	**8**	**10**
1	1	3	9	11
2	2	4	10	12
5	5	7	13	15
6	6	8	14	16

Man hätte beispielsweise auch mit der folgenden Tabelle anfangen können (links) und nach Vertauschen von Zeilen und Spalten die Tabelle rechts als „Rätsel“ vorlegen können.

+	**0**	**4**	**8**	**12**
1	1	5	9	13
2	2	6	10	14
3	3	7	11	15
4	4	8	12	16

16	**4**	**12**	**8**
14	**2**	**10**	**6**
13	**1**	**9**	**5**
15	**3**	**11**	**7**

zu A 10.24:

Konstruktion eines magischen 7x7--Quadrats nach Bachet de Méziriac

						1						
					8		**2**					
				15		**9**		**3**				
			22		**16**		**10**		**4**			
		29		**23**		**17**		**11**		**5**		
	36		**30**		**24**		**18**		**12**		**6**	
43		**37**		**31**		**25**		**19**		**13**		**7**
	44		**38**		**32**		**26**		**20**		**14**	
		45		**39**		**33**		**27**		**21**		
			46		**40**		**34**		**28**			
				47		**41**		**35**				
					48		**42**					
						49						

22	**47**	**16**	**41**	**10**	**35**	**4**
5	**23**	**48**	**17**	**42**	**11**	**29**
30	**6**	**24**	**49**	**18**	**36**	**12**
13	**31**	**7**	**25**	**43**	**19**	**37**
38	**14**	**32**	**1**	**26**	**44**	**20**
21	**39**	**8**	**33**	**2**	**27**	**45**
46	**15**	**40**	**9**	**34**	**3**	**28**

Konstruktion eines magischen 7x7-Quadrats nach der Loubère-Methode

30	**39**	**48**	**1**	**10**	**19**	**28**
38	**47**	**7**	**9**	**18**	**27**	**29**
46	**6**	**8**	**17**	**26**	**35**	**37**
5	**14**	**16**	**25**	**34**	**36**	**45**
13	**15**	**24**	**33**	**42**	**44**	**4**
21	**23**	**32**	**41**	**43**	**3**	**12**
22	**31**	**40**	**49**	**2**	**11**	**20**

zu A 10.25:

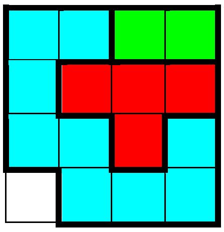
15	2	19	6	23
22	14	1	18	10
9	21	13	5	17
16	8	25	12	4
3	20	7	24	11

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

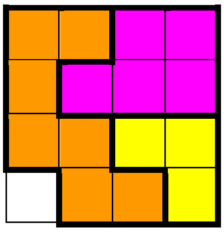
zu A 10.26:

Ordnet man die verschiedenen Puzzleteile in der Art des Lo-Shu-Quadrats an, dann ergibt sich für die

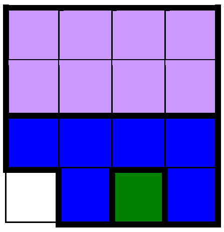
1. Zeile (4 + 9 + 2)



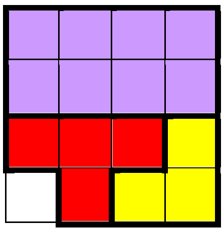
2. Zeile (3 + 5 + 7)



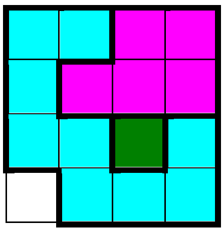
3. Zeile (8 + 1 + 6)



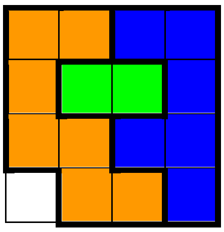
1. Spalte (4 + 3 + 8)



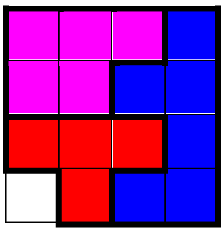
2. Spalte (9 + 5 + 1)



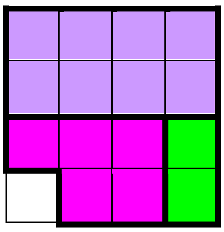
3. Spalte (2 + 7 + 6)



1. Diagonale (4 + 5 + 6)



2. Diagonale (8 + 5 + 2)

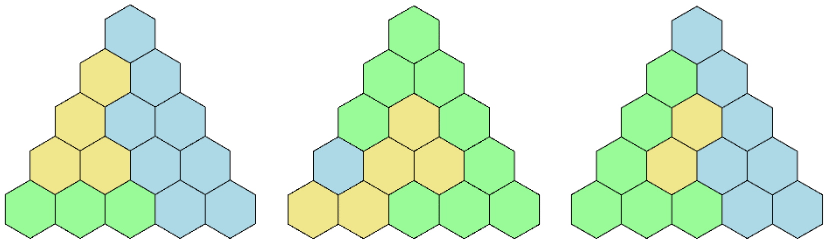


zu A 10.27:

Die erste Abbildung steht für die erste Zeile des Lo-Shu-Quadrats (4 + 9 + 2), die zweite Abbildung für die zweite Zeile (3 + 5 + 7), die dritte Abbildung für die dritte Zeile (8 + 1 + 6).

Entsprechend kann man die Puzzlestücke auch benutzen, um die Spalten darzustellen (eigentlich müsste man für die Puzzlestücke neun verschiedene Fraben wählen):

1. Spalte (4 + 3 + 8)   2. Spalte (9 + 5 + 1)   3. Spalte (2 + 7 + 6)



Entsprechend können auch die den Diagonalen zugeordneten Puzzlestücke zu einem Dreieck zusammengelegt werden.

zu A 10.28:

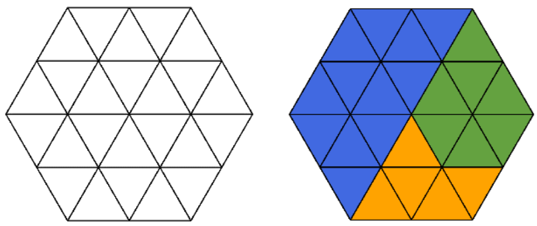
verallgemeinertes Schema von Lucas

8 – n	8 + (m + n)	8 – m
8 – (m – n)	8	8 + (m – n)
8 + m	8 – (m + n)	8 + n

Beispiel

7	13	4
5	8	11
12	3	9

Die abgebildeten Puzzles ergänzen sich jeweils zu einem regelmäßigen Sechseck, das aus 24 gleichseitigen Dreiecken besteht, vgl. Abb. links; die zweite Abbildung zeigt als Beispiel die zur ersten Spalte des magischen Quadrats gehörende Figur (7 + 5 + 12).



zu A 10.29:

		4		
	2	5	8	
9	x	6	x	3

		4		
	2	8	5	
9	x	3	x	6

		4		
	5	2	8	
6	x	9	x	3

		4		
	5	8	2	
6	x	3	x	9

		4		
	8	5	2	
3	x	6	x	9

		4		
	8	2	5	
3	x	9	x	6

		2		
	4	5	6	
9	x	8	x	7

		2		
	4	6	5	
9	x	7	x	8

		2		
	5	4	6	
8	x	9	x	7

		2		
	5	6	4	
8	x	7	x	9

		2		
	6	4	5	
7	x	9	x	8

		2		
	6	5	4	
7	x	8	x	9

zu A 10.30:

Diese Beispiele findet man in der folgenden Anregung!

zu A 10.31:

Im Folgenden sind systematisch alle Möglichkeiten notiert – beginnend mit dem Wert 1 in der 1. Zelle der 2. Reihe. Wie in A 10.29 gehören jeweils 6 Figuren zusammen, da sie durch Vertauschen auseinander hervorgegangen sind.

Es gibt also vier verschiedene Typen, bei denen 5 an der Spitze steht.

a		5		
	1	6	8	
9	x	4	x	2

a		5		
	1	8	6	
9	x	2	x	4

b		5		
	2	4	9	
8	x	6	x	1

c		5		
	2	6	7	
8	x	4	x	3

c		5		
	2	7	6	
8	x	3	x	4

b		5		
	2	9	4	
8	x	1	x	6

d		5		
	3	4	8	
7	x	6	x	2

d		5		
	3	8	4	
7	x	2	x	6

b		5		
	4	2	9	
6	x	8	x	1

d		5		
	4	3	8	
6	x	7	x	2

d		5		
	4	8	3	
6	x	2	x	7

b		5		
	4	9	2	
6	x	1	x	8

a

		5		
	6	1	8	
4	x	9	x	2

c

		5		
	6	2	7	
4	x	8	x	3

c

		5		
	6	7	2	
4	x	3	x	8

a

		5		
	6	8	1	
4	x	2	x	9

c

		5		
	7	2	6	
3	x	8	x	4

c

		5		
	7	6	2	
3	x	4	x	9

a

		5		
	8	1	6	
2	x	9	x	4

d

		5		
	8	3	4	
2	x	7	x	6

d

		5		
	8	4	3	
2	x	6	x	7

a

		5		
	8	6	1	
2	x	4	x	9

b

		5		
	9	2	4	
1	x	8	x	6

b

		5		
	9	4	2	
1	x	6	x	8

zu A 10.32:

Beachtet werden muss, dass die beiden Strecken, also Strecke b, auf der 1, aber nicht 10 liegt, und Strecke c, auf der 10, aber nicht 1 liegt, sich noch einmal schneiden

Kombinationsmöglichkeiten zur magischen Zahl 22:

Strecke a mit 1 und 10	Strecke c mit 10, aber ohne 1	x = Schnittstelle von b und c	Strecke b mit 1, aber ohne 10	weder auf a, b, c
1 + 10 + 2 + 9	10 + 3 + 4 + 5	x = 5 [4 ; 3]	1 + 5 + 7 + 8 = 21 ! [bei kleinerem x erst recht]	6
1 + 10 + 3 + 8	10 + 2 + 4 + 6	x = 6 [4 ; 2]	1 + 6 + 5 + 9 = 21 ! [bei kleinerem x erst recht]	7
1 + 10 + 4 + 7	keine Kombination möglich			
1 + 10 + 5 + 6	10 + 2 + 3 + 7	x = 7 [2 ; 3]	1 + 7 + 4 + 9 = 21 ! [bei kleinerem x erst recht]	8

zu A 10.33:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 = 60, der Mittelwert beträgt 6; auf einer Strecke mit 4 Zahlen ergibt sich dann die magische Zahl 24.

zu A 10.34:

Heptagramm: Summe der Zahlen: $1+2+3+...+12+13+14=105$; Summe der Zahlen auf jeder der 7 Strecken: $\frac{1}{7}\cdot 2\cdot 105=30$

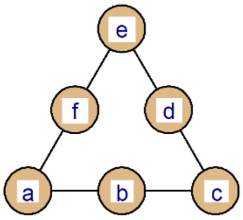
Oktagramm: Summe der Zahlen: $1+2+3+...+14+15+16=136$; Summe der Zahlen auf jeder der 8 Strecken: $\frac{1}{8}\cdot 2\cdot 136=34$

zu A 10.35:

Eine Übersicht über alle möglichen magischen Sterne findet man beispielsweise auf

http://www.magic-squares.net/magic_stars_index.htm#Introduction

zu A 10.36:



Bezeichnet man die Felder wie in der Abbildung dargestellt, dann muss für die voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, d, e, f $\in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6} gelten: a + b + c = c + d + e = e + f + a

Man muss also drei verschiedene Summendarstellungen derselben Zahl finden. Aus der folgenden Tabelle aller 20 Kombinationen von drei Summanden wird deutlich, dass hierfür nur die Summen 9, 10, 11 und 12 in Frage kommen:

1 + 2 + 3 = 6		
1 + 2 + 4 = 7		
1 + 2 + 5 = 8	1 + 3 + 4 = 8	
1 + 2 + 6 = 9	1 + 3 + 5 = 9	2 + 3 + 4 = 9
1 + 3 + 6 = 10	1 + 4 + 5 = 10	2 + 3 + 5 = 10
1 + 4 + 6 = 11	2 + 3 + 6 = 11	2 + 4 + 5 = 11
1 + 5 + 6 = 12	2 + 4 + 6 = 12	3 + 4 + 5 = 12
2 + 5 + 6 = 13	3 + 4 + 6 = 13	
3 + 5 + 6 = 14		
4 + 5 + 6 = 15		

Aus den gemeinsamen Summanden von je zwei Gleichungen ergibt sich, welche Zahlen in den Eckfeldern stehen müssen. (Man kann alternativ auch überlegen, welche der Summanden nur einmal vorkommen – diese Zahlen müssen in der Seitenmitte stehen.)

Summe 9: Eckfelder a = 1, c = 2, e = 3; hieraus folgt: b = 6; d = 4 ; f = 5 ;

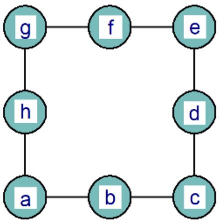
Summe 10: Eckfelder a = 1, c = 3, e = 5; hieraus folgt: b = 6; d = 2 ; f = 4 ;

Summe 11: Eckfelder a = 2, c = 4, e = 6; hieraus folgt: b = 5; d = 1 ; f = 3 ;

Summe 12: Eckfelder a = 4, c = 5, e = 6; hieraus folgt: b = 3; d = 1 ; f = 2.

Aus den Summen der mittleren Felder ergeben sich die Werte 15, 12, 9 und 6, die nicht mit den Summen der Seiten übereinstimmen.

- **Quadratform**



Bezeichnet man die Felder wie in der Abbildung dargestellt, dann muss für die voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, … , g, h, ∈ {1, 2, 3, …, 8} gelten: a + b + c = c + d + e = e + f + g = g + h + a.

Man muss also (mindestens) vier verschiedene Summendarstellungen derselben Zahl finden. Aus der folgenden Tabelle aller 56 Kombinationen von drei Summanden wird deutlich, dass hierfür alle Summen zwischen 10 und 17 in Frage kommen:

1 + 2 + 3 = 6					
1 + 2 + 4 = 7					
1 + 2 + 5 = 8	1 + 3 + 4 = 8				
1 + 2 + 6 = 9	1 + 3 + 5 = 9	2 + 3 + 4 = 9			
1 + 2 + 7 = 10	1 + 3 + 6 = 10	1 + 4 + 5 = 10	2 + 3 + 5 = 10		
1 + 2 + 8 = 11	1 + 3 + 7 = 11	1 + 4 + 6 = 11	2 + 3 + 6 = 11	2 + 4 + 5 = 11	
1 + 3 + 8 = 12	1 + 4 + 7 = 12	1 + 5 + 6 = 12	2 + 3 + 7 = 12	2 + 4 + 6 = 12	3 + 4 + 5 = 12
1 + 4 + 8 = 13	1 + 5 + 7 = 13	2 + 3 + 8 = 13	2 + 4 + 7 = 13	2 + 5 + 6 = 13	3 + 4 + 6 = 13
1 + 5 + 8 = 14	1 + 6 + 7 = 14	2 + 4 + 8 = 14	2 + 5 + 7 = 14	3 + 4 + 7 = 14	3 + 5 + 6 = 14
1 + 6 + 8 = 15	2 + 5 + 8 = 15	2 + 6 + 7 = 15	3 + 4 + 8 = 15	3 + 5 + 7 = 15	4 + 5 + 6 = 15
1 + 7 + 8 = 16	2 + 6 + 8 = 16	3 + 5 + 8 = 16	3 + 6 + 7 = 16	4 + 5 + 7 = 16	
2 + 7 + 8 = 17	3 + 6 + 8 = 17	4 + 5 + 8 = 17	4 + 6 + 7 = 17		
3 + 7 + 8 = 18	4 + 6 + 8 = 18	5 + 6 + 7 = 18			
4 + 7 + 8 = 19	5 + 6 + 8 = 19				
5 + 7 + 8 = 20					
6 + 7 + 8 = 21					

Am einfachsten ist es, wenn man überprüft, welche Summanden nur einmal vorkommen – diese Zahlen müssen jeweils in einer Seitenmitte stehen.

Summe 10: Man stellt fest, dass die Zahlen 4, 6 und 7 nur einmal als Summanden vorkommen; hieraus ergibt sich, dass die Zahlen 1 und 5, 1 und 3 bzw. 1 und 2 Eckzahlen sind. Die Zahl 1 würde dreimal als Ecke benötigt – was nicht geht! (entsprechende Probleme gibt es bei der Summe 17)

Summe 11: Man stellt fest, dass die Zahlen 5, 7 und 8 nur einmal als Summanden vorkommen; hieraus ergibt sich, dass die Zahlen 2 und 4, 1 und 3 bzw. 1 und 2 Eckzahlen sind. Wenn man aber die Zahl 1 in einer Ecke einträgt und die Zahlen 2 und 3 in den Nachbarecken, dann muss 4 in die vierte Ecke eingetragen werden. Um aber dann auf die Summe 11 zu kommen, müsste in der Mitte zwischen 3 und 4 die Zahl 4 eingetragen werden – was nicht geht! (entsprechende Probleme gibt es bei der Summe 16)

Summe 12: Nur die Zahl 8 kommt einmal als Summand vor. Man kann also mit a = 1, b = 8 und c = 3 beginnen. Durch systematisches Probieren findet man heraus, dass d = 7, e = 2, f = 4, g = 6 und h = 5.

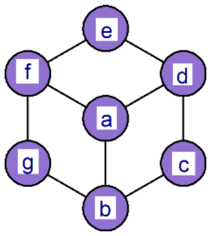
Die Summe der Zahlen in den vier Ecken ist: a + c + e + g = 1 + 3 + 2 + 6 = 12. Für das Mittenviereck gilt allerdings: b + d + f + g = 8 + 7 + 4 + 6 = 25 > 12.

Analog findet man bei Summe 15: a = 6, b = 1, c = 8, d = 4, e = 3, f = 5, g = 7 und h = 2. Die Summe der Zahlen in den vier Ecken ist: a + c + e + g = 6 + 8 + 3 + 7 = 24. Für das Mittendreieck gilt: b + d + f + g = 1 + 4 + 5 + 7 = 17 < 24.

Summe 13: Durch systematisches Probieren findet man: a = 1, b = 7, c = 5, d = 2, e = 6, f = 3, g = 4 und h = 8. Die Summe der Zahlen in den vier Ecken ist: a + c + e + g = 1 + 5 + 6 + 4 = 16. Diese Summe ergibt sich auch für das Mittendreieck: b + d + f + g = 7 + 2 + 3 + 4 = 16.

Analog findet man bei Summe 14: a = 8, b = 2, c = 4, d = 7, e = 3, f = 6, g = 5 und h = 1 (es handelt sich hierbei um die Werte, die man erhält, wenn man die Werte bei Summe 13 von 9 subtrahiert). Die Summe der Zahlen in den vier Ecken ist: a + c + e + g = 8 + 4 + 3 + 5 = 20. Diese Summe ergibt sich auch für das Mittendreieck: b + d + f + g = 2 + 7 + 6 + 5 = 20.

zu A 10.37:



Für die 7 Zahlen a, b, c, …, g muss gelten: a + b + c + d = a + d + e + f = a + f + g + b

Aus dem Vergleich des ersten mit dem zweiten Term folgt: (1) b + c = e + f.

Aus dem Vergleich des ersten mit dem dritten Term folgt: (2) c + d = f + g.

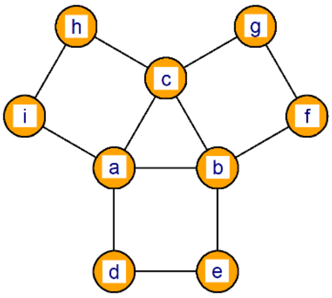
Aus dem Vergleich des zweiten mit dem dritten Term folgt: d + e = g + b. Diese Gleichung braucht man nicht zu beachten, da sie aus den beiden Gleichungen (1) und (2) hergeleitet werden kann.

Durch (systematisches) Probieren findet man die in der Tabelle links stehenden Lösungen. In der Tabelle rechts ist angedeutet, wie man die noch fehlenden Lösungen (durch Vertauschen der Paare) ermitteln kann.

Beispielsweise kann man links mit den Paaren (b ; c) und (e ; f) mit gleichen Summen beginnen (vgl. (1)), und ergänzt dann geeignete Werte von d und g, sodass (2) erfüllt ist. Am Ende ergänzt man die noch nicht verwendete Zahl für a.)

a	b	c	d	e	f	g	∑		a	b	c	d	e	f	g	∑
7	1	4	5	2	3	6	17		6	4	1	7	2	3	5	18
3	1	5	6	2	4	7	15		6	1	4	7	3	2	5	18
7	1	6	3	2	5	4	17		7	4	1	6	3	2	5	18
2	1	6	5	3	4	7	14									
1	2	5	6	3	4	7	14									
5	1	7	3	2	6	4	16									
6	1	7	2	3	5	4	16									
2	1	7	4	3	5	6	14									
7	6	2	4	3	5	1	19									
1	6	2	7	3	5	4	16									
1	2	7	4	3	6	5	14									
6	2	7	1	4	5	3	16									
7	3	6	1	4	5	2	17									
5	3	7	1	4	6	2	16									
3	4	7	1	5	6	2	15									
1	4	7	2	5	6	3	14									

(b)



Aus der Aufgabenstellung ergeben sich folgende Gleichungen:

$a + b + d + e = b + c + f + g = c + a + h + i$

Hieraus ergeben sich die Beziehungen

$a + d + e = c + f + g$; $b + f + g = a + h + i$; $c + h + i = b + d + e$

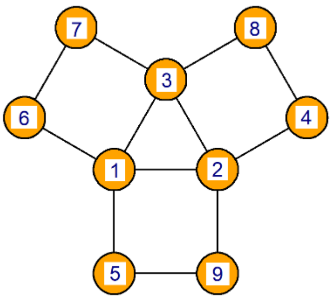
In die 9 Felder sollen die Zahlen 1, 2, 3, …, 9 eingetragen werden; deren Summe ist 45. Wenn man die Summen der Zahlen aus den drei Quadraten bildet, ist zu berücksichtigen, dass die drei Zahlen a, b, c doppelt vorkommen.

Für die Summe $2 \cdot (a + b + c) + (d + e + f + g + h + i)$ kommt nur eine durch 3 teilbare Zahl in Frage. Da a, b, c zusammen mindestens 6 ergeben, ist diese Bedingung beispielsweise erfüllt für $a = 1$, $b = 2$ und $c = 3$.

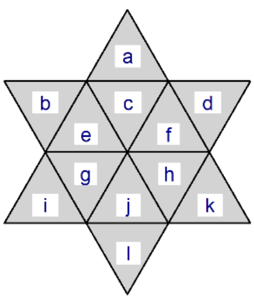
Die folgende Abbildung zeigt eine mögliche Lösung; die beiden außen stehenden Felder können natürlich auch vertauscht werden. Diese Lösung wurde wie folgt gefunden: Wenn die drei inneren Felder mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 besetzt werden, bleiben für die Beschriftung der äußeren Felder die Zahlen 4, 5, 6, 7, 8, 9. Damit die Summen für die einzelnen Quadrate jeweils 17 ergeben (45 + (1 + 2 + 3) = 51), müssen diese sechs Zahlen so kombiniert werden, dass sie zusammen mit den inneren drei Zahlen jeweils 17 ergeben, also

$1 + 2 + x_1 + y_1 = 17 \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 14$; $2 + 3 + x_2 + y_2 = 17 \Leftrightarrow x_2 + y_2 = 12$; $3 + 1 + x_3 + y_3 = 17 \Leftrightarrow x_3 + y_3 = 13$

Es zeigt sich, dass folgende Kombinationen möglich sind : 5 + 9 = 14 ; 4 + 8 = 12 ; 6 + 7 = 13, vgl. Abbildung, aber auch 6 + 8 = 14, 5 + 7 = 12, 4 + 9 = 13.



zu A 10.38:



Die Summe der ersten 12 natürlichen Zahlen ist 78.

Damit die geforderte Eigenschaft gilt, muss die folgende Gleichung erfüllt sein:

a + c + e + g + i = d + f + h + j + l = a + c + f + h + k = b + e + g + j + l = b + e + c + f + d = i + g + j + h + k

In diesen Beziehungen kommen die außen liegenden Felder zweimal vor, die inneren dreimal.

Unter

- http://mathworld.wolfram.com/MagicHexagram.html

findet man die folgenden beiden Abbildungen sowie den Hinweis auf die Entdecker:

- Bolt, B.; Eggleton, R.; and Gilks, J. "The Magic Hexagram." *Math. Gaz.* **75**, 141-142, 1991.

Die beiden Lösungen haben die magische Summe 33 bzw. 32; man erhält die rechts abgebildete Lösung aus der links stehenden durch Subtraktion der Zahlen von 13.