Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 7.1:

1. Figur: Nach dem Satz von Pythagoras gilt: $p^2 = q^2 + q^2$, also $p^2 = 2q^2$, d. h. $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$.

2. Figur: Um den oberen rechten Eckpunkt des Quadrats wird ein Kreis mit Radius q geschlagen. Die Diagonale wird hierdurch unterteilt in einen Abschnitt der Länge q und einen der Länge $p - q$.

3. Figur: Um den unteren linken Eckpunkt des Quadrats wird ein Kreis mit Radius q geschlagen. Die Diagonale ist jetzt unterteilt in drei Abschnitte: zwei der Länge $p - q$, der mittlere hat die Länge $2q - p$.

Zu diesem mittleren Abschnitt kann man ein Quadrat zeichnen, dessen Diagonale die Länge $2q - p$ ist.

Da dieses Quadrat mit Seitenlänge x ähnlich ist zu dem äußeren Quadrat, gilt:

$x : (2q - p) = q : p$, also $x = \frac{q \cdot (2q - p)}{p} = \frac{2q^2 - q \cdot p}{p} = \frac{p^2 - q \cdot p}{p} = p - q$.

Wir haben also ein Quadrat mit einer kleineren Seitenlänge als q gefunden, bei dem sich die Länge der Diagonale zur Länge der Seiten wie $p : q$ verhält – im Widerspruch zur Annahme!

zu A 7.2:

Das gelb gefärbte Quadrat hat die Seitenlänge $p - 2 \cdot (p - q) = 2q - p$; diese Seitenlänge ist ganzzahlig.

Für die Fläche gilt wegen $p^2 = 2q^2$: $(2q - p)^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 = 6q^2 - 4pq$. Andererseits haben die beiden grün gefärbten Quadrate zusammen die gleiche Größe: $2 \cdot (p - q)^2 = 2p^2 - 4pq + 2q^2 = 6q^2 - 4pq$, d. h.,

es existiert ein kleineres Quadrat mit ganzzahligen Seitenlängen, bei dem sich die Länge der Diagonale zur Länge der Seiten wie $p : q$ verhält.

zu A 7.3:

Indirekter Beweis: Angenommen, es würde gelten: p^2 ist gerade und p ist ungerade, dann lässt sich p in der Form $p = 2r + 1$ schreiben mit einer geeigneten natürlichen Zahl r. Dann gilt für das Quadrat von p:

$p^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4r \cdot (r + 1) + 1$. Diese Zahl lässt bei der Division durch 4 den Rest 1 (also auch bei der Division durch). p^2 ist also eine ungerade Zahl – im Widerspruch zur Annahme.

zu A 7.4:

Angenommen, $\sqrt{3}$ lässt sich darstellen als Quotient von zwei zueinander teilerfremden natürlichen Zahlen p und q. Dann gilt also: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3$, also $p^2 = 3 \cdot q^2$.

Hieraus folgt: p^2 ist teilbar durch 3. Wenn p^2 durch 3 teilbar ist, dann muss p selbst durch 3 teilbar sein.

Durch 3 teilbare Zahlen p lassen sich aber in der Form $p = 3 \cdot r$ darstellen mit geeignetem $r \in IN$.

Es gilt also: $p^2 = (3 \cdot r)^2 = 9 \cdot r^2 = 3 \cdot q^2$, also $3 \cdot r^2 = q^2$. Das wiederum bedeutet, dass q ebenfalls eine durch 3 teilbare Zahl ist.

Und wenn aber *beide* Zahlen p und q durch 3 teilbar sind, dann lässt sich der Bruch $\frac{p}{q}$ kürzen!

Dies steht im Widerspruch zu der Annahme, dass es zwei *zueinander teilerfremde* natürliche Zahlen p und q mit der Eigenschaft $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$ gibt. Folglich muss diese Annahme falsch sein, d. h., das logische Gegenteil der Annahme ist richtig, was zu beweisen war.

Ein indirekter Beweis für Wurzeln aus Primzahlen verläuft analog.

zu A 7.5:

$\frac{289}{144} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{288}{144}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 144}{289} < 1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot 144}{289} < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{24}{17}\right)^2 < 2$, d. h., es gilt $\frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

arithmetisches Mittel: $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{24}{17}+\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{24\cdot 12+17\cdot 17}{17\cdot 12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{288+289}{204} = \frac{577}{408}$

Wegen 577² = 332929 und 408² = 166464 gilt:

$\frac{332929}{166464} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{332929}{166464}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\cdot 166464}{332929} < 1 \Leftrightarrow \frac{4\cdot 166464}{332929} < 2 \Leftrightarrow \left(\frac{816}{577}\right)^2 < 2$

zu A 7.6:

$\frac{49}{16} > 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{49}{16}} < 1 \Leftrightarrow \frac{3\cdot 16}{49} < 1 \Leftrightarrow \frac{9\cdot 16}{49} < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{7}\right)^2 < 3$, d. h., es gilt $\frac{12}{7} < \sqrt{3} < \frac{7}{4}$.

$\frac{676}{225} > 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{676}{225}} < 1 \Leftrightarrow \frac{3\cdot 225}{676} < 1 \Leftrightarrow \frac{9\cdot 225}{676} < 3 \Leftrightarrow \left(\frac{45}{26}\right)^2 < 3$, d. h., es gilt $\frac{45}{26} < \sqrt{3} < \frac{676}{225}$.

$\frac{81}{16} > 5 \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{81}{16}} < 1 \Leftrightarrow \frac{5\cdot 16}{81} < 1 \Leftrightarrow \frac{25\cdot 16}{81} < 5 \Leftrightarrow \left(\frac{20}{9}\right)^2 < 5$, d. h., es gilt $\frac{20}{9} < \sqrt{5} < \frac{9}{4}$.

$\frac{841}{169} < 5 \Leftrightarrow \frac{5}{\frac{841}{169}} > 1 \Leftrightarrow \frac{5\cdot 169}{841} > 1 \Leftrightarrow \frac{25\cdot 169}{841} > 5 \Leftrightarrow \left(\frac{65}{29}\right)^2 > 5$, d. h., es gilt $\frac{29}{13} < \sqrt{5} < \frac{65}{29}$.

$\frac{64}{9} < 7 \Leftrightarrow \frac{7}{\frac{64}{9}} > 1 \Leftrightarrow \frac{7\cdot 9}{64} > 1 \Leftrightarrow \frac{49\cdot 9}{64} > 7 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{8}\right)^2 > 7$, d. h., es gilt $\frac{8}{3} < \sqrt{7} < \frac{21}{8}$.

$\frac{1369}{196} < 7 \Leftrightarrow \frac{7}{\frac{1369}{196}} > 1 \Leftrightarrow \frac{7\cdot 196}{1369} > 1 \Leftrightarrow \frac{49\cdot 196}{1369} > 7 \Leftrightarrow \left(\frac{98}{37}\right)^2 > 7$, d. h., es gilt $\frac{37}{14} < \sqrt{7} < \frac{98}{37}$.

zu A 7.7:

Durch die Division von 720 durch 27 erhält man *26 ²/₃* als Partnerzahl. Das arithmetische Mittel dieser beiden Zahlen liegt dann näher an Wurzel aus 720. Dies bestätigt man durch Quadrieren.

zu A 7.8:

a. Die Ungleichung ergibt sich aus der Steigung der Geradenstücke in den rechtwinkligen Dreiecken: Die Steigung der blau gezeichneten Hypotenuse ist kleiner als die Steigung der hellblau/türkis gezeichneten Hypotenuse und diese wiederum kleiner als die rot gezeichneten Hypotenuse.

b. $\frac{7}{5} < \frac{17}{12} < \frac{10}{7}$

c. $\frac{(x_n{}^2+2)+(4\cdot x_n)}{(2\cdot x_n)+(x_n{}^2+2)} = \frac{x_n{}^2+4\cdot x_n+2}{x_n{}^2+2\cdot x_n+2} = \frac{(x_n+2)^2-2}{(x_n+1)^2+1}$

zu A 7.9:

Aus (1) $b_{n+1} = a_n + b_n$ und (2) $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ ergibt sich durch Einsetzen

$a_{n+1} = a_n + 2b_n = (a_n + b_n) + b_n = b_{n+1} + b_n$.

Dies kann man auch wie folgt notieren: $a_n = b_n + b_{n-1}$.

Zusammen mit (1) ergibt dies: $b_{n+1} = a_n + b_n = b_n + b_{n-1} + b_n = 2b_n + b_{n-1}$.

Außerdem folgt aus (1) und (2):

$2b_{n+1} = 2a_n + 2b_n = a_n + (a_n + 2b_n) = a_n + a_{n+1}$.

Dies kann man auch wie folgt notieren: $2b_n = a_{n-1} + a_n$.

Zusammen mit (2) ergibt dies: $a_{n+1} = a_n + (a_{n-1} + a_n) = 2a_n + a_{n-1}$.

zu A 7.10:

Anwendung der Beziehungen (1) und (2) aus A 7.9 ergibt:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2b_{n+1} = (a_n + 2b_n) + 2 \cdot (a_n + b_n) = 3a_n + 4b_n$$

$$b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + 2b_n) + (a_n + b_n) = 2a_n + 3b_n$$

zu A 7.11:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{(a_n + 2b_n) \cdot b_n - (a_n + b_n) \cdot a_n}{(a_n + b_n) \cdot b_n}\right| = \left|\frac{(a_n \cdot b_n + 2b_n^2) - (a_n^2 + a_n \cdot b_n)}{(a_n + b_n) \cdot b_n}\right|$$

$$= \left|\frac{2b_n^2 - a_n^2}{(a_n + b_n) \cdot b_n}\right| = \frac{1}{(a_n + b_n) \cdot b_n} = \frac{1}{b_{n+1} \cdot b_n}$$

zu A 7.12:

Nur die Quotienten von A0: $\frac{1189}{841} = \frac{41}{29} = \frac{a_5}{b_5}$; A2: $\frac{594}{420} = \frac{99}{70} = \frac{a_6}{b_6}$; A5: $\frac{210}{148} = \frac{105}{74} = \frac{a_7}{b_7}$

treten in der o. a. Folge auf.

zu A 7.13:

$$x_1 = \frac{\frac{49}{25} + 2}{2 \cdot \frac{7}{5}} = \frac{99 \cdot 5}{25 \cdot 14} = \frac{99}{70} = \frac{a_5}{b_5}\ ;\ x_2 = \frac{\frac{9801}{4900} + 2}{2 \cdot \frac{99}{70}} = \frac{19601 \cdot 70}{4900 \cdot 198} = \frac{19601}{13860} = \frac{a_{11}}{b_{11}}\ ;$$

$$x_3 = \frac{\frac{384199201}{192099600} + 2}{2 \cdot \frac{99}{70}} = \frac{768398401}{543339720} = \frac{a_{23}}{b_{23}}\ ;\ x_4 = \ldots = \frac{a_{47}}{b_{47}}$$

Die Indizes durchlaufen die Folge 5 – 11 – 23 – 47; also jeweils verdoppelt plus 1 – die jeweiligen Differenzen sind 6, 12, 24.

zu A 7.14:

$$1 + \frac{1}{1+2} = \frac{4}{3} = 1{,}333333\ldots\ ;\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+2}} = \frac{10}{7} = 1{,}428571\ldots\ ;\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+2}}} = \frac{24}{17} = 1{,}411764\ldots\ ;$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+2}}}} = \frac{58}{41} = 1{,}414634\ldots\ ;\ 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+2}}}}} = \frac{140}{99} = 1{,}414141\ldots\ ;\ \ldots$$

Dies ist die Folge der Partnerzahlen zu $\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots$

zu A 7.15:

Zur Abbildungssequenz:

(a) In das Rechteck mit den Seitenlängen 1 und $\sqrt{2}$ ist eine Diagonale mit der Seitenlänge $\sqrt{3}$ eingezeichnet.

(b) In dem Ausgangsrechteck wird ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 (grün) sowie ein Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{2}-1$ (gelb) abgetrennt. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen $\sqrt{2}-1$ und $1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$. Für das Verhältnis der Seiten gilt:

$\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{4-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Diagonale im blauen Rechteck hat übrigens die Länge $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2-2\sqrt{2}+1+4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

(c) In dem blauen Rechteck aus Schritt (2) wird ein Quadrat mit Seitenlänge $\sqrt{2}-1$ (rosa) und ein Quadrat mit der Seitenlänge $1-2\cdot(\sqrt{2}-1)=3-2\sqrt{2}$ abgetrennt. Es bleibt ein Rechteck mit den Seitenlängen $3-2\sqrt{2}$ und $(\sqrt{2}-1)-(3-2\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$. Für das Verhältnis der Seiten gilt:

$\frac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}=\frac{(3-2\sqrt{2})(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}=\frac{9\sqrt{2}+12-12-8\sqrt{2}}{18-16}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Diagonale im blauen Rechteck hat übrigens die Länge $\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2+\left(3\sqrt{2}-4\right)^2}=\sqrt{9-6\sqrt{2}+2+18-24\sqrt{2}+16}=\sqrt{45-30\sqrt{2}}=\sqrt{15}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$.

zu A 7.16:

Ersetzt man in den Termen der Kettenbruchentwicklung die $\sqrt{3}$ durch 1, dann erhält man eine Folge von Zahlen, die kleiner ist als $\sqrt{3}$:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3};\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{3}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{8}}=\frac{19}{11};$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{19}{11}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{11}{30}}=\frac{71}{41};\ \ldots$$

allgemein: Zählerfolge: $a_{n+1}=2a_n+3b_n$; Nennerfolge: $b_{n+1}=a_n+2b_n$

Ersetzt man in den Termen der Kettenbruchentwicklung die $\sqrt{3}$ durch 2, dann erhält man eine Folge von Zahlen, die größer ist als $\sqrt{3}$:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}=\frac{7}{4};\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{4}}}=1+\frac{11}{15}=\frac{26}{15};$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+2}}}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{26}{15}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{15}{41}}=\frac{97}{56}\ ;\ \ldots$$

allgemein: Zählerfolge: $a_{n+1}=2a_n+3b_n$; Nennerfolge: $b_{n+1}=a_n+2b_n$.

In den Termen der Kettenbruchentwicklung kann $\sqrt{5}$ durch 2 ersetzt werden; man erhält eine Folge von Zahlen, die abwechselnd größer bzw. kleiner ist als $\sqrt{5}$:

$$2+\frac{1}{2+2}=\frac{9}{4}\ ;\ 2+\cfrac{1}{2+\left(2+\cfrac{1}{2+2}\right)}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{4}}=2+\frac{4}{17}=\frac{38}{17}\ ;$$

$$2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\left(2+\cfrac{1}{2+2}\right)}}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{38}{17}}=2+\frac{17}{72}=\frac{161}{72}\ ;\ \ldots$$

allgemein: Zählerfolge: $a_{n+1}=2a_n+5b_n$; Nennerfolge: $b_{n+1}=a_n+2b_n$.

zu A 7.17:

Die Glieder der Zählerfolge ergeben sich jeweils aus der Summe von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern der Nennerfolge: 3 = 1 + 2; 7 = 2 + 5; 17 = 5 + 12; 41 = 12 + 29; …

zu A 7.18:

Zählerfolge: $a_{n+1}=2a_n+3b_n$; Nennerfolge: $b_{n+1}=a_n+2b_n$

Man beachte:

$$a_{n+1}{}^2-3b_{n+1}{}^2=(2a_n+3b_n)^2-3\cdot(a_n+2b_n)^2$$
$$=4a_n{}^2+12a_nb_n+9b_n{}^2-3a_n{}^2-12a_nb_n-12b_n{}^2$$
$$=a_n{}^2-3b_n{}^2$$

d. h., wenn das erste Lösungspaar die Gleichung $x^2-3\cdot y^2=+1$ erfüllt, dann auch die folgenden.

zu A 7.19:

Zählerfolge: $a_{n+1}=2a_n+5b_n$; Nennerfolge: $b_{n+1}=a_n+2b_n$

Man beachte:

$$a_{n+1}{}^2-3b_{n+1}{}^2=(2a_n+5b_n)^2-5\cdot(a_n+2b_n)^2$$
$$=4a_n{}^2+20a_nb_n+25b_n{}^2-5a_n{}^2-20a_nb_n-20b_n{}^2$$
$$=-\left(a_n{}^2-5b_n{}^2\right)$$

d. h., wenn das erste Lösungspaar die Gleichung $x^2-5\cdot y^2=+1$ erfüllt, dann gilt für das nächste Lösungspaar $x^2-5\cdot y^2=-1$ und umgekehrt.

Hinweis: Entsprechendes gilt für die Lösungspaare der Pell'schen Gleichung $x^2-2\cdot y^2=+1$ (d. h. für die „besondere" Intervallschachtelungsfolge mit $a_{n+1}=a_n+2b_n$ und $b_{n+1}=a_n+b_n$:

$$a_{n+1}^{\ 2} - 2b_{n+1}^{\ 2} = (a_n + 2b_n)^2 - 2 \cdot (a_n + b_n)^2$$
$$= a_n^{\ 2} + 4a_nb_n + 4b_n^{\ 2} - 2a_n^{\ 2} - 4a_nb_n - 2b_n^{\ 2}$$
$$= -\left(a_n^{\ 2} - 2b_n^{\ 2}\right)$$

zu A 7.20:

Gesucht werden alle natürlichen Zahlen *m* und *n*, für die gilt: $1+2+3+...+(m-1) = (m+1)+(m+2)+...+n$

wobei *m* die Hausnummer des Freundes angibt und *n* die Anzahl der Häuser an der Straße.

Wegen der Summenformeln ergibt sich: $1+2+3+...+(m-1) = \frac{1}{2} \cdot (m-1) \cdot m$

$$(m+1)+(m+2)+...+n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1)$$

Die gesuchten natürlichen Zahlen *m* und *n* müssen also folgende Bedingung erfüllen:

$\frac{1}{2} \cdot (m-1) \cdot m = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) - \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1)$, also

$$\frac{1}{2} \cdot (m^2 - m + m^2 + m) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Diesen Term kann man umformen:

$$m^2 = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) \Leftrightarrow 8m^2 = 4n^2 + 4n \Leftrightarrow 8m^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot (2m)^2 + 1 = (2n+1)^2 \Leftrightarrow$$

$(2n+1)^2 - 2 \cdot (2m)^2 = 1$, also mit den Variablen $x = 2n+1$ und $y = 2m$ ergibt sich die Pell'sche Gleichung
$x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$

Das Beispiel zeigt den Fall *m* = 6:

Die Summe zweier benachbarter Dreieckszahlen ist bekanntlich eine Quadratzahl, vgl. *Mathematik ist schön*, Kap. 2. Im betrachteten Beispiel bedeutet dies: Die Summe der ersten 5 natürlichen Zahlen (= fünfte Dreieckszahl, grün) und die Summe der ersten 6 natürlichen Zahlen (= sechste Dreieckszahl, rot + gelb) ergeben die Quadratzahl 6² = 36.

Die 15 grün gefärbten Kreise lassen sich in diesem Beispiel auch trapezförmig anordnen und stellen die Summe 7 + 8 dar. Dies ist möglich, weil die natürliche Zahl 36 nicht nur eine Quadratzahl, sondern auch eine Dreieckszahl ist (nämlich die achte). Zusammen ergibt sich also eine Dreieckform, durch die die Summe der ersten 8 natürlichen Zahlen dargestellt ist.

zu A 7.21:

$$\sqrt{3} = \sqrt{1{,}7^2 + 0{,}11} \approx 1{,}7 + \frac{0{,}11}{3{,}4} = 1{,}7 + \tfrac{11}{340} \approx 1{,}732$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2{,}2^2 + 0{,}16} \approx 2{,}2 + \frac{0{,}16}{4{,}4} = 2{,}2 + \tfrac{2}{55} \approx 2{,}236$$

zu A 7.22:

(a)

$$\sqrt{2} = \sqrt{1{,}4^2 + 0{,}04} \approx 1{,}4 + \frac{1}{70} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{70} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{1}{70} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{\frac{3600}{70}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51+\frac{3}{7}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{\frac{180}{7}}{60^3}$$

$$= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{25+\frac{5}{7}}{60^3} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{25}{60^3} + \frac{\frac{300}{7}}{60^4} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{25}{60^3} + \frac{42+\frac{6}{7}}{60^4} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{25}{60^3} + \frac{43}{60^4}$$

(b) $\frac{3}{2} = 1 + \frac{30}{60} = (1;30)$; $\frac{7}{5} = 1 + \frac{24}{60} = (1;24)$; $\frac{17}{12} = 1 + \frac{25}{60} = (1;25)$;

$$\frac{41}{29} = 1 + \frac{12}{29} = 1 + \frac{\frac{720}{29}}{60} = 1 + \frac{24+\frac{24}{29}}{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{\frac{1440}{29}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{49+\frac{19}{29}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{49}{60^2} + \frac{\frac{1140}{29}}{60^3}$$

$$= 1 + \frac{24}{60} + \frac{49}{60^2} + \frac{39+\frac{9}{29}}{60^3} = \ldots = (1;24,\ 49,\ 39,\ 18,\ 37,\ 19,\ldots)$$

$$\frac{99}{70} = 1 + \frac{29}{70} = 1 + \frac{\frac{1740}{70}}{60} = 1 + \frac{24+\frac{60}{70}}{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{\frac{3600}{70}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51+\frac{3}{7}}{60^2} = \ldots = (1;24,\ 51,\ 25,\ 42,\ 51,\ 25,\ldots) \text{ , vgl. (1)}$$

$$\frac{239}{169} = 1 + \frac{70}{169} = 1 + \frac{\frac{4200}{169}}{60} = 1 + \frac{24+\frac{144}{169}}{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{\frac{8640}{169}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51+\frac{21}{169}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{\frac{1260}{169}}{60^3}$$

$$= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{7+\frac{77}{169}}{60^3} = \ldots = (1;24,\ 51,\ 7,\ 27,\ 20,\ 14,\ldots)$$

$$\frac{577}{408} = 1 + \frac{169}{408} = 1 + \frac{\frac{10140}{408}}{60} = 1 + \frac{24+\frac{348}{408}}{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{\frac{20880}{408}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51+\frac{72}{408}}{60^2} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{\frac{4320}{408}}{60^3}$$

$$= 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10+\frac{240}{408}}{60^3} = \ldots = (1;24,\ 51,\ 10,\ 35,\ 17,\ 38,\ldots)$$

Hinweis: $\sqrt{2} = (1;24,\ 51,\ 10,\ 7,\ 46,\ 6,\ldots)$

zu A 7.23:

r_n	s_n	r_n / s_n
1	1	1
7	5	1,4
1393	985	1,41421319796954
10812186007	7645370045	1,41421356237310
5,05592E+30	3,5751E+30	1,41421356237309
3	2	1,5
99	70	1,414285714
3880899	2744210	1,41421356237314
2,33807E+20	1,6533E+20	1,41421356237310

zu A 7.24:

n	$x_{n+1} = \frac{x_n + 2}{x_n + 1}$	$x_{n+1} = \frac{2x_n + 2}{x_n + 2}$	$x_{n+1} = \frac{3x_n + 2}{x_n + 3}$	$x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 4}$
1	1,41666666666667	1,41176470588235	1,40909090909091	1,40740740740741
2	1,41379310344828	1,41379310344828	1,41237113402062	1,41095890410959
3	1,41428571428571	1,41414141414141	1,41355140186916	1,41265822784810
4	1,41420118343195	1,41420118343195	1,41397564849127	1,41347053320861
5	1,41421568627451	1,41421143847487	1,41412808827057	1,41385864869535
6	1,41421319796954	1,41421319796954	1,41418285559027	1,41404404723907
7	1,41421362489487	1,41421349985132	1,41420253102226	1,41413260072396
8	1,41421355164605	1,41421355164605	1,41420959939985	1,41417489513870
9	1,41421356421356	1,41421356053263	1,41421213869144	1,41419509506973
10	1,41421356205732	1,41421356205732	1,41421305092168	1,41420474250204

zu A 7.25:

n	$x_{n+1}=\frac{4x_n+6}{3x_n+4}$	$x_{n+1}=\frac{7x_n+10}{5x_n+7}$	$x_{n+1}=\frac{3x_n+4}{2x_n+3}$
1	1,41463414634146	1,41428571428571	1,41379310344828
2	1,41420118343195	1,41421319796954	1,41420118343195
3	1,41421392677674	1,41421356421356	1,41421319796954
4	1,41421355164605	1,41421356236380	1,41421355164605
5	1,41421356268887	1,41421356237314	1,41421356205732

zu A 7.26:

$$\sqrt{3}\approx 1+\frac{3-1}{3}=1+\frac{2}{3}\approx 1{,}67 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{12}\approx 0{,}083)$$

$$\sqrt{300}\approx 17+\frac{300-289}{35}=17+\frac{11}{35}\approx 17{,}314 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{140}\approx 0{,}0071)$$

$$\sqrt{30000}\approx 173+\frac{30000-29929}{347}=173+\frac{71}{347}\approx 173{,}2046 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{1388}\approx 0{,}00072)$$

zum Vergleich: $\sqrt{3}=1{,}7320508075...$

$$\sqrt{5}\approx 2+\frac{5-4}{5}=\frac{11}{5}=2{,}2 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{20}=0{,}05)$$

$$\sqrt{500}\approx 22+\frac{500-484}{45}=22+\frac{16}{45}\approx 22{,}356 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{180}\approx 0{,}0056)$$

$$\sqrt{500}\approx 223+\frac{50000-49729}{447}=223+\frac{271}{447}\approx 223{,}6063 \text{ (Fehler kleiner als } \tfrac{1}{1788}\approx 0{,}00056)$$

zum Vergleich: $\sqrt{5}=2{,}236067977...$

zu A 7.27:

Āryabhata spricht mit seinem Kommentar das Verfahren an: Nach dem ersten Schritt (bei dem die größtmögliche Quadratzahl gesucht wird, die kleiner ist als die Zahl, aus der die Wurzel gezogen wird) wird das bis dahin eingetragene Ergebnis verdoppelt, dann wird geprüft, wie oft das verdoppelte Ergebnis in den Rest hineinpasst, das zugehörige Vielfache wird subtrahiert und die neue Ziffer beim Ergebnis eingetragen.

zu A 7.28:

Nach binomischer Formel gilt:

$(1000a + 100b + 10c + 1d)^2 = (1000a)^2$

$+ 2 \cdot (1000a) \cdot (100b) + (100b)^2$

$+ 2 \cdot (1000a) \cdot (10c) + 2 \cdot (100b) \cdot (10c) + (10c)^2$

$+ 2 \cdot (1000a) \cdot (1d) + 2 \cdot (100b) \cdot (1d) + 2 \cdot (10c) \cdot (1d) + (1d)^2$

Im ersten Schritt wird die größtmögliche Quadratzahl subtrahiert: $(1000a)^2$.

Im zweiten Schritt wird überprüft, für welches größtmögliche b der nächste Summand $2 \cdot (1000a) \cdot (100b)$ abgezogen werden kann. Zum Abschluss dieses Schritts wird dann auch noch der nur von b abhängige Summand $(100b)^2$ subtrahiert.

Im dritten Schritt wird überprüft, für welches größtmögliche c die zwei weiteren Summanden, die a, b und c enthalten, also $2 \cdot (1000a) \cdot (10c) + 2 \cdot (100b) \cdot (10c)$, abgezogen werden kann. Zum Abschluss dieses Schritts wird dann auch noch der nur von c abhängige Summand $(10c)^2$ subtrahiert.

Im vierten Schritt wird überprüft, für welches größtmögliche d die drei weiteren Summanden, die a, b, c und d enthalten, also $2 \cdot (1000a) \cdot (1d) + 2 \cdot (100b) \cdot (1d) + 2 \cdot (10c) \cdot (1d)$, abgezogen werden kann. Zum Abschluss dieses Schritts wird dann auch noch der nur von d abhängige Summand d^2 subtrahiert.

zu A 7.29:

Wesentlich für das Verfahren ist die Kenntnis der binomischen Formel:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, also im Falle der dritten Wurzel aus einer 5- oder 6-stelligen Zahl

$(10a+b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$.

Im ersten Schritt zieht man $1000a^3$ ab. In den dann übrig bleibenden Rest muss $300a^2b$ passen. Nachdem man so die zweite Ziffer des Ergebnisses herausgefunden hat, muss man den gesamten restlichen Term $300a^2b + 30ab^2 + b^3$ subtrahieren – im Schema wird das schrittweise durchgeführt.