Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 8.1:

Der Flächeninhalt *A* der drei Teildreiecke mit den Höhen u, v, w berechnet sich wie folgt:

$A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot u + \frac{1}{2} \cdot s \cdot v + \frac{1}{2} \cdot s \cdot w = \frac{1}{2} \cdot s \cdot (u + v + w)$; andererseits gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$, wobei $h = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3}$. Hieraus folgt die Beziehung.

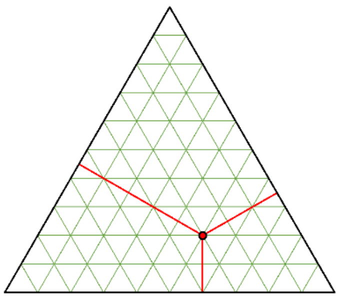
zu A 8.2:

Für den Inkreisradius in einem gleichseitigen Dreieck gilt: $r = \frac{1}{3} \cdot h$. Hieraus folgt wegen $u + v + w = h$ die Beziehung.

zu A 8.3:

Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist gleich der Summe der Höhen der drei rosa gefärbten Dreiecke (das Dreieck rechts kann beispielsweise nach oben verschoben werden, sodass die drei Dreiecke sozusagen übereinandergestapelt sind). Statt der drei rot eingezeichneten Höhen werden dann jeweils andere Höhen in den Dreiecken betrachtet.

zu A 8.4:



Aus der Grafik wird der Zusammenhang zwischen den Abständen und den Koordinaten deutlich: Die rot eingezeichneten Linien sind Höhen in gleichseitigen Dreiecken.

Zwischen einer Höhe *h* und der Seitenlänge *s* im gleichseitigen Dreieck gilt die Beziehung: $h = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \sqrt{3}$

zu A 8.5:

Für die Mannschaften mit gleicher Punktzahl gibt es verschiedene Möglichkeiten der Summenbildung.

Beispielsweise erreicht eine Mannschaft mit 20 Siegen, 0 Unentschieden und 14 Niederlagen in einer Spielzeit insgesamt 60 Punkte, auch eine Mannschaft mit 17 Siegen, 9 Unentschieden und 8 Niederlagen, ebenso eine Mannschaft mit 14 Siegen, 18 Unentschieden und 2 Niederlagen.

Im 60°-Koordinatensystem liegen die Mannschaften mit den Saison-Ergebnissen (20 ; 0 ; 14), (19 ; 3 ; 12), (18 ; 6 ; 10), (17 ; 9 ; 8), (16 ; 12 ; 6), (15 ; 15 ; 4), (14 ; 18 ; 2) auf einer Geraden.

Auf einer dazu parallelen Geraden liegen die Mannschaften mit den Saison-Ergebnissen (16 ; 2 ; 16), (15 ; 5 ; 14), (14 ; 8 ; 12), (13 ; 11 ; 10), (12 ; 14 ; 8), (11 ; 17 ; 6), (10 ; 20 ; 4), (9 ; 23 ; 2), (8 ; 26 ; 0) – alle mit insgesamt 50 erreichten Punkten.

Um herauszufinden, welche Mannschaften welchen Rang in der Abschlusstabelle einnehmen, muss man nur eine dieser Geraden einzeichnen und dann parallel verschieben – je weiter man nach rechts kommt, umso höher der Tabellenplatz.

zu A 8.6:

((zum Zeitpunkt der Drucklegung war die Spielzeit 2020/21 noch nicht abgeschlossen))

zu A 8.7:

Zustand	1	2	3	4	5	6
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0	3	3	5	0
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	3	0	3	1	1
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	5	5	2	2	7

Zustand	1	2	3	4
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5	2	2
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	0	3	0
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	3	3	6

Zustand	1	2
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	3
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	5

Zustand	1	2
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	0
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	3

Zustand	1	2	3	4
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0	3	3
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	3	0	3
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	5	5	2

Zustand	1	2	3	4	5	6
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0	3	3	5	0
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	3	0	3	1	1
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	5	5	2	2	7

zu A 8.8:

Zustand	1	2	3	4	5	6
Gefäß A ($0 \le a \le 4$)	0	4	1	1	0	4
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	0	3	0	1	1
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	4	4	7	7	3

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8
Gefäß A ($0 \le a \le 4$)	0	0	3	3	4	0	2	2
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	3	0	3	2	2	0	3
Gefäß C ($0 \le c \le 8$)	8	5	5	2	2	6	6	3

zu A 8.9:

Da nur 7 Liter zur Verfügung stehen, entfallen mehrere Punkte in der Parallelogramm-Figur (rechts oben).

Der dargestellte Umfüllvorgang ist in der folgenden Tabelle erfasst:

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5	1	1	0	5	2	2
Gefäß B ($0 \le b \le 4$)	0	0	4	0	1	1	4	0
Gefäß C ($0 \le c \le 7$)	7	2	2	6	6	1	1	5

Alternativ wäre auch z. B. der folgende Ablauf möglich:

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0	4	4	0	3	3	5	0
Gefäß B ($0 \le b \le 4$)	0	4	0	3	3	0	4	2	2
Gefäß C ($0 \le c \le 7$)	7	3	3	0	4	4	0	0	5

zu A 8.10:

(a) Für das Problem gibt es zwei Lösungen

Zustand	1	2	3	4	5	6
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5	1	2	2	5
Gefäß B ($0 \le b \le 6$)	6	1	1	0	6	3
Gefäß C ($0 \le c \le 10$)	6	6	10	10	4	4

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5	5	0	5	4	4	0	5
Gefäß B ($0 \le b \le 6$)	6	6	0	5	5	6	0	4	4
Gefäß C ($0 \le c \le 10$)	6	1	7	7	2	2	8	8	3

(b) Zunächst muss man eines der Gefäße mit 8 Litern füllen, dann die restlichen drei zum Umfüllen benutzen; für den zweiten Schritt kann man wieder die graphische Methode anwenden.

Eine mögliche Lösung:

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	0	5	5	5	5	0	5	0	5	3	3	0	5	0
Gefäß B ($0 \le b \le 11$)	0	11	11	0	8										
Gefäß C ($0 \le c \le 13$)	0	0	0	11	11	0	5	5	10	10	12	0	3	3	8
Gefäß D ($0 \le d \le 24$)	24	13	8	8	0	11	11	6	6	1	1	13	13	8	8

(c) Wenn man die Rahmenbedingungen graphisch darstellen möchte, zeichnet man ein 5x3-Parallelogramm; der gesuchte Punkt (4 ; 4 ; 4) liegt jedoch außerhalb.

Der Trick besteht darin, dass nach dem 3. Schritt die 1. Person 2 pint Bier trinkt, sodass insgesamt nur noch 10 pint übrig sind; nach dem 6. Schritt muss dann die 3. Person die ihr zustehenden 4 pint trinken, nach dem 8. Schritt die 2. Person 1 pint, nach dem 10. Schritt die 1. Person ihre restlichen 2 pint und die 2. Person die restlichen 3 pint.

Zustand	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Gefäß A ($0 \le a \le 5$)	0	5	2	0	3	3	3	5	5	2	0
Gefäß B ($0 \le b \le 3$)	0	0	3	3	0	3	3	1	0	3	0
Gefäß C ($0 \le c \le 12$)	12	7	7	7	7	4	0	0	0	0	0

zu A 8.11:

(a) Eine Beschreibung des Algorithmus wird einfacher, wenn noch Zwischenpunkte betrachtet werden.

$(0;0) \to (1;1) \to (2;2) \to (3;1) \to (2;0) \to (1;1) \to (0;2)$

$(0;0) \to (1;1) \to (2;2) \to (3;3) \to (4;4) \to (5;5) \to (6;6)$

Start: Erhöhe beide Koordinaten jeweils um 1, solange die folgende Bedingung erfüllt ist.

Wenn die 1. Koordinate den Wert 3 erreicht hat, dann vermindere vom nächsten Schritt an die 1. Koordinate um 1. Wenn die 2. Koordinate den Wert 2 erreicht hat, dann vermindere vom nächsten Schritt an die 2. Koordinate um 1. Wenn die 1. Koordinate den Wert 0 erreicht hat, dann erhöhe vom nächsten Schritt an die 1. Koordinate um 1. Wenn die 2. Koordinate den Wert 0 erreicht hat, dann erhöhe vom nächsten Schritt an die 2. Koordinate um 1.

(b) 4×3 -Billardtisch

$(0;0) \to (1;1) \to (2;2) \to (3;3) \to (4;2) \to (3;1) \to (2;0) \to (1;1) \to (0;2) \to (1;3) \to (2;2) \to (3;1) \to (4;0)$

5×3 -Billardtisch

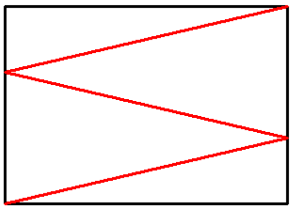
$(0;0) \to (1;1) \to (2;2) \to (3;3) \to (4;2) \to (5;1) \to (4;0) \to (3;1) \to (2;2) \to (1;3) \to (0;2)$
$\to (1;1) \to (2;0) \to (3;1) \to (4;2) \to (5;3)$

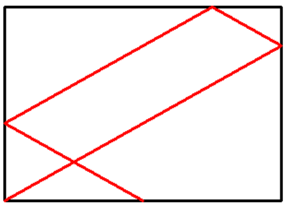
(c) Der Weg der Billardkugel zum gegenüberliegenden Eckpunkt des vergrößerten Billardtischs ist gerade gleich der Länge der Diagonale im Quadrat. Der vergrößerte Billardtisch setzt sich in der Breite aus *b* Tischen der Breite *a* und in der Höhe aus *a* Tischen der Höhe *b* zusammen. Dieses Quadrat hat also die Seitenlänge $a \cdot b$, die Diagonale daher die Länge $a \cdot b \cdot \sqrt{2}$.

(d) Auf dem vergrößerten Billardtisch überquert die Billardkugel $b - 1$ senkrechte Linien (= Begrenzungen eines $a \times b$ -Billardtischs) und $a - 1$ waagerechte Linien; insgesamt also $(a + b - 2)$ dieser Linien, d. h., beim $a \times b$ -Billardtisch kommt es zu $(a + b - 2)$ Reflexionen.

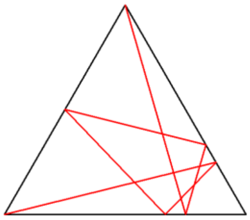
zu A 8.12:

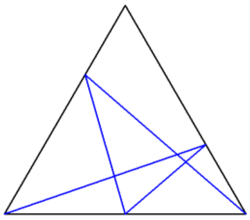
a. Durch Anwendung der Strahlensätze ergeben sich die Abschnitte auf den Seiten des Rechtecks:





b. Durch Anwendung der Strahlensätze ergeben sich die Abschnitte auf den Seiten des Dreiecks:





zu A 8.13:

In *Mathematik ist schön* werden in *Kap.* 1 regelmäßige Vielecke und Sterne untersucht.

Demnach sind ideale Billard-Bahnen möglich, wenn

- der Weg der Billardkugel längs der Umfangslinie eines regelmäßigen Vielecks verläuft (hier gilt zwischen der Seitenlänge *s* und dem Radius *r* der Zusammenhang: $\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{s}{2r}$, also: $u = n \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$. Die Kugel muss hierfür (von dem unten liegenden Punkt des kreisförmigen Billardtischs) um den Winkel $90° - \frac{180°}{n}$ gegenüber der Vertikalen angestoßen werden,
- der Weg der Billardkugel längs der Linien eines „echten" regelmäßigen *n*-zackigen Sterns verläuft.

Wie im o. a. Kapitel ausgeführt wird, gibt es unterschiedliche Anzahlen von „echten" regelmäßigen Sternen; diese Anzahlen hängen von *n* ab:

Sterne, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann

Für alle natürliche Zahlen *n*, *k* mit $n > 4$ und $2 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, falls *n* eine gerade Zahl ist, bzw.

$2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, falls *n* eine ungerade Zahl ist, existieren regelmäßige *n*-zackige Sterne.

Dann und nur dann lassen sich die Sterne als durchgehenden Streckenzug zeichnen, wenn *n* und *k* zueinander teilerfremd sind.

Die Bahnlängen der Kugeln ergibt sich dann jeweils aus der Länge der betreffenden Diagonalen, die den Stern bilden. Der Winkel, unter dem die Billardkugel angestoßen wird, ergibt sich aus dem halben Zackenwinkel:

Größe der Zackenwinkel in regelmäßigen *n*-zackigen Sternen

Für die Winkelgröße des äußeren Zackenwinkels ε eines regelmäßigen *n*-zackigen Sterns vom Typ {*n*/*k*} gilt:

$\varepsilon = 180° - \frac{k \cdot 360°}{n}$