Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 6.1:

					8 : 1
				7 : 1	
			6 : 1		7 : 2
		5: 1		6 : 2	
	4 : 1		5 : 2		6 : 3
3 : 1		4 : 2		5 : 3	
	3 : 2		4 : 3		5 : 4
		3 : 3		4 : 4	
			3 : 4		4 : 5
				3 : 5	
					3 : 6

Von den $2^5 = 32$ Wegen sind 1 + 5 + 10 + 10 = 26 Wege günstig für den 1. Spieler, 5 + 1 = 6 Wege günstig für den 2. Spieler. Daher erscheint es gerecht, wenn der ausgesetzte Preis im Verhältnis 26 : 6 aufgeteilt wird.

							9 : 0
						8 : 0	
					7 : 0		8 : 1
				6 : 0		7 : 1	
			5 : 0		6 : 1		7 : 2
		4 : 0		5: 1		6 : 2	
	3 : 0		4 : 1		5 : 2		6 : 3
2 : 0		3 : 1		4 : 2		5 : 3	
	2 : 1		3 : 2		4 : 3		5 : 4
		2 : 2		3 : 3		4 : 4	
			2 : 3		3 : 4		4 : 5
				2 : 4		3 : 5	
					2 : 5		3 : 6
						2 : 6	
							2 : 7

Von den $2^7 = 128$ Wegen sind 1 + 7 + 21 + 35 + 35 = 99 Wege günstig für den 1. Spieler, 21 + 7 + 1 = 29 Wege günstig für den 2. Spieler. Daher erscheint es gerecht, wenn der ausgesetzte Preis im Verhältnis 99 : 29 aufgeteilt wird.

						7 : 2
					6 : 2	
				5 : 2		6 : 3
			4 : 2		5 : 3	
		3 : 2		4 : 3		5 : 4
	2 : 2		3 : 3		4 : 4	
1 : 2		2 : 3		3 : 4		4 : 5
	1 : 3		2 : 4		3 : 5	
		1 : 4		2 : 5		3 : 6
			1 : 5		2 : 6	
				1 : 6		2 : 7
					1 : 7	
						1 : 8

Von den $2^6 = 64$ Wegen sind 1 + 6 + 15 = 22 Wege günstig für den 1. Spieler, 20 + 15 + 6 + 1 = 42 Wege günstig für den 2. Spieler. Daher erscheint es gerecht, wenn der ausgesetzte Preis im Verhältnis 22 : 42 aufgeteilt wird.

zu A 6.2:

allgemein: $\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{2n}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}$

n gerade (also 2*n* durch 4 teilbar):

$$2\cdot\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{n-2}\right]+\binom{2n}{n}=2\cdot\left[\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{n-1}\right]\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{n-2}+\binom{2n-1}{n}\right]=2\cdot\left[\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{n-1}\right]$$

da $\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n}$

n ungerade (also 2*n* lässt bei der Division durch 4 den Rest 2):

$$2\cdot\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{n-1}\right]=2\cdot\left[\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{n-2}\right]+\binom{2n}{n}\Leftrightarrow$$

$$2\cdot\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\ldots+\binom{2n}{n-1}\right]=2\cdot\left[\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\ldots+\binom{2n}{n-2}+\binom{2n-1}{n}\right]$$

da $\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n}$

zu A 6.3:

Man stelle sich vor, dass der Ursprung des Koordinatensystems in den Punkt (a | b) verlegt wird. Dann hat der Punkt (c | d) die neuen Koordinaten (c – a| d – b). Dann gibt es gemäß den Überlegungen des Satzes $\binom{c+d-a-b}{c-a}=\binom{c+d-a-b}{d-b}$ verschiedene Wege vom Ursprung zu diesem Punkt.

zu A 6.4:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{10}{k}$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

$\frac{10}{1}$ $\quad \frac{45}{10}=\frac{9}{2}$ $\quad \frac{120}{45}=\frac{8}{3}$ $\quad \frac{210}{120}=\frac{7}{4}$ $\quad \frac{252}{210}=\frac{6}{5}$ $\quad \frac{210}{252}=\frac{5}{6}$ $\quad \frac{120}{210}=\frac{4}{7}$ $\quad \frac{45}{120}=\frac{3}{8}$ $\quad \frac{10}{45}=\frac{2}{9}$ $\quad \frac{1}{10}$

zu A 6.5:

- **Regelmäßiges Viereck im Kreis**

– Die $\binom{4}{1}=4$ Eckpunkte eines regelmäßigen 4-Ecks bilden (Quadrat) – jeder für sich genommen – jeweils eine 1-elementige Teilmenge der 4-elementigen Menge.

– Es gibt $\binom{4}{2}=6$ Möglichkeiten, mit zwei der vier Eckpunkte des regelmäßigen 4-Ecks ein Zweieck (= Strecke) zu bilden (4 Seiten + 2 Diagonalen).

– Es gibt $\binom{4}{3}=4$ Möglichkeiten, mit drei der vier Eckpunkte des regelmäßigen 4-Ecks ein Dreieck zu bilden.

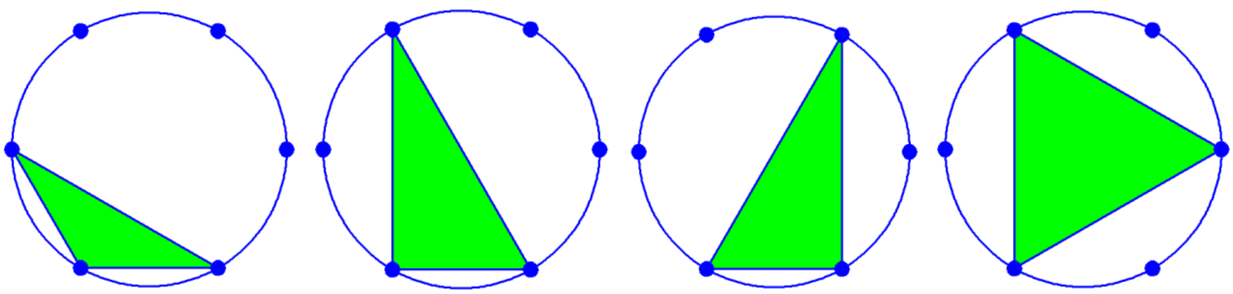
– Es gibt $\binom{4}{4}=1$ Möglichkeit, mit den vier Eckpunkten ein Viereck zu bilden.

- **Regelmäßiges Sechseck im Kreis**

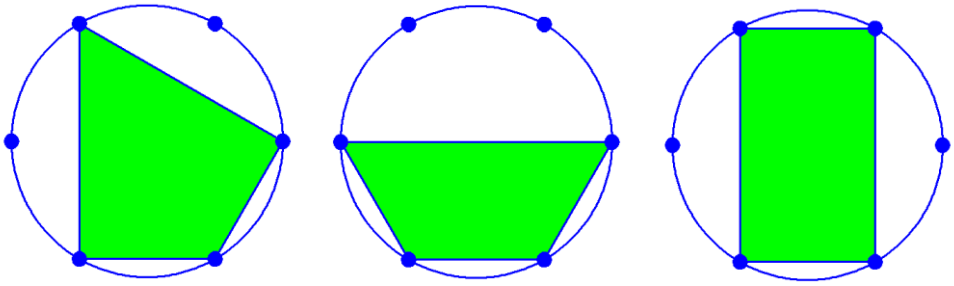
– Die $\binom{6}{1}=6$ Eckpunkte eines regelmäßigen 6-Ecks bilden – jeder für sich genommen – jeweils eine 1-elementige Teilmenge der 6-elementigen Menge.

– Es gibt $\binom{6}{2}=15$ Möglichkeiten, mit zwei der sechs Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks ein Zweieck (= Strecke) zu bilden (6 Seiten + 9 Diagonalen).

– Es gibt $\binom{6}{3}=20$ Möglichkeiten, mit drei der sechs Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks ein Dreieck zu bilden (je 6 Variationen des ersten, zweiten und dritten Typs, zwei Variationen des vierten Typs).



– Es gibt $\binom{6}{4}=15$ Möglichkeiten, mit vier der sechs Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks ein Viereck zu bilden (je 6 Variationen des ersten und zweiten Typs, 3 Variationen des dritten Typs).



– Es gibt $\binom{6}{5} = 6$ Möglichkeiten, mit fünf der sechs Eckpunkte des regelmäßigen 6-Ecks ein Fünfeck zu bilden.

– Es gibt $\binom{6}{6} = 1$ Möglichkeit, mit den sechs Eckpunkten ein Sechseck zu bilden.

zu A 6.6:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + \frac{(-2)\cdot(-3)}{2}\cdot x^2 + \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{3\cdot 2}\cdot x^3 + \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot x^4 + \ldots$$
$$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$(1+x)^{-4} = 1 - 4x + \frac{(-4)\cdot(-5)}{2}\cdot x^2 + \frac{(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)}{3\cdot 2}\cdot x^3 + \frac{(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(-7)}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot x^4 + \ldots$$
$$= 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 + ..$$

zu A 6.7:

((Baumdiagramm selbst))

k	P(k-mal Wappen)
0	$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
1	$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$
2	$6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{16}$
3	$4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$
4	$1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

zu A 6.8:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb)$$
$$= aaaa + aaab + aaba + aabb + abaa + abab + abba + abbb + baaa$$
$$+ baab + baba + babb + bbaa + bbab + bbba + bbbb$$

Die Terme *aaaa* bzw. *bbbb* stehen für einen Pfad mit vier Erfolgen bzw. vier Misserfolgen.

Die vier Terme *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa* stehen für einen Pfad mit drei Erfolgen und einem Misserfolg.

Die sechs Terme *aabb*, *abab*, *abba*, *baab*, *baba*, *bbaa* stehen für einen Pfad mit je zwei Erfolgen bzw. Misserfolgen.

Die vier Terme *bbba*, *bbab*, *babb*, *abbb* stehen für einen Pfad mit einem Erfolg und drei Misserfolgen.

zu A 6.9:

Bei den Abbildungen 6.4 ist leider ein Fehler unterlaufen – hier die korrigierten Grafiken:

1															
1	1														
1	2	1													
1	3	3	1												
1	4	6	4	1											
1	5	10	10	5	1										
1	6	15	20	15	6	1									
1	7	21	35	35	21	7	1								
1	8	28	56	70	56	28	8	1							
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	55	78	91	105		
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455			
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365				
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003					
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005						
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435							
1	9	45	165	495	1287	3003	6435								
1	10	55	220	715	2002	5005									
1	11	66	286	1001	3003										
1	12	78	364	1365											
1	13	91	455												
1	14	105													
1	15														
1															

Die Eigenschaft ergibt sich, wenn man die Zahlen in der zweiten Grafik *zeilenweise* betrachtet:

Die Summe der markierten Zahlen der ersten Zeile ergibt die letzte markierte Zahl der zweiten Zeile $(1+1+1+1+1)=5$,
die Summe der markierten Zahlen der zweiten Zeile ergibt die letzte markierte Zahl der dritten Zeile $(1+2+3+4+5)=15$,
die Summe der markierten Zahlen der dritten Zeile ergibt die letzte markierte Zahl der vierten Zeile $(1+3+6+10+15)=35$,
die Summe der markierten Zahlen der vierten Zeile ergibt die darunter stehende Zahl der fünften Zeile $(1+4+10+20+35)=70$.

Dies ist insgesamt so viel wie die Summe der ersten fünf Zahlen der fünften Spalte vermindert um die erste Zahl, also so viel wie die fünfte Zahl in der sechsten Spalte vermindert um 1:

$$(1+1+1+1+1)+(1+2+3+4+5)+(1+3+6+10+15)+(1+4+10+20+35)+1$$
$$=(5+15+35+70)+1=126$$

Notiert man dies mithilfe der Binomialkoeffizienten, so ergibt sich

$$\left[\binom{0}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{2}+\binom{3}{3}+\binom{4}{4}\right]+\left[\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\binom{4}{3}+\binom{5}{4}\right]+\left[\binom{2}{0}+\binom{3}{1}+\binom{4}{2}+\binom{5}{3}+\binom{6}{4}\right]$$
$$+\left[\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}\right]+1=\left[\binom{5}{4}+\binom{6}{4}+\binom{7}{4}+\binom{8}{4}\right]+1=\binom{9}{5}+1$$

zu A 6.10:

Die Dualzahlentwicklung von beispielsweise n = 15 ist 1111, d. h. es gilt: $E_{15} = \{0, 1, 2, 3\}$. Jede natürliche Zahl, die kleiner ist als 15, hat eine Dualzahlentwicklung, bei der die Einsen nur an Stellen stehen können, die in $E_{15} = \{0, 1, 2, 3\}$ enthalten sind. Daher sind alle diese Binomialkoeffizienten ungerade.

Allgemein gilt dies für alle natürlichen Zahlen, die 1 kleiner sind als eine Zweierpotenz. Daher ist die nächste Zeile mit lauter ungeraden Binomialkoeffzienten die Zeile 31.

zu A 6.11:

$5_{10} = {}_2101$, $10_{10} = {}_21010$, also $E_5 = \{0, 2\}$ und $E_{10} = \{1, 3\}$. Da E_5 keine Teilmenge von E_{10} ist, ist $\binom{10}{5}$ eine gerade Zahl.

zu A 6.12:

Ausgehend vom gelben mittleren Feld, in dem $E_{15} = \{0, 1, 2, 3\}$ notiert ist (also eine 4-elementige Menge), sind in den oliv-farbenen Feldern die vier 3-elementigen Mengen dargestellt, die Teilmengen von $E_{15} = \{0, 1, 2, 3\}$ sind. Jede dieser 3-elementigen Mengen besitzt drei 2-elementige Teilmengen – im Diagramm ist aber nur Platz für zwei dieser Teilmengen. Daher ist ein zweites Diagramm erforderlich.

Die Pfeile im Diagramm sind so zu lesen, das die Pfeilrichtung jeweils auf eine Obermenge zeigt.

Dass beispielsweise $\binom{10}{5}$ eine gerade Zahl ist, kann man in den Diagrammen daran erkennen, dass es keinen Weg aus Pfeilen vom 5er-Feld zum 10er-Feld gibt. Und vom 5er-Feld ausgehend, erkennt man, dass nur die Binomialkoeffizienten $\binom{7}{5}$, $\binom{13}{5}$ und $\binom{15}{5}$ ungerade sind. Geht man vom 4er-Feld aus, dann findet man: $\binom{5}{4}$, $\binom{6}{4}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{12}{4}$, $\binom{13}{4}$, $\binom{14}{4}$ und $\binom{15}{4}$ sind ungerade.

zu A 6.13:

((eigene Recherchen))

zu A 6.14:

Die betr. Zeilen sind Zeilen mit einer Primzahl-Nummer. Bei der Darstellung eines Binomialkoeffizienten in Produktform lässt sich dieser im Zähler stehende Faktor mit keiner der im Nenner auftretenden Faktoren kürzen, da es sich ja um eine Primzahl handelt.

Beispiele: $\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$, $\binom{11}{4} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 10 \cdot 3 = 330$,

$\binom{11}{5} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 462$

zu A 6.15 und A 6.16:

((selbst gewählte Beispiele))

zu A 6.17:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{105} + \frac{1}{168} + \ldots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{42} - \frac{1}{56}\right) + \ldots$

zu A 6.18:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 \cdot \binom{n}{1}} = \frac{1}{n} \; ; \; \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{n \cdot \binom{n}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k \cdot \binom{n+1}{k}} + \frac{1}{(k+1) \cdot \binom{n+1}{k+1}} = \frac{k! \cdot (n+1-k)!}{k \cdot (n+1)!} + \frac{(k+1)! \cdot (n-k)!}{(k+1) \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{(k-1)! \cdot (n+1-k)!}{(n+1)!} + \frac{k! \cdot (n-k)!}{(n+1)!} = \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{(n+1)!} \cdot [(n+1-k)+(k)] = \frac{(k-1)! \cdot (n-k)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{\frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!}} = \frac{1}{k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{1}{k \cdot \binom{n}{k}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

zu A 6.19:

1. Zeile: $1 = 1 \cdot 2^0$

2. Zeile: $2 + 2 = 4 = 2 \cdot 2^1$

3. Zeile: $3 + 6 + 3 = 12 = 3 \cdot 2^2$

4. Zeile: $4 + 12 + 12 + 4 = 32 = 4 \cdot 2^3$

5. Zeile: $5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 80 = 5 \cdot 2^4$

6. Zeile: $6 + 30 + 60 + 60 + 30 + 6 = 192 = 6 \cdot 2^5$

7. Zeile: $7 + 42 + 105 + 140 + 105 + 42 + 7 = 448 = 7 \cdot 2^6$

8. Zeile: $8 + 56 + 168 + 280 + 280 + 168 + 56 + 8 = 1024 = 8 \cdot 2^7$

9. Zeile: $9 + 72 + 252 + 504 + 630 + 504 + 252 + 72 + 9 = 2304 = 9 \cdot 2^8$

10. Zeile: $10 + 90 + 360 + 840 + 1260 + 1260 + 840 + 360 + 90 + 10 = 5120 = 10 \cdot 2^9$

Die allgemeine Regel $\frac{1}{\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}} + \frac{1}{\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}} + \frac{1}{\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}} + \ldots + \frac{1}{\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}} = n \cdot 2^{n-1}$ ergibt sich aus dem Zusammenhang

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{n \cdot \binom{n-1}{k-1}}$, also $\frac{1}{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$, und der Eigenschaft, dass die Summe der Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile des Pascal'schen Dreiecks gleich 2^n ist.