Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 9.1:

$u = 2\pi \cdot r$; $A = (\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2) + (2r^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2) = 2r^2$

Der Umfang der Figur ist wie der eines Kreises; die unten und die oben liegenden Flächenstücke lassen sich zu einem Rechteck der Breite 2r und der Höhe r zusammenlegen.

zu A 9.2:

a.

Die Figuren setzen sich aus vier Quadraten zusammen, die jeweils zwei außenliegende Seiten haben, an denen Viertelkreisbögen nach innen oder nach außen liegen. Hierfür gibt es $2^8 = 256$ Kombinationsmöglichkeiten.

Bezeichnet man die Viertelkreisbögen mit „1“ (nach außen) und mit „0“ (nach innen), dann lassen sich diese beiden Formen auf vier Arten kombinieren: 11, 10, 01, 00. Unter Verwendung dieser **Dualzahlen** kann man die Anzahl der Möglichkeiten für die vier Seiten eines Quadrats auch durch $4^4 = 256$ beschreiben.

b.

Von dieser großen Zahl an Möglichkeiten entfallen aber etliche, weil durch Drehen der Figuren die Typbezeichnungen zyklisch rotieren, beispielsweise

11|11|11|11 → 11|11|11|11

10|01|10|01 → 01|10|01|10 → 10|01|10|01

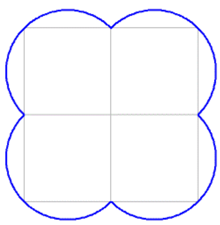
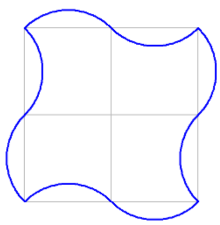
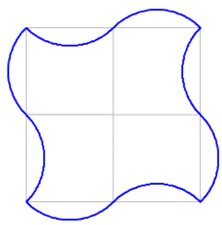
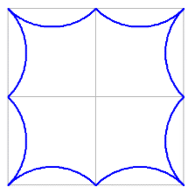
11|11|00|00 → 11|00|00|11 → 00|00|11|11 → 11|00|00|11

d. h., die Anzahl der tatsächlichen voneinander verschiedenen Figuren lässt sich nur durch weitere Untersuchungen herausfinden.

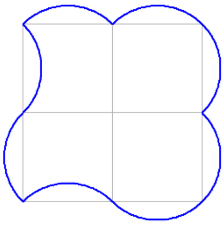
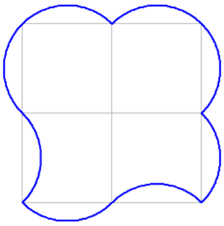
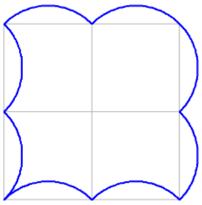
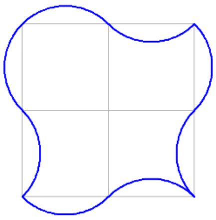
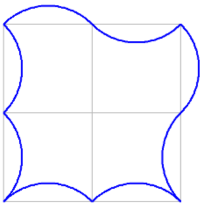
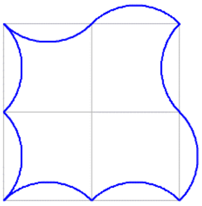
Hierzu werden im Folgenden einige Anregungen gegeben:

Zur Vereinfachung notieren wir anstelle der Dualzahlen jeweils zugehörige Zahlen im **Vierersystem**, also statt 11|11|11|11 die Zahl 3333, statt 10|10|10|10 die Zahl 2222 usw.

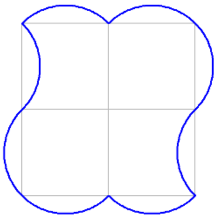
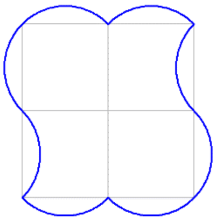
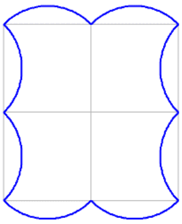
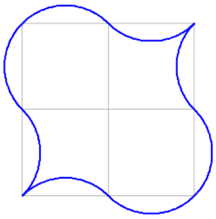
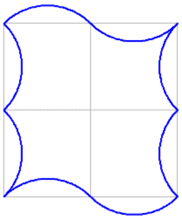
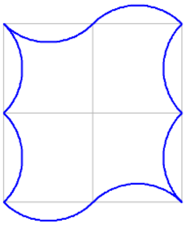
Die folgenden vier Figuren ändern sich nicht, wenn sie gedreht werden:

			
3333	2222	1111	0000

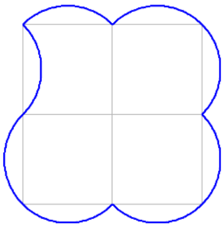
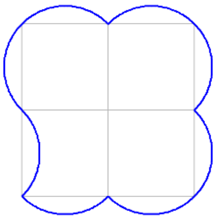
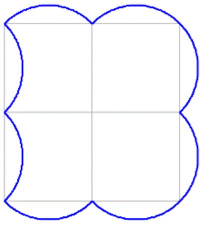
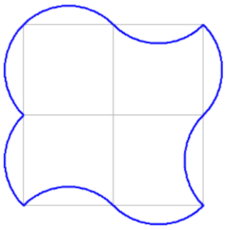
Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, die jeweils paarweise auftreten, existieren noch jeweils drei weitere, die sich durch Drehungen ergeben, z. B. 3322 → 3223 → 2233 → 2332. Insgesamt werden hiermit 4 · 6 = 24 Figuren erfasst.

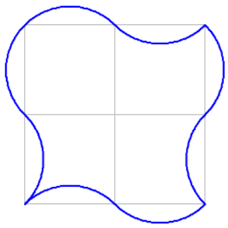
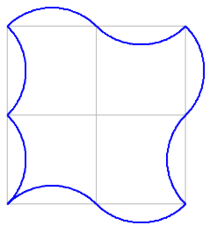
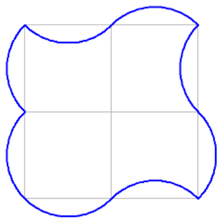
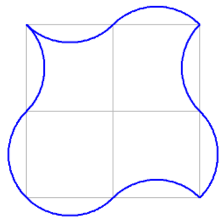
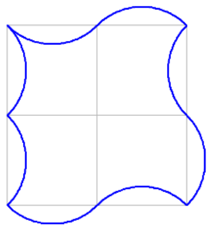
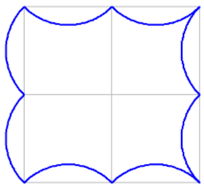
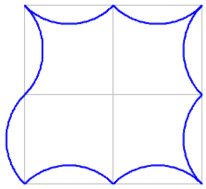
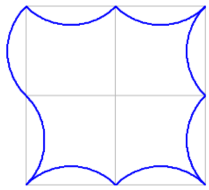
 3322	 3311	 3300	 2211
 2200	 1100		

Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, die abwechselnd aufeinander folgen, existiert nur noch jeweils eine weitere Figur, die sich durch eine Drehung ergibt, z. B. 3232 → 2323. Insgesamt werden hiermit 2 · 6 = 12 Figuren erfasst.

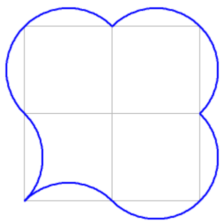
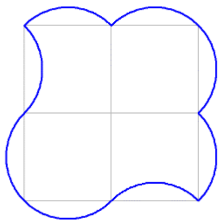
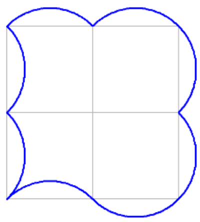
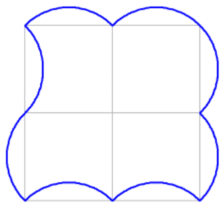
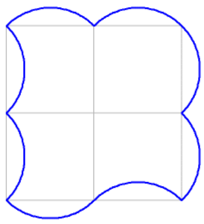
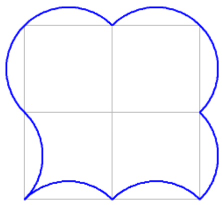
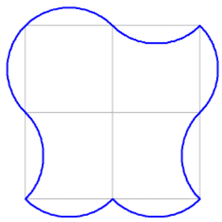
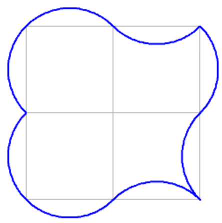
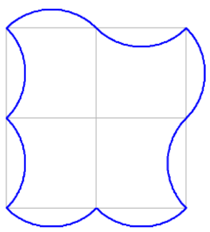
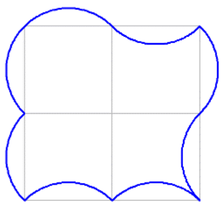
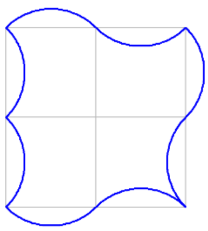
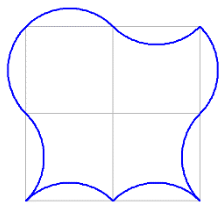
 3232	 3131	 3030	 2121
 2020	 1010		

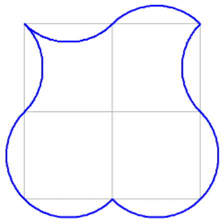
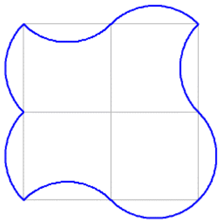
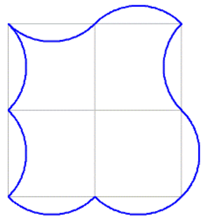
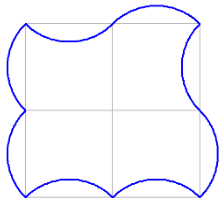
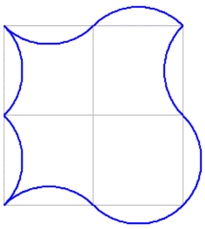
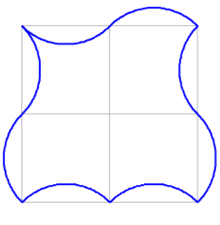
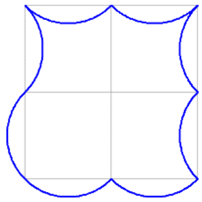
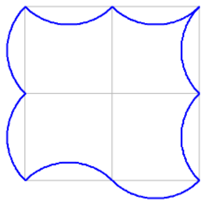
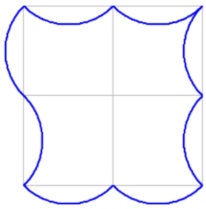
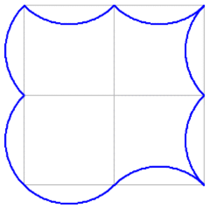
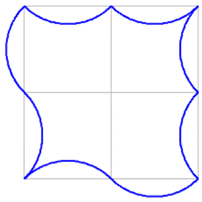
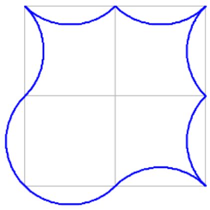
Zu den folgenden 12 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus zwei verschiedenen Ziffern besteht, wovon eine dreimal vorkommt, existieren jeweils drei weitere, die sich durch Drehungen ergeben, z. B. 3332 → 3323 → 3233 → 2333. Insgesamt werden hiermit 4 · 12 = 48 Figuren erfasst.

 3332	 3331	 3330	 2223

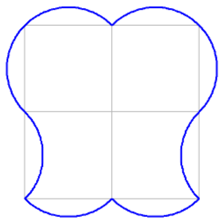
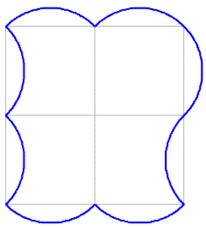
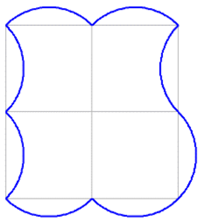
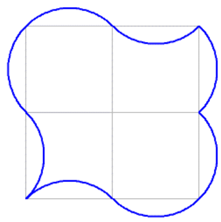
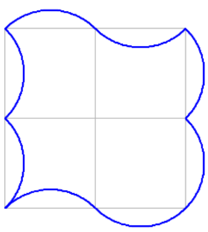
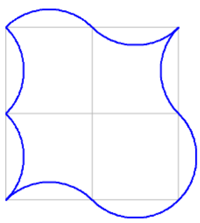
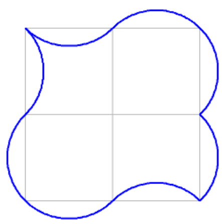
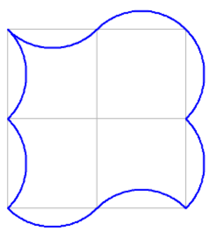
 2221	 2220	 1113	 1112
 1110	 0003	 0002	 0001

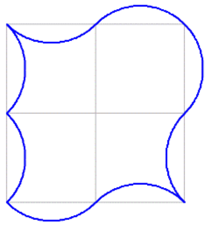
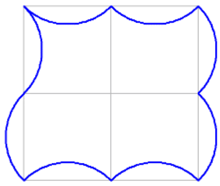
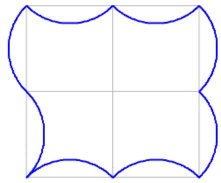
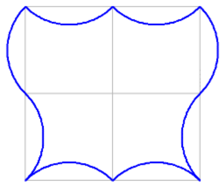
Zu den folgenden 12 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus drei verschiedenen Ziffern besteht, von denen zwei gleiche aufeinander folgen, existieren jeweils drei weitere, die sich durch Drehungen ergeben, z. B. 3321 → 3213 → 2133 → 1332. Insgesamt werden hiermit 4 · 24 = 96 Figuren erfasst.

 3321	 3312	 3320	 3302
 3310	 3301	 2231	 2213
 2230	 2203	 2210	 2201

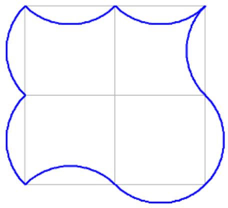
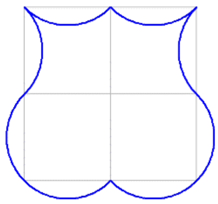
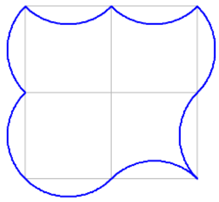
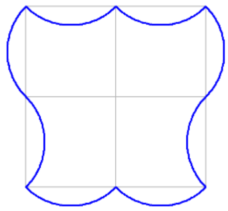
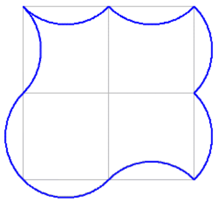
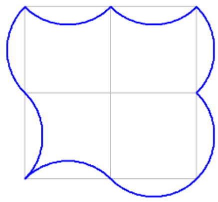
 1132	 1123	 1130	 1103
 1120	 1102	 0032	 0023
 0031	 0013	 0021	 0012

Zu den folgenden 9 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus drei verschiedenen Ziffern besteht, wovon die doppelt vorkommende Ziffer jeweils zwischen den anderen beiden liegt, existieren jeweils drei weitere, die sich durch Drehungen ergeben, z. B. 3231 → 2313 → 3132 → 1323. Insgesamt werden hiermit 4 · 12 = 48 Figuren erfasst.

 3231	 3230	 3130	 2321
 2320	 2120	 1312	 1310

 1210	 0302	 0301	 0201

Zu den folgenden 6 Figuren, deren Bezeichnung im Vierersystem aus vier verschiedenen Ziffern besteht, existieren jeweils drei weitere, die sich durch Drehungen ergeben, z. B. 0123 → 1230 → 2301 → 3012. Insgesamt werden hiermit 4 · 6 = 24 Figuren erfasst.

 0123	 0132	 0213	 0231
 0312	 0321		

Insgesamt sind mit den abgebildeten 70 Grafiken alle 4 + 24 + 12 + 48 + 96 + 48 + 24 = 256 möglichen Kombinationen erfasst.

Projektauftrag: Welche der 70 Figuren haben eine symmetrische Form? Welche Art der Symmetrie liegt dabei jeweils vor?

c. An eine Figur-Seite vom Typ 0 kann eine Seite vom Typ 3 angelegt werden, zu Typ 1 passt Typ 2 und umgekehrt.

zu A 9.3:

Dreht man die abgebildete Figur um 45° nach rechts (im Uhrzeigersinn), dann kann sie durch die (in A 9.2 verwendete) Bezeichnung 11|11|00|00 bzw. 3300 beschrieben werden. Sie ist also kombinierbar mit den Typen, in denen Seiten vom Typ 0 und 3 vorkommen.

zu A 9.4:

Verwendet man für die abgebildeten 3x3-Figuren die Bezeichnungen aus A 9.2, dann sind dies

010|101|010|101 101|101|101|101 001|100|001|100

Zu diesen passen entsprechende 3x3-Figuren mit ergänzenden Formen, beispielsweise kann man allein mit Figuren des ersten Typs die Ebene parkettieren, weil jeweils die um 90° gedrehte Figur an die vier Seiten passen. Zu der zweiten Figur benötigt man als Ergänzung in vertikaler und in horizontaler Richtung die Figur 010|010|010|010, sodass die beiden abwechelnd ausgelegt werden können. Entsprechend hat man mit der Figur 110|011|110|011 eine passende Ergänzung zur dritten Figur.

Projekt-Vorschlag: Herausfinden, welche 3x3-Figuren es gibt,

– die eine vertikale Symmetrieachse haben,

– die eine horizontale und eine vertikale Symmetrieachse haben,

– bei denen die Diagonalen Symmetrieachsen sind,

– die vier Symmetrieachsen haben.

Dabei kann analog zu A 9.3 eine Bezeichnung der Typen im Oktalsystem (Basis 8) vorgenommen werden.

zu A 9.5:

Die Figur setzt sich aus zwei verschiedenen 3x3-Quadrat-Figuren zusammen: oben und unten aus 110|011|110|011, rechts und links aus 110|011|001|100.

zu A 9.6:

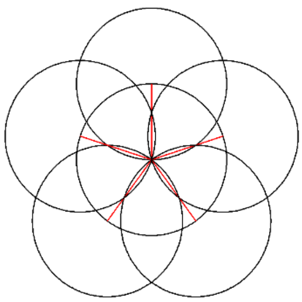
$n = 6$: Der Umfang des regelmäßigen 6-Ecks beträgt $u = 6 \cdot r$, der der abgebildeten Puzzlestücke ist genauso groß wie der eines Kreises: $u = 2\pi \cdot r \approx 6{,}283 \cdot r$.

$n = 8$: Der Umfang des regelmäßigen 8-Ecks beträgt $u = 16 \cdot r \cdot \sin(22{,}5°) \approx 6{,}123 \cdot r$, der der abgebildeten Puzzlestücke ist genauso groß wie der eines Kreises: $u = 2\pi \cdot r \approx 6{,}283 \cdot r$.

zu A 9.7:

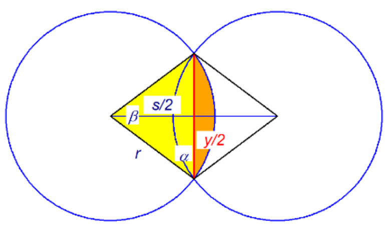
Aus den beiden Abbildungen kann man entnehmen, dass die Figuren durch Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks entstanden sind: Zunächst wird das regelmäßige n-Eck gezeichnet, indem auf einem Kreis mit Radius r die Eckpunkte markiert werden. Um diese Eckpunkte werden dann jeweils Kreise mit Radius r gezeichnet. Die Kreisbögen zwischen dem Mittelpunkt der gesamten Figur und den außen liegenden Schnittpunkten von je zwei benachbarten Kreisen bestimmen dann die einzelnen Flächen.

Die folgende Abbildung verdeutlicht die Vorgehensweise für $n = 5$.



Für die Seitenlänge a eines regelmäßigen n-Ecks, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius r liegen, gilt: $s = 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Aus dem Abstand s der Mittelpunkte zweier benachbarter außen liegender Kreise, dem Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{180°}{n}$ und $\beta = 180° - 2\alpha = 180° - \frac{360°}{n}$ (also $\frac{\beta}{360°} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$) ergibt sich aus der folgenden Abbildung:



$$A_{gelb} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{s}{2} \cdot y = \tfrac{1}{4} \cdot 2r \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot 2r \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

$$A_{orange} = A_{Sektor} - A_{gelb} = \tfrac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 - r^2 \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right) = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}\right) \cdot \pi \cdot r^2 - r^2 \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right)$$

Hieraus ergibt sich als Fläche für die einzelnen Mondsicheln:

$$A_1 = \pi \cdot r^2 - 2 \cdot A_{orange} = \pi \cdot r^2 - 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{n}\right) \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot r^2 \cdot \sin\left(\tfrac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{180°}{n}\right) = \left[\tfrac{2\pi}{n} + \sin\left(\tfrac{360°}{n}\right)\right] \cdot r^2$$

Für die Figuren, bei denen der zentral liegende Kreis ausgespart ist, vermindert sich die Fläche der Sicheln jeweils um den n-ten Teil der Kreisfläche, also

$$A_2 = \left[\tfrac{2\pi}{n} + \sin\left(\tfrac{360°}{n}\right)\right] \cdot r^2 - \tfrac{\pi}{n} \cdot r^2 = \left[\tfrac{\pi}{n} + \sin\left(\tfrac{360°}{n}\right)\right] \cdot r^2$$

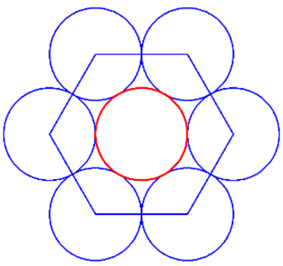
Für einzelne Werte von n ergibt sich mit $r = 1$ beispielsweise:

n	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1	2,960	2,571	2,208	1,913	1,679	1,493	1,341	1,216
A_2	1,913	1,785	1,579	1,390	1,231	1,100	0,992	0,902

Hinweis: Der Umfang der Sichelformen ohne Mittenkreis ist jeweils genauso groß wie der eines Kreises.

zu A 9.8:

Aus der folgenden Grafik kann man ablesen, dass der Umfang der Figur sich aus 6 Drittelkreisbögen zusammensetzt, d. h., der Umfang beträgt $u = 4\pi \cdot r$.



Der Flächeninhalt der Figur ist gleich dem Flächeninhalt des regelmäßigen 6-Ecks der Seitenlänge 2r vermindert um den Flächeninhalt von sechs Drittelkreisen, also

$$A = 6 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot (2r)^2 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 = \left(6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \pi\right) \cdot r^2 \approx 4{,}109 \cdot r^2$$

zu A 9.9:

Aus der Gleichung $h^2 = (a - r)^2 - \left(\tfrac{1}{2} \cdot a\right)^2$ ergibt sich mit $r = \tfrac{3}{10} \cdot a$:

– $h^2 = \left(\tfrac{7}{10} \cdot a\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2} \cdot a\right)^2 = \tfrac{49-25}{100} \cdot a^2 = \tfrac{24}{100} \cdot a^2$, also $h = \tfrac{\sqrt{6}}{5} \cdot a^2 \approx 0{,}490 \cdot a^2$

– Aus $\cos(\alpha) = \tfrac{AC}{AM} = \tfrac{0{,}5 \cdot a}{0{,}7 \cdot a} = \tfrac{5}{7}$ folgt $\alpha \approx 44{,}42°$.

– Aus $\cos(\beta) = \tfrac{BC}{BM} = \tfrac{0{,}25 \cdot a}{0{,}55 \cdot a} = \tfrac{5}{11}$ folgt $\beta \approx 62{,}96°$.

– Berechnung der Fläche A des Fensters insgesamt:

Kreissektor von 60°: $A_1 = \tfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2$, gleichseitiges Dreieck: $A_2 = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$, Differenz:

$$A_1 - A_2 = \tfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2, \text{ also}$$

$$A = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 + 2 \cdot \left(\tfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot a^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 - \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 \approx 0{,}6142 \cdot a^2$$

– Die Kreisfigur oben hat eine Fläche von $A = (0{,}3 \cdot a)^2 \cdot \pi \approx 0{,}2827 \cdot a^2$ (ca. 46,0 % der Gesamtfläche).

– Die Halbkreise unten haben jeweils eine Fläche von $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot a\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}0982 \cdot a^2$ (ca. 16,0 %).

– Flächeninhalt des in der Mitte des Maßwerkfensters eingeschlossenen kleinen Flächenstücks

Differenz der Fläche des gleichschenkligen Dreiecks BDM und der drei Sektoren der unteren beiden Halbkreise und des darüber liegenden Kreises:

In den beiden Halbkreisen um B und D beträgt der Sektorwinkel $\beta \approx 62{,}96°$, bei M ist dieser entsprechend $\gamma \approx 54{,}08°$. Daher gilt:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{5} \cdot a\right) - 2 \cdot \frac{62{,}96°}{360°} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot a\right)^2 \cdot \pi - \frac{54{,}08°}{360°} \cdot (0{,}3 \cdot a)^2 \cdot \pi \approx 0{,}0113 \cdot a^2$ (ca. 1,8% der Gesamtfläche).

– Zum Flächeninhalt der rechts und links liegenden Flächenstücke zwischen Halbkreis und Kreis:

Flächeninhalt des Kreissektors mit Mittelpunkt A zwischen E und F: $\frac{44{,}42°}{360°} \cdot a^2 \cdot \pi \approx 0{,}3876 \cdot a^2$

Flächeninhalt des Dreiecks ADM: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{5} \cdot a\right) \approx 0{,}1837 \cdot a^2$

Flächeninhalt des Kreissektors mit Mittelpunkt D (Endpunkt E): $\frac{117{,}04°}{360°} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot a\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}0638 \cdot a^2$

Flächeninhalt des Kreissektors mit Mittelpunkt M (Endpunkt F): $\frac{88{,}84°+18{,}54°}{360°} \cdot (0{,}3 \cdot a)^2 \cdot \pi \approx 0{,}0843 \cdot a^2$

Die Differenz ergibt einen Flächeninhalt von ca. 0,0558 · a² (ca. 9,1 % der Gesamtfläche)

– Für das Flächenstücks an der Spitze bleibt dann noch:

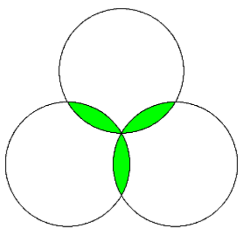
(0,6142 – 0,2827 – 2 · 0,0982 – 0,0113 – 2 · 0,0558) · a² = 0,0112 · a² (ca. 1,8 %)

zu A 9.10:

Wegen A 9.9 beschränken wir uns auf die Untersuchung des Dreipasses:

Die Berührpunkte der drei Kreise mit dem umgebenden Kreis mit Radius *r* = 0,3 · *a* bilden ein gleichseitiges Dreieck, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des umgebenden Kreises ist. Die innen liegenden Kreise haben also einen Radius *x*, der halb so groß ist wie der Radius des umgebenden Kreises.

Aus der Lösung von A 9.7 ergibt sich *jeweils* für die in der folgenden Abbildung grün gefüllten Flächenstücke: $A_{grün} = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \pi \cdot x^2 - x^2 \cdot \sin\left(\frac{180°}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{3}\right)\right] \approx 0{,}1812 \cdot x^2$



Der gesamte Dreipass hat daher den folgenden Flächeninhalt:

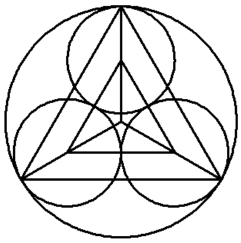
$A = 3 \cdot \left[(0{,}15 \cdot a)^2 \cdot \pi - 0{,}1812 \cdot (0{,}15 \cdot a)^2\right] \approx 0{,}1998 \cdot a^2$

Der Flächenanteil am umgebenden Kreis ist ca. 70,7 %.

zu A 9.11:

Wegen A 9.9 beschränken wir uns auf die Untersuchung einer Fischblase.

Aus der folgenden Abbildung kann man entnehmen: Bezeichnet man den Radius des äußeren Kreises mit *R* (= 0,3 · *a*), dann passt in dieses ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $R \cdot \sqrt{3}$, denn der Radius ist so lang wie zwei Drittel der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. Der Radius *s* der kleinen Kreise kann wie folgt erschlossen werden: Der Radius *R* setzt sich zusammen aus dem Radius *s* sowie zwei Drittel der Höhe des inneren gleichseitigen Dreiecks; dieses wiederum hat die Seitenlänge 2 · *s*.



Es gilt also: $R = s + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2s}{2}\cdot\sqrt{3}\right) = \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot s = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot s \Leftrightarrow s = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot R$

Die kleinen Kreise haben jeweils den Flächeninhalt

$A = \pi\cdot s^2 = \pi\cdot\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}\cdot R^2 \approx 0{,}6767\cdot R^2$ (ca. 21,5% der Fläche des umgebenden Kreises).

Das Flächenstück im Innern der Figur erhalten wir als Differenz des Flächeninhalts des inneren gleichseitigen Dreiecks und der drei Sektoren im inneren Dreieck:

$A_{innen} = \frac{(2s)^2}{4}\cdot\sqrt{3} - 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\pi\cdot s^2 = (\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})\cdot s^2 = (\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})\cdot\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}\cdot R^2 \approx 0{,}0347\cdot R^2$ (ca. 1,1% der Gesamtfläche)

Die drei äußeren Flächenteile ergeben sich dann als Rest:

$A_{äuß} = \pi\cdot R^2 - 0{,}0347\cdot R^2 - 3\cdot 0{,}6767\cdot R^2 \approx 1{,}077\cdot R^2$

Jedes dieser drei Flächenstücke hat dann jeweils einen Flächenanteil von ca. 11,4 %.

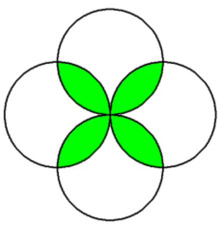
Eine Fischblase setzt sich dann aus einer kleinen Kreisfläche von 0,6767 · R^2 und einem Drittel der äußeren Flächenstücke zusammen, insgesamt also 1,0356 · R^2 (ca. 33,0 % der Fäche des umgebenden Kreises).

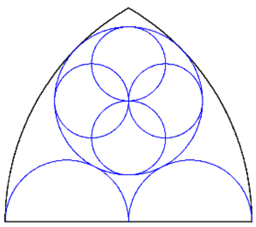
zu A 9.12:

Wegen A 9.9 beschränken wir uns auf die Untersuchung des Vierpasses bzw. der vierschweifigen Fischblase:

Vierpass: Die Berührpunkte der vier Kreise mit dem umgebenden Kreis mit Radius r = 0,3 · a bilden ein Quadrat, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des umgebenden Kreises ist. Die innen liegenden Kreise haben also einen Radius x, der halb so groß ist wie der Radius des umgebenden Kreises.

Aus der Lösung von A 9.7 ergibt sich *jeweils* für die in der folgenden Abbildung grün gefüllten Flächenstücke: $A_{grün} = 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\pi\cdot x^2 - x^2\cdot\sin\left(\frac{180°}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{180°}{4}\right)\right] \approx 0{,}5708\cdot x^2$





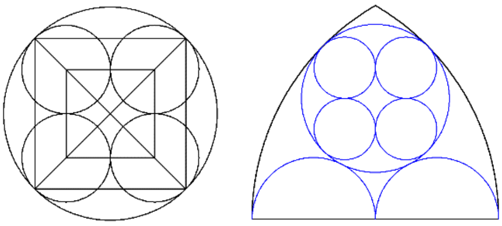
Der gesamte Vierpass hat daher den folgenden Flächeninhalt:

$A = 4\cdot\left[(0{,}15\cdot a)^2\cdot\pi - 0{,}5708\cdot(0{,}15\cdot a)^2\right] \approx 0{,}2314\cdot a^2$

Der Flächenanteil am umgebenden Kreis ist ca. 81,8 %.

Vierschweifige Fischblase:

Aus der folgenden Abbildung kann man entnehmen: Bezeichnet man den Radius des äußeren Kreises mit R (= 0,3 · a), dann passt in dieses ein Quadrat mit Seitenlänge $R\cdot\sqrt{2}$, denn der Radius ist so lang wie die halbe Diagonale. Der Radius s der kleinen Kreise kann wie folgt erschlossen werden: Der Radius R setzt sich zusammen aus dem Radius s sowie der halben Diagonale des inneren Quadrats; dieses wiederum hat die Seitenlänge 2 · s.



Es gilt also: $R = s + s \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow s = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot R$

Die kleinen Kreise haben jeweils den Flächeninhalt

$A = \pi \cdot s^2 = \pi \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \cdot R^2 \approx 0{,}5390 \cdot R^2$ (ca. 17,2 % der Fläche des umgebenden Kreises).

Das Flächenstück im Innern der Figur erhalten wir als Differenz des Flächeninhalts des inneren Quadrats und der vier Sektoren im inneren Quadrat:

$A_{innen} = (2s)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot s^2 = (4-\pi) \cdot \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} \cdot R^2 \approx 0{,}1473 \cdot R^2$ (ca. 4,7 % der Gesamtfläche)

Die vier äußeren Flächenteile ergeben sich dann als Rest:

$A_{äuß} = \pi \cdot R^2 - 0{,}1473 \cdot R^2 - 4 \cdot 0{,}5390 \cdot R^2 \approx 0{,}8383 \cdot R^2$

Jedes dieser vier Flächenstücke hat dann jeweils einen Flächenanteil von ca. 6,7 %.

Eine vierschweifige Fischblase setzt sich dann aus einer kleinen Kreisfläche von 0,5390 · R^2 und einem Viertel der äußeren Flächenstücke zusammen, insgesamt also 0,7486 · R^2 (ca. 23,8 % der Fäche des umgebenden Kreises).

zu A 9.13:

Bezeichnet man den Radius des grün gefärbten Halbkreises mit r, dann ergibt sich für diese Teilfläche

$u_1 = \pi \cdot r$ und $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

Das gelb gefärbte Flächenstück ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit einer Hypotenuse der Länge 2 · *r* und Katheten der Länge $\sqrt{2} \cdot r$, also einer Fläche von r^2.

Die orange gefärbten Flächenstücke entstehen aus einem Achtelkreis mit Radius 2r, aus dem das gelb gefärbte Flächenstück herausgenommen wurde; die Fläche eines solchen Flächenstücks beträgt also

$\frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (2r)^2 - r^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) \cdot r^2$.

Die orange und gelb gefärbten Flächenstücke haben zusammen den folgenden Flächeninhalt:

$A_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) \cdot r^2 + r^2 = (\pi - 1) \cdot r^2$

Zum Umfang des Ovals tragen die beiden orange gefärbten Flächenstücke wie folgt bei:
$u_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot 2r\right) = \pi \cdot r$

Das rot gefärbte Flächenstück ist ein Viertelkreis mit Radius $\left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r$.

Der Flächeninhalt ist daher $A_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot r^2$, der Umfang $u_3 = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r$.

Insgesamt ergibt sich daher für das Oval:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 + (\pi - 1) \cdot r^2 + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot r^2 = \left[\left(3 - \sqrt{2}\right) \cdot \pi - 1\right] \cdot r^2 \approx 3{,}982 \cdot r^2$$

$$u = \pi \cdot r + \pi \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \pi \cdot r \approx 7{,}203 \cdot r$$

zu A 9.14:

Für $\omega = 0°$ ist das Oval ein Kreis. Für $\omega = 60°$ entfällt das rot gefärbte Flächenstück; die beiden orange gefärbten Flächenstücke stoßen nicht glatt aneinander (Form wie beim gotischen Maßwerkfenster) – der Winkel ω muss daher kleiner als 60° sein.

Der grün gefärbte Halbkreis bleibt, also $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$.

Für den Flächeninhalt des gelb gefärbten gleichschenkligen Dreiecks gilt:

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot \left(r \cdot \tan(\omega)\right) = r^2 \cdot \tan(\omega)$$

Die orange gefärbten Flächenstücke entstehen aus einem Kreissektor mit Radius 2r, aus dem das gelb gefärbte Dreieck herausgenommen wurde; die Fläche eines solchen Flächenstücks beträgt also

$$\tfrac{\omega}{360°} \cdot \pi \cdot (2r)^2 - r^2 \cdot \tan(\omega) = \left(\tfrac{\omega}{90°} \cdot \pi - \tan(\omega)\right) \cdot r^2 .$$

Die orange und gelb gefärbten Flächenstücke haben zusammen den folgenden Flächeninhalt:

$$A_2 = 2 \cdot \left(\tfrac{\omega}{90°} \cdot \pi - \tan(\omega)\right) \cdot r^2 + r^2 \cdot \tan(\omega) = \left(\tfrac{\omega}{45°} \cdot \pi - \tan(\omega)\right) \cdot r^2 .$$

Das rot gefärbte Flächenstück ist ein Kreissektor mit Sektorwinkel $180° - 2\omega$ und Radius $2r - \frac{r}{\cos(\omega)}$. Der Flächeninhalt ist daher:

$$A_3 = \tfrac{180° - 2\omega}{360°} \cdot \pi \cdot \left(2r - \tfrac{r}{\cos(\omega)}\right)^2 .$$

Für den Umfang ergibt sich:

$$u_1 = \pi \cdot r \;,\; u_2 = 2 \cdot \tfrac{\omega}{360°} \cdot 2\pi \cdot (2r) = \tfrac{\omega}{45°} \cdot \pi \cdot r \;\text{ und }\; u_3 = \tfrac{180° - 2\omega}{360°} \cdot 2\pi \cdot \left(2 - \tfrac{1}{\cos(\omega)}\right) \cdot r = \tfrac{90° - \omega}{90°} \cdot \pi \cdot \left(2 - \tfrac{1}{\cos(\omega)}\right) \cdot r$$

zu A 9.15:

((eigene Aktivitäten))

zu A 9.16:

Bezeichnet man die Summe der Abstände eines Punktes zu den beiden Brennpunkten $F_1\,(-e \mid 0)$ und $F_2\,(e \mid 0)$ mit 2*a*, dann gilt also:

$$\sqrt{(x+e)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-e)^2 + (y-0)^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

Quadrieren beider Seiten ergibt:

$$x^2 + 2xe + e^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2xe + e^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$4a \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xe \Leftrightarrow \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a - \dfrac{xe}{a}$, erneutes Quadrieren ergibt dann

$$x^2 - 2xe + e^2 + y^2 = a^2 - 2xe + \frac{x^2e^2}{a^2} \Leftrightarrow x^2 + e^2 + y^2 = a^2 + \frac{x^2e^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2 = \left(a^2 - e^2\right) + \frac{x^2e^2}{a^2} - \frac{x^2a^2}{a^2}$$

Ersetzt man nun $a^2 - e^2 = b^2$, so ergibt sich

$y^2 = b^2 - \dfrac{x^2b^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, d. h.,

die Koordinaten eines Punktes (x | y) auf der Ellipse erfüllt die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

zu A 9.17:

((eigene Aktivitäten))

zu A 9.18:

Das Reuleaux-Dreieck setzt sich wie folgt zusammen:

– grün gefärbtes gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge s und mit Flächeninhalt $A_1 = \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}$

– blau gefärbte Flächenstücke jeweils: $A_2 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (s+z)^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}$; $u_2 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (s+z)$

– rosa gefärbte Flächenstücke jeweils: $A_3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot z^2$; $u_3 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot z$

Insgesamt ergibt sich:

$$A = \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (s+z)^2 - \frac{1}{4} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot z^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (s+z)^2 - \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot z^2$$

Mit $z = k \cdot s$ folgt hieraus:

$$A = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (1+k)^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot k^2\right) \cdot s^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi + \pi \cdot k + \pi \cdot k^2 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot s^2 \text{, also}$$

$$A = \left(\left(\frac{1}{2} + k + k^2\right) \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot s^2$$

Für den Umfang ergibt sich:

$$u = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot (s+z) + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot z = \pi \cdot (s+2z) \text{, also}$$

$$u = \pi \cdot s \cdot (1+2k)$$

zu A 9.19:

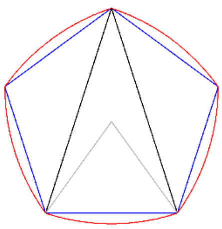
(1) Das schwarz eingezeichnete gleichschenklige Dreieck wird begrenzt durch beiden Diagonalen *d* (die längst-möglichen im 5-Eck) und die Grundseite *s*. Der Winkel von $\frac{180°}{5}$ (= Sektorwinkel des Reuleaux-Bogens) an der Spitze ist als Umfangswinkel über der Sehne *s* halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel von $\frac{360°}{5}$. Die Länge der beiden Diagonalen ergibt sich durch Einzeichnen einer Höhe im gleichschenkligen Dreieck aus $\sin\left(\frac{90°}{5}\right) = \frac{\frac{s}{2}}{d}$, also $d = \frac{s}{2 \cdot \sin\left(\frac{90°}{5}\right)}$

Der Umfang des Reuleaux-Bogens ergibt sich dann wie folgt:

$$u = 5 \cdot \frac{\frac{180°}{5}}{360°} \cdot 2\pi \cdot \frac{s}{2 \cdot \sin\left(\frac{90°}{5}\right)} = \pi \cdot \frac{s}{2 \cdot \sin\left(\frac{90°}{5}\right)}$$

Der Flächeninhalt eines schmalen Flächenstücks zwischen Reuleaux-Bogen und Seiten des regelmäßigen 5-Ecks berechnet sich dann wie folgt: $\frac{\frac{180°}{5}}{360°} \cdot \pi \cdot \left(\frac{s}{2 \cdot \sin\left(\frac{90°}{5}\right)}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{s}{2 \cdot \tan\left(\frac{90°}{5}\right)}$

Der Flächeninhalt des Reuleaux-5-Ecks ist dann gleich der Summe aus dem Flächeninhalt des regelmäßigen 5-Ecks und dem 5-fachen Flächeninhalt der schmalen Flächenstücke.



Analog ergeben sich Winkel und Diagonalenlänge sowie Umfang und Flächeninhalt für *n* = 7.

(2) ((Zeichnung und Berechnungen am erweiterten Reuleaux-Fünfecks als eigene Aktivität))

zu A 9.20:

((eigene Aktivitäten))

zu A 9.21:

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten *a*, *b*, *c* und den Winkeln α, β, γ

Da durch Festlegen beispielsweise von *x* auch *y* und *z* festgelegt sind ($y = a - c + x$ und $z = b - c + x$) ergibt sich für den Umfang:

$$u = 2\pi \cdot \left[\tfrac{\alpha}{360°} \cdot (b+x) + \tfrac{\beta}{360°} \cdot (a+x) + \tfrac{\gamma}{360°} \cdot (a+b-c+x) + \tfrac{\alpha}{360°} \cdot (a-c+x) + \tfrac{\beta}{360°} \cdot (b-c+x) + \tfrac{\gamma}{360°} \cdot x\right]$$
$$= 2\pi \cdot \left[\tfrac{\alpha}{360°} \cdot (a+b-c+2x) + \tfrac{\beta}{360°} \cdot (a+b-c+2x) + \tfrac{\gamma}{360°} \cdot (a+b-c+2x)\right]$$
$$= 2\pi \cdot \left[\tfrac{\alpha}{360°} + \tfrac{\beta}{360°} + \tfrac{\gamma}{360°}\right] \cdot (a+b-c+2x) = 2\pi \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (a+b-c+2x) = \pi \cdot d$$

Für den Flächeninhalt ergibt sich:

$$A = \pi \cdot \left[\tfrac{\alpha}{360°} \cdot (b+x)^2 + \tfrac{\beta}{360°} \cdot (a+x)^2 + \tfrac{\gamma}{360°} \cdot (a+b-c+x)^2 + \tfrac{\alpha}{360°} \cdot (a-c+x)^2 + \tfrac{\beta}{360°} \cdot (b-c+x)^2 + \tfrac{\gamma}{360°} \cdot x^2\right] - 2A_\Delta$$

zu A 9.22:

(a) Man zeichnet einen 8-zackigen Stern, indem man jeden Eckpunkt des regelmäßigen 8-Ecks jeweils mit dem drittnächsten Eckpunkt verbindet. In den Zacken des 8-zackigen Sterns liegt ein Zackenwinkel von 45° vor. Dann verlängert man an jeder zweiten Zacke die jeweiligen beiden Diagonalen um z, um die rosa gefärbten Sektoren und die blau gefärbten Ergänzungen zu zeichnen.

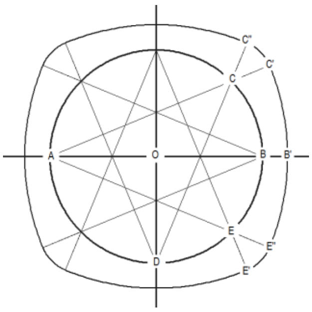
(b) Der Flächeninhalt des äußeren blauen Streifens zwischen EE'' und CC' kann wie folgt bestimmt werden:

Sektor C'AE'': $A_1 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (2r + z)^2$ wobei *z* = |BB'|

Sektor COE: $A_2 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^2$

gleichschenklige Dreiecke AOC bzw. AEO: $A_3 = A_4 = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot r \cdot \sin(22{,}5°)$, also

$A_{blau} = A_1 - (A_2 + A_3 + A_4)$ *A* = *A*1 – (*A*2 + *A*3 + *A*4)



Wegen |AC'| = 2*r* + *z* = |AC| + |CC'| und |AC| = 2*r* · cos(22,5°) folgt: |CC'| = 2*r* · (1 – cos(22,5°)) + *z*

Für den Sektor C'CC'' folgt: $A_{rosa} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot (2r \cdot (1 - \cos(22{,}5°) + z)^2$

Für die Gesamtfläche *A* gilt daher: $A = \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A_{blau} + 4 \cdot A_{rosa}$

Für den Umfang der Figur gilt:

$$u = 4 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 2\pi \cdot (|CC'| + 2r + z) = \pi \cdot (2r \cdot (1 - \cos(22{,}5°) + z + 2r + z) = \pi \cdot (4r + 2z - 2r\cos(22{,}5°))$$

(c) Offensichtlich handelt es sich hierbei nicht um Gleichdicks.

zu A 9.23:

In den Kreis mit Radius *r* zeichnet man zusätzlich einen Kreis mit halben Radius konzentrisch ein, dann eine gerade Anzahl 2*n* von Durchmessern. Zwei innere Kreissektoren (gelb) und zwei äußere Kreisring-Sektoren lassen sich zu einer *Figur mit Loch* (blau) zusammensetzen, die außen durch einen Korbbogen, innen durch ein nicht-glattes konkaves *n*-Eck begrenzt ist.

Für den Umfang der Figur gilt:

$u_{innen} = n \cdot \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r$, $u_{außen} = n \cdot \frac{1}{2n} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot r + r\right) = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r$, zusammen also $u = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Der Gesamtumfang der Figur ist also genauso groß wie der Umfang des Ausgangskreises.

Aus der Zerlegung des Ausgangskreises wissen wir:

Der Flächeninhalt der Figur ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Ausgangskreises.

zu A 9.24:

Der Kreisring hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$. Andererseits berechnet man den Flächeninhalt des blau gefärbten Kreisrings allgemein mithilfe der Radien des inneren und des äußeren Kreises, also mithilfe von $\pi \cdot \left(r_a{}^2 - r_i{}^2\right)$. Bei dieser Figur gilt für die Differenz der beiden: $r_a - r_i = \frac{1}{2} \cdot r$, also $r = 2 \cdot \left(r_a - r_i\right)$.

Es gilt also

$$\pi \cdot \left(r_a{}^2 - r_i{}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \left(r_a - r_i\right)\right)^2 \iff r_a{}^2 - r_i{}^2 = 2 \cdot \left(r_a - r_i\right)^2 \iff r_a{}^2 - r_i{}^2 = 2 \cdot r_a{}^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_i + 2 \cdot r_i{}^2 \iff$$

$$r_a{}^2 - 4 \cdot r_a \cdot r_i + 3 \cdot r_i{}^2 = 0 \iff \left(r_a - 3 \cdot r_i\right) \cdot \left(r_a - r_i\right) = 0$$

Da $r_a - r_i = \frac{1}{2} \cdot r \neq 0$ folgt: $r_a = 3 \cdot r_i$ und daher aus $3 \cdot r_i - r_i = \frac{1}{2} \cdot r$ die Eigenschaft

$r_i = \frac{1}{4} \cdot r$ und weiter $r_a = \frac{3}{4} \cdot r$.