Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 5.1:

Eine natürliche Zahl ist genau dann

– durch 8 teilbar, wenn die 3er-Endzahl durch 8 teilbar ist,
– durch 20 teilbar, wenn die 2er-Endzahl durch 20 teilbar ist,
– durch 40 teilbar, wenn die 3er-Endzahl durch 40 teilbar ist,
– durch 50 teilbar, wenn die 2er-Endzahl durch 50 teilbar ist.

teilbar durch ↓	640	7920	3192	7800	800	3130	84980
8	ja	ja	ja	ja	ja	nein	nein
20	ja	ja	nein	ja	ja	nein	ja
40	ja	ja	nein	ja	ja	nein	nein
50	nein	nein	nein	ja	ja	nein	nein

zu A 5.2:

- *Teilbarkeit durch 3*:

685 → (Ziffer 6 weglassen, Ziffer 8 um 6 vermindern, Ziffer 5 um 3 vermindern) → 22 → Quersumme = 4 → 685 ist nicht durch 3 teilbar

429 → (Ziffer 9 weglassen, Ziffer 4 um 3 vermindern) → 12 → Quersumme = 3 → 429 ist durch 3 teilbar

264 → (Ziffer 6 weglassen, Ziffer 4 um 3 vermindern) → 21 → Quersumme = 3 → 264 ist durch 3 teilbar

25773 → (Ziffer 3 weglassen, Ziffer 5 um 3 vermindern, Ziffern 7 um 6 vermindern) → 2211 → Quersumme = 6 → 25773 ist durch 3 teilbar

20272 → (Ziffer 7 um 6 vermindern, Ziffer 0 weglassen) → 2212 → Quersumme = 7 → 20272 ist nicht durch 3 teilbar

75564 → (Ziffer 6 weglassen, Ziffern 5 um 3 vermindern, Ziffer 4 um 3 vermindern, Ziffer 7 um 6 vermindern) → 1221 → Quersumme = 6 → 75564 ist durch 3 teilbar

- *Teilbarkeit durch 9*:

685 → Quersumme = 19 → 685 ist nicht durch 9 teilbar

429 → (Ziffer 9 weglassen) → 42 → Quersumme = 6 → 429 ist nicht durch 9 teilbar

264 → Quersumme = 12 → 264 ist nicht durch 9 teilbar

25773 → Quersumme = 24 → 25773 ist nicht durch 9 teilbar

20272 → Quersumme = 13 → 20272 ist nicht durch 9 teilbar

75564 → Quersumme = 27 → 75564 ist durch 9 teilbar

zu A 5.3:

Eine natürliche Zahl ist genau dann

– durch 11 teilbar, wenn die 2er-Quersumme durch 11 teilbar ist,
– durch 27 teilbar, wenn die 3er-Quersumme durch 27 teilbar ist,

– durch 33 teilbar, wenn die 2er-Quersumme durch 33 teilbar ist,
– durch 37 teilbar, wenn die 3er-Quersumme durch 37 teilbar ist,
– durch 41 teilbar, wenn die 5er-Quersumme durch 41 teilbar ist,

teilbar durch ↓	296406	628001	1057595	661122	606636	704913
11	ja	ja	nein	ja	nein	nein
27	ja	nein	nein	ja	ja	nein
33	ja	nein	nein	ja	nein	ja
37	nein	ja	nein	nein	nein	nein
41	nein	nein	ja	nein	ja	ja

zu A 5.4:

(a) Alle 10er-Potenzen lassen bei der Division durch 9 den Rest 1; deshalb hat die Quersumme bzgl. 9 die gleiche Teilbarkeitseigenschaft wie die Zahl selbst.
(b) Die Übereinstimmung der Reste ist kein Beweis für die Richtigkeit der Multiplikation; es ist ja dann nur gezeigt worden, dass die Reste übereinstimmen.
(c) 43 · 57 = 2451: R(2451) = 3; R(43) · R(57) = 7 · 3 = 21; R(21) = 3
Es gilt aber beispielsweise auch R(2271) = 3, R(2361) = 3, R(2541) = 3 usw.

zu A 5.5:

Das Abtrennen der letzten Ziffer und der anschließenden Subtraktion ist gleichwertig damit, dass man die letzte Ziffer mit (-1) multipliziert und die Ziffern davor insgesamt mit (+1). Dies wird dann systematisch fortgesetzt, bis nur noch zwei Ziffern übrig sind.

zu A 5.6:

Bzgl. der Division durch 11 ist die Multiplikation der letzten Ziffer mit 10 das Gleiche wie die Multiplikation der letzten Ziffer mit (-1).

zu A 5.7:

- **Methode der alternierenden Summe:**

1237654: (+4) + (-5) + (+6) + (-7) + (+3) + (-2) + (+1) = 0 – die Zahl ist durch 11 teilbar

246807: (+7) + (-0) + (+8) + (-6) + (+4) + (-2) = 11 – die Zahl ist durch 11 teilbar

147258369: (+9) + (-6) + (+3) + (-8) + (+5) + (-2) + (+7) + (-4) + (+1) = 5 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

87564312: (+2) + (-1) + (+3) + (-4) + (+6) + (-5) + (+7) + (-8) = 0 – die Zahl ist durch 11 teilbar

198237645: (+5) + (-4) + (+6) + (-7) + (+3) + (-2) + (+8) + (-9) + (+1) = 1 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

- **Methode A 5.5:**

1237654 → 123761 → 12375 → 1232 → 121 → 11 – die Zahl ist durch 11 teilbar

246807 → 24673 → 2464 → 242 → 22 – die Zahl ist durch 11 teilbar

147258369 → 14725827 → 1472575 → 147252 → 14723 → 1469 → 137 → 6 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

87564312 → 8756429 → 875633 → 87560 → 8756 → 869 → 77 – die Zahl ist durch 11 teilbar

198237645 → 19823759 → 1982366 → 198230 → 19823 → 1979 → 188 → 10 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

- **Methode A 5.6:**

1237654 → 123805 → 12430 → 1243 → 154 → 55 – die Zahl ist durch 11 teilbar

246807 → 24750 → 2475 → 297 → 99 – die Zahl ist durch 11 teilbar

147258369 → 14725926 → 1472652 → 147285 → 14778 → 1557 → 225 → 72 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

87564312 → 8756451 → 875655 → 87615 → 8811 → 891 → 99 – die Zahl ist durch 11 teilbar

198237645 → 19823814 → 1982421 → 198252 → 19845 → 2034 → 243 → 54 – die Zahl ist nicht durch 11 teilbar

zu A 5.8:

Eine natürliche Zahl ist genau dann

– durch 11 teilbar, wenn die alternierende 1er-Quersumme der Zahl durch 11 teilbar ist (keine Erweiterung, da 11 eine Primzahl ist)

– durch 101 teilbar, wenn die alternierende 2er-Quersumme der Zahl durch 101 teilbar ist (keine Erweiterung, da 101 eine Primzahl ist),

– durch 7, 13, 77, 91, 143 bzw. 1001 teilbar, wenn die alternierende 3er-Quersumme der Zahl durch 7, 13, 77, 91, 143 bzw. 1001 teilbar ist (da $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$),

– durch 73, 137 bzw. 10001 teilbar, wenn die alternierende 4er-Quersumme der Zahl durch 73, 137 bzw. 10001 teilbar ist (da $10001 = 73 \cdot 137$),

zu A 5.9:

Dies gilt, da 7 ein Teiler von 1001 ist ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$) und für 1001 gilt die alternierende 3er-Quersummen-Regel.

zu A 5.10:

Dies gilt, da 13 ein Teiler von 1001 ist ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$) und für 1001 gilt die alternierende 3er-Quersummen-Regel.

zu A 5.11:

((selbstgewählte Beispiele))

zu A 5.12:

a. Eine natürliche Zahl $10a + b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn auch ihr Doppeltes $20a + 2b$ durch 7 teilbar ist. Aus $20a + 2b = 21a + (2b - a) = 21a - (a - 2b)$ ergibt sich dann die Regel.

b. Eine natürliche Zahl $10a + b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn auch ihr Fünffaches $50a + 5b$ durch 7 teilbar ist. Aus $50a + 5b = 49a + (a + 5b)$ ergibt sich dann die Regel.

c. Die Regel folgt aus $10a + b = 7a + (3a + b)$.

d. Die Regel folgt aus $30a + 3b = 28a + (2a + 3b)$.

e. Die Regel folgt aus $1000a + b = 1001a + (b - a)$ und $1001 = 7 \cdot 143$.

zu A 5.13:

a. Eine natürliche Zahl $10a + b$ ist genau dann durch 13 teilbar, wenn auch ihr Vierfaches $40a + 4b$ durch 13 teilbar ist. Aus $40a + 4b = 39a + (a + 4b)$ ergibt sich dann die Regel.

b. Die Regel folgt aus $90a + 9b = 91a + (9b - a) = 91a - (a - 9b)$.

c. Die Regel folgt aus $100a + b = 104a + (b - 4a) = 104a - (4a - b)$ und $104 = 8 \cdot 13$.

zu A 5.14:

a. Eine natürliche Zahl $10a + b$ ist genau dann durch 17 teilbar, wenn auch ihr Fünffaches $50a + 5b$ durch 17 teilbar ist. Aus $50a + 5b = 51a + (5b - a) = 51a - (a - 5b)$ ergibt sich dann die Regel.

b. Die Regel folgt aus $100a + b = 102a + (b - 2a) = 102 - (2a - b)$ und $102 = 6 \cdot 17$.

zu A 5.15:

a. Eine natürliche Zahl $10a + b$ ist genau dann durch 19 teilbar, wenn auch ihr Doppeltes $20a + 2b$ durch 19 teilbar ist. Aus $20a + 2b = 19a + (a + 2b)$ ergibt sich dann die Regel.
b. Die Regel folgt aus $400a + 4b = 399a + (a + 4b)$ und $399 = 21 \cdot 19$.

zu A 5.16:

- Für die 10er-Potenzen gilt:

$1 = 0 \cdot 7 + 1$, $10 = 1 \cdot 7 + 3$, $100 = 14 \cdot 7 + 2$,

$1000 = 143 \cdot 7 - 1$, $10000 = 1429 \cdot 7 - 3$, $100000 = 14286 \cdot 7 - 2$,

$1000000 = 142857 \cdot 7 + 1$ usw.

- Für die 100er-Potenzen gilt:

$1 = 0 \cdot 7 + 1$, $100 = 14 \cdot 7 + 2$, $10000 = 1429 \cdot 7 - 3$,

$1000000 = 142857 \cdot 7 + 1$ usw.

- Für die 10er-Potenzen gilt:

$1 = 0 \cdot 13 + 1$, $10 = 1 \cdot 13 - 3$, $100 = 8 \cdot 13 - 4$,

$1000 = 77 \cdot 13 + 1$, $10000 = 769 \cdot 13 + 3$, $100000 = 7692 \cdot 13 + 4$,

$1000000 = 76923 \cdot 13 + 1$ usw.

((selbstgewählte Beispiele))

zu A 5.17:

Die Schreibweise „ababab“ steht für die natürliche Zahl

$(100.000a + 10.000b + 1.000a + 100b + 10a + 1b) = 101010a + 10101b = 10101 \cdot (10a + 1b)$

und $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.

zu A 5.18:

Die Schreibweise „abcabcabc“ steht für die natürliche Zahl

$(100.000.000a + 10.000.000b + 1.000.000c + 100.000a + 10.000b + 1.000c + 100a + 10b + 1c)$

$= 100.100.100a + 10.010.010b + 1.001.001a = 1001001 \cdot (100a + 10b + 1c)$

und $10101 = 3 \cdot 33367$.

Es gilt also nur, dass diese Zahl durch 3 und durch die Primzahl 33367 teilbar ist.

zu A 5.19:

a. Von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist eine gerade, die andere ungerade; deren Summe ist daher ungerade und deshalb nicht durch 2 teilbar. Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen hat eine bei der Division durch 3 den Rest 1, eine den Rest 2 und eine den Rest 0; addiert man die Reste, dann ergibt sich 3, was durch 3 teilbar ist.

b. Da eine von zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen gerade ist, lässt sich das Produkt immer durch 2 teilen. Da (mindestens) eine von drei aufeinander folgenden Zahlen eine gerade Zahl ist, lässt sich das Produkt auf jeden Fall durch 2 teilen; da genau eine von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 3 teilbar ist, ist auch das Produkt durch 3 teilbar.

c. Das Produkt von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar, weil es durch 2 und durch 3 teilbar ist (und diese beiden Zahlen zueinander teilerfremd sind).

d. k aufeinander folgende Zahlen lassen sich schreiben als, n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $n+(k-1)$; deren Summe ist $k \cdot n + [0 + 1 + 2 + 3 + (k-1)] = k \cdot n + ½ \cdot (k-1) \cdot k = k \cdot [\, n + ½ \cdot (k-1)\,]$.
Dieser Term ist durch k teilbar, falls der Klammerterm eine natürliche Zahl ist; letzteres ist der Fall, wenn $k-1$ eine gerade Zahl ist, also k eine ungerade Zahl ist.
Alternative Überlegung: Wenn k eine ungerade Zahl ist, dann gibt es eine „mittlere" Zahl m unter den k Zahlen; Vorgänger und Nachfolger dieser mittleren Zahl m unterscheiden sich um 1 von dieser Zahl, die Summe der drei Zahlen ist $(m-1) + m + (m+1) = 3m$, also durch 3 teilbar. Nimmt man dann jeweils auch die anderen Vorgänger und Nachfolger paarweise hinzu, dann ist analog die Summe der k Zahlen gleich $k \cdot m$, also durch k teilbar. Voraussetzung für diese Art der Summenbildung ist aber die Tatsache, dass k eine ungerade Zahl ist, es also eine mittlere Zahl gibt.

e. Allgemein ist genau eine von k aufeinander folgenden Zahlen durch k teilbar, da es bei der Division durch k nur die k verschiedenen Reste 0, 1, 2, ..., $k-1$ geben kann, folglich ist auch das Produkt durch k teilbar.

f. Wenn das Produkt von 3 aufeinander folgenden Zahlen durch 12 teilbar sein soll, muss entweder eine durch 4 teilbare Zahl unter den drei Zahlen sein oder zwei der drei Zahlen müssen gerade sein. Die erste Bedingung ist erfüllt, wenn die erste der 3 Zahlen bei der Division durch 4 nicht den Rest 1 lässt. Die zweite Bedingung gilt, wenn die erste der 3 Zahlen gerade ist (dann ist die dritte automatisch auch gerade) - in diesem Fall ist eine der beiden geraden Zahlen auch durch 4 teilbar und damit das Produkt der drei Zahlen sogar durch 24. Zusammengefasst: Das Produkt von 3 aufeinander folgenden Zahlen ist durch 12 teilbar, wenn die erste Zahl bei der Division durch 4 *nicht* den Rest 1 lässt (z. B. 1, 5, 9, 13, ...).
Wenn das Produkt von 3 aufeinander folgenden Zahlen durch 30 teilbar sein soll, muss mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar sein (durch 2 bzw. 3 teilbar ist sowieso eine der drei Zahlen), d. h., die erste, zweite oder dritte Zahl muss durch 5 teilbar sein, d.h., die erste der 3 aufeinander folgenden Zahlen muss bei der Division durch 5 den Rest 3 oder den Rest 4 lassen oder selbst durch 5 teilbar sein.

g. Von 4 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist eine durch 2 und eine durch 4 teilbar, damit ist das Produkt auf jeden Fall durch 8 teilbar. Außerdem ist mindestens eine der 4 Zahlen durch 3 teilbar und daher ist das Produkt der Zahlen sogar immer durch 24 teilbar.
Falls die erste der 4 Zahlen durch 3 teilbar ist, dann ist auch die vierte Zahl durch 3 teilbar und damit das Produkt der 4 Zahlen durch 72.
Falls eine der 4 Zahlen auch durch 5 teilbar ist (das ist der Fall, wenn die erste Zahl bei der Division durch 5 nicht den Rest 1 lässt), dann ist die Zahl auch immer durch 120 teilbar.

zu A 5.20:

Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt: $1+2+3+...+n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$

Falls n eine ungerade Zahl ist, dann ist $n + 1$ eine gerade Zahl und der Bruch $\frac{n+1}{2}$ kann gekürzt werden;

die natürlichen Zahlen $\frac{n+1}{2}$ und n sind Teiler von $1+2+3+...+n$.

Falls n eine gerade Zahl ist, kann der Bruch $\frac{n}{2}$ gekürzt werden; die natürlichen Zahlen $\frac{n}{2}$ und $n + 1$ sind Teiler von $1+2+3+...+n$.

(a) *graphischer Beweis*: Die Summe der ersten sieben natürlichen Zahlen kann wie folgt als Muster aus blauen Punkten visualisiert werden. Diese Dreiecksfigur kann man zu einem Quadrat ergänzen. In diesem Quadrat ist die Summe der ersten sieben natürlichen Zahlen sowie die Summe der ersten sechs natürlichen Zahlen (goldgelb) dargestellt.

Sowohl die Summe der ersten sieben natürlichen Zahlen als auch die Summe der ersten sechs natürlichen Zahlen ist eine durch 7 teilbare Zahl, wie man aus der Färbung der zweiten Figur ablesen kann: 7 blaue Punkte in der Diagonalen, zweimal 6 + 1 grüne Punkte, zweimal 5 + 2 rote Punkte, zweimal 4 + 3 gelbe Punkte.

Etwas formaler: Die Summe 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 kann wie folgt notiert werden: (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4).

Da hier eine *gerade* Anzahl von Summanden vorliegt, ergänzen sich jeweils zwei der Summanden zu 7.

Daher ist sowohl die Summe (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) als auch die Summe (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) durch 7 teilbar.

(b) *graphischer Beweis*: Wenn n eine ungerade Zahl ist, dann kann man Punkte von den Säulen, die rechts von der Mitte liegen auf die Säulen links verschieben. Es entsteht ein rechteckiges Punktmuster aus $\frac{n+1}{2}\cdot n$ Punkten. Wenn n eine gerade Zahl ist, können ebenfalls Punkte verlagert werden; dann entsteht ein rechteckiges Punktmuster aus $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$ Punkten.

zu A 5.21:

- Eine im Sechsersystem dargestellte natürliche Zahl ist genau dann durch die Potenz $(10^k)_6$ teilbar, wenn die letzten k Ziffern aus Nullen bestehen.

Beispiele: $30_6\ (=18_{10})$ ist durch $10_6\ (=6_{10})$ teilbar, $200_6\ (=72_{10})$ ist durch $100_6\ (=36_{10})$ teilbar, $5000_6\ (=1080_{10})$ ist durch $1000_6\ (=216_{10})$ teilbar,

- Eine im Sechsersystem dargestellte natürliche Zahl ist genau dann durch die Potenz $(2^k)_6$ teilbar, wenn die Zahl aus den letzten k Ziffern durch $(2^k)_6$ teilbar ist.

Beispiele: $12_6\ (=8_{10})$ ist durch ${2^1}_6\ (=2_{10})$ teilbar, $324_6\ (=124_{10})$ ist durch ${2^2}_6\ (=4_{10})$ teilbar, $1304_6\ (=328_{10})$ ist durch ${2^3}_6\ (=8_{10})$ teilbar

- Eine im Sechsersystem dargestellte natürliche Zahl ist genau dann durch die Potenz $(3^k)_6$ teilbar, wenn die Zahl aus den letzten k Ziffern durch $(3^k)_6$ teilbar ist,

Beispiele: $23_6\ (=15_{10})$ ist durch ${3^1}_6\ (=3_{10})$ teilbar, $113_6\ (=45_{10})$ ist durch ${3^2}_6\ (=9_{10})$ teilbar, $4113_6\ (=909_{10})$ ist durch ${3^3}_6\ (=27_{10})$ teilbar

- Eine im Sechsersystem dargestellte natürliche Zahl ist genau dann durch $(10^k-1)_6$ teilbar, wenn die *k-er*-Quersumme der Zahl durch $(10^k-1)_6$ teilbar ist,

Beispiele: $41_6\ (=25_{10})$ ist durch $(10^1-1)_6\ (=5_{10})$ teilbar, $1045_6\ (=245_{10})$ ist durch $(10^2-1)_6=55_6\ (=35_{10})$ teilbar, $10545_6\ (=1505_{10})$ ist durch $(10^3-1)_6=555_6\ (=215_{10})$ teilbar

- Eine im Sechsersystem dargestellte natürliche Zahl ist genau dann durch $(10^k+1)_6$ teilbar, wenn die alternierende *k-er*-Quersumme der Zahl durch $(10^k+1)_6$ teilbar ist.

Beispiele: $143_6 \ (= 63_{10})$ ist durch $(10^1 + 1)_6 \ (= 7_{10})$ teilbar, $1212_6 \ (= 296_{10})$ ist durch $(10^2 + 1)_6 = 101_6 \ (= 37_{10})$ teilbar, $312312_6 \ (= 25172_{10})$ ist durch $(10^3 + 1)_6 = 1001_6 \ (= 217_{10})$ teilbar

zu A 5.22:

a. Die Regel gilt, weil die betrachtete Zahl *n* sich darstellen lässt als $100_6 \cdot a + b = 55_6 \cdot a + (a + b)$. Da $55_6 \cdot a$ durch 11_6 teilbar ist, ist die betrachtete Zahl genau dann durch 11_6 teilbar, wenn $a + b$ durch 11_6 teilbar ist.

b. Die Regel gilt, weil die betrachtete Zahl *n* sich darstellen lässt als $1000_6 \cdot a + b = 1001_6 \cdot a + (b - a)$. Da $1001_6 \cdot a$ durch 11_6 teilbar ist, ist die betrachtete Zahl genau dann durch 11_6 teilbar, wenn $b + a$ durch 11_6 teilbar ist.

Beispiel: Die Senärzahl 32512_6 ist durch 11_6 teilbar, denn es gilt: $(512 - 32 = 440)_6$, und 440_6 ist durch 11_6 teilbar.

c. **Teilbarkeit durch 21_6:** Man unterteilt die zu untersuchende natürliche Zahl in zwei Teilzahlen, die aus der letzten Ziffer bestehende Zahl *b* und die aus den restlichen vorderen Ziffern bestehende Zahl *a*. Dann prüft man, ob $a - 2b$ durch 21_6 teilbar ist.

Begründung: Eine natürliche Zahl $(10a + b)_6$ ist genau dann durch 21_6 teilbar, wenn auch ihr Doppeltes durch 21_6 teilbar ist. Das Doppelte ist $(20a + 2b)_6 = (21)_6 \cdot a - (a - 2b)_6$.

Beispiel: Die Senärzahl 1133_6 ist durch 21_6 teilbar, weil $(113 - 2 \cdot 3)_6 = 103_6$ durch 21_6 teilbar ist, und dieses gilt, weil $(10 - 2 \cdot 3)_6 = (10 - 10)_6 = 0_6$ durch 21_6 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 25_6: Man unterteilt die zu untersuchende natürliche Zahl in zwei Teilzahlen, die aus der letzten Ziffer bestehende Zahl *b* und die aus den restlichen vorderen Ziffern bestehende Zahl *a*. Dann prüft man, ob $a + 3b$ durch 25_6 teilbar ist.

Begründung: Eine natürliche Zahl $(10a + b)_6$ ist genau dann durch 25_6 teilbar, wenn auch ihr Dreifaches durch 25_6 teilbar ist. Das Dreifache ist $(30a + 3b)_6 = (25)_6 \cdot a + (a + 3b)_6$.

Beispiel: Die Senärzahl 1255_6 ist durch 25_6 teilbar, weil $(125 + 3 \cdot 5)_6 = (125 + 23)_6 = 152_6$ durch 25_6 teilbar ist, und dieses gilt, weil $(15 + 3 \cdot 2)_6 = (15 + 10)_6 = 25_6$ durch 25_6 teilbar ist.

Teilbarkeit durch 31_6: Man unterteilt die zu untersuchende natürliche Zahl in zwei Teilzahlen, die aus der letzten Ziffer bestehende Zahl *b* und die aus den restlichen vorderen Ziffern bestehende Zahl *a*. Dann prüft man, ob $a - 3b$ durch 31_6 teilbar ist.

Begründung: Eine natürliche Zahl $(10a + b)_6$ ist genau dann durch 31_6 teilbar, wenn auch ihr Dreifaches durch 31_6 teilbar ist. Das Dreifache ist $(30a + 3b)_6 = (31)_6 \cdot a - (a - 3b)_6$.

Beispiel: Die Senärzahl 1104_6 ist durch 31_6 teilbar, weil $(110 - 3 \cdot 4)_6 = (110 - 20)_6 = 50_6$ durch 25_6 teilbar ist.

zu A 5.23:

Beispiele von Senärzahlen aus Nullen und Einsen, die sich als Produkt von Primfaktoren darstellen lassen:

- $1001_6 = 217_{10} = (7 \cdot 31)_{10} = (11 \cdot 51)_6$ – daher sind Senärzahlen vom Typ *abcabc* durch 11_6 und durch 51_6 teilbar.
- $100001_6 = 7777_{10} = (7 \cdot 11 \cdot 101)_{10} = (11 \cdot 15 \cdot 245)_6$ – daher sind Senärzahlen vom Typ *abcdeabcde* durch 11_6 und durch 15_6 sowie durch 245_6 teilbar.
- $10101_6 = 1333_{10} = (31 \cdot 43)_{10} = (51 \cdot 111)_6$ – daher sind Senärzahlen vom Typ *ababab* durch 51_6 und durch 111_6 teilbar.
- $1001001_6 = 46873_{10} = (19 \cdot 2467)_{10} = (31 \cdot 15231)_6$ – daher sind Senärzahlen vom Typ *abcabcabc* durch 31_6 und durch 15231_6 teilbar.

zu A 5.24:

durch 10_{12} (= 12_{10}) teilbar: z. B. $70_{12} = 84_{10}$, $110_{12} = 156_{10}$, $350_{12} = 204_{10}$

durch 100_{12} (= 144_{10}) teilbar: $300_{12} = 432_{10}$, $2100_{12} = 3600_{10}$, $1100_{12} = 1872_{10}$

durch 2_{12} (= 2_{10}) teilbar: $14_{12} = 16_{10}$, $20X_{12} = 154_{10}$, $XE8_{12} = 1580_{10}$

durch 3_{12} (= 3_{10}) teilbar: $X0_{12} = 120_{10}$, $133_{12} = 183_{10}$, $E9_{12} = 141_{10}$

durch 4_{12} (= 4_{10}) teilbar: $E0_{12} = 132_{10}$, $124_{12} = 172_{10}$, $X8_{12} = 128_{10}$

durch 6_{12} (= 6_{10}) teilbar: $20_{12} = 24_{10}$, $36_{12} = 42_{10}$, $E6_{12} = 138_{10}$

durch 8_{12} (= 8_{10}) teilbar: $134_{12} = 184_{10}$ (*2er-Endzahl*: $34_{12} = 40_{10}$), $220_{12} = 312_{10}$ (*2er-Endzahl*: $20_{12} = 24_{10}$), $194_{12} = 256_{10}$ (*2er-Endzahl*: $94_{12} = 112_{10}$)

durch 9_{12} (= 9_{10}) teilbar: $146_{12} = 198_{10}$ (*2er-Endzahl*: $46_{12} = 54_{10}$), $223_{12} = 315_{10}$ (*2er-Endzahl*: $23_{12} = 27_{10}$), $3X6_{12} = 558_{10}$ (*2er-Endzahl*: $X6_{12} = 126_{10}$)

durch 5_{12} (= 5_{10}) teilbar: $140E_{12} = 2315_{10}$ (*alternierende 2er-Quersumme*: (0E) – (14) = E – 5 = 5),
$12763_{12} = 25275_{10}$ (*alternierende 2er-Quersumme*: (01+63) – (27) = 64 – 9 = 55),
$23214_{12} = 46960_{10}$ (*alternierende 2er-Quersumme*: (32) – (02+14) = 32 – 16 = 18)

durch 7_{12} (= 7_{10}) teilbar: $1344_{12} = 2212_{10}$ (*alternierende 3er-Quersumme*: 344 – 001 = 343),
$21045_{12} = 43253_{10}$ (*alternierende 3er-Quersumme*: 045 – 021 = 24),
$33335_{12} = 67865_{10}$ (*alternierende 3er-Quersumme*: 335 – 033 = 302),

durch E_{12} (= 11_{10}) teilbar: $128_{12} = 176_{10}$ (Quersumme: 1+2+8 = E),
$4322_{12} = 7370_{10}$ (Quersumme: 4+3+2+2 = E), $13576_{12} = 26730_{10}$ (Quersumme: 1+3+5+7+6 = 1X)

durch 11_{12} (= 13_{10}) teilbar: $132_{12} = 182_{10}$ (*alternierende Quersumme*: 1–1 = 0; *2er-Quersumme*: 1+32 = 33),
$1122_{12} = 1898_{10}$ (*alternierende Quersumme*: 1–1+2–2 = 0; *2er-Quersumme*:11 + 22 = 33),
$11121_{12} = 22634_{10}$ (*alternierende Quersumme*: 1–1+1–2+1 = 0; *2er-Quersumme*: 1 + 11 + 21 = 33)

zu A 5.25:

- **Teilbarkeit durch 8 und 9:** Da 144 durch 8 und durch 9 teilbar ist, kommt es bei einer Duodezimalzahl nur auf die beiden Endziffern an.
- **Teilbarkeit durch 5:** Da jede Potenz von $144_{10} = 100_{12}$ bei der Division durch 5 abwechselnd den Rest +1 bzw. -1 lässt, genügt es die *alternierende 2er-Quersumme* zu betrachten.
- **Teilbarkeit durch 7:** Da jede Potenz von $1728_{10} = 1000_{12}$ bei der Division durch 7 abwechselnd den Rest +1 bzw. -1 lässt, genügt es die *alternierende 3er-Quersumme* zu betrachten.
- **Teilbarkeit durch E_{12} (= 11_{10}):** Da jede 12er-Potenz bei der Division durch E_{12} den Rest 1 lässt, genügt es, die Quersumme zu betrachten.
- **Teilbarkeit durch 11_{12} (= 13_{10}):** Da jede 12er-Potenz bei der Division durch 11_{12} abwechselnd den Rest +1 bzw. -1 lässt, genügt es, die alternierende Quersumme zu betrachten. Die Regel bzgl. der 2er-Quersumme gilt, weil $100_{12} – 1 = 143_{10}$ durch 11_{12} und durch E_{12} teilbar ist.

zu A 5.26:

- Teilbarkeitsregeln für die *2er-Endzahlen*: Interessant ist die Regel für die Teiler von $144_{10} = 100_{12}$, die nicht gleichzeitig Teiler auch von $12_{10} = 10_{12}$ sind: $(16, 18, 24, 36, 72)_{10} = (14, 16, 20, 30, 60)_{12}$.
- Teilbarkeitsregeln für die *2er-Quersumme*: Die Regel gilt für die Teiler von $143_{10} = EE_{12}$, das sind $(11 \text{ und } 13)_{10}$, also $(E \text{ und } 11)_{12}$.
- Teilbarkeitsregeln für die *alternierende 2er-Quersumme*: Die Regel gilt für die Teiler von $145_{10} = 101_{12}$, das sind $(5 \text{ und } 29)_{10}$, also $(5 \text{ und } 25)_{12}$.
- Teilbarkeitsregeln für die *3er-Endzahlen*: Interessant ist die Regel für die Teiler von $1728_{10} = 1000_{12}$, die nicht gleichzeitig Teiler auch von $144_{10} = 100_{12}$ sind: $(27, 32, 54, 96, \ldots)_{10} = (23, 28, 46, 80, \ldots)_{12}$.
- Teilbarkeitsregeln für die *3er-Quersumme*: Die Regel gilt für die Teiler von $1727_{10} = EEE_{12}$, das sind $(11 \text{ und } 157)_{10}$, also $(E \text{ und } 111)_{12}$.

- Teilbarkeitsregeln für die *alternierende 3er-Quersumme*: Die Regel gilt für die Teiler von $1729_{10} = 1001_{12}$, das sind $(7, 13 \text{ und } 19)_{10}$, also $(7, 11 \text{ und } 17)_{12}$.

zu A 5.27:

a = Zahl aus den ersten Ziffern; b = letzte Ziffer:

- Regel: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 5 teilbar, wenn $(2b – a)_{12}$ durch 5 teilbar ist.

$(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 5 teilbar, wenn das Doppelte davon durch 5 teilbar ist. Aus $20a + 2b = 21a + (2b – a)$ folgt die Regel, da $21_{12} = 25_{10}$.

- Regel: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 5 teilbar, wenn $(3a – b)_{12}$ durch 5 teilbar ist.

$(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 5 teilbar, wenn das Vierfache davon durch 5 teilbar ist. Aus $40a + 4b = (39a + 5b) + (3a – b)$ folgt die Regel, da $39_{12} = 45_{10}$.

A 5.28:

- Regel: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(a + 3b)_{12}$ durch 7 teilbar ist.

Begründung: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn das Dreifache davon durch 7 teilbar ist. Aus $30a + 3b = 2Ea + (a + 3b)$ folgt die Regel, da $2E_{12} = 35_{10}$.

- Regel: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $(2a – b)_{12}$ durch 7 teilbar ist.

Begründung: $(10a + b)_{12}$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn das Doppelte davon durch 7 teilbar ist. Aus $10a + b = 12a – (2a – b)$ folgt die Regel, da $12_{12} = 14_{10}$.

zu A 5.29:

Beispiele von Duodezimalzahlen aus Nullen und Einsen, die sich als Produkt von Primfaktoren darstellen lassen:

- $101_{12} = 145_{10} = (5 \cdot 29)_{10} = (5 \cdot 25)_{12}$ – daher sind Duodezimalzahlen vom Typ *abab* durch 5_{12} und durch 25_{12} teilbar.
- $1001_{12} = 1729_{10} = (7 \cdot 13 \cdot 19)_{10} = (7 \cdot 11 \cdot 17)_{12}$ – daher sind Duodezimalzahlen vom Typ *abcabc* durch 7_{12}, durch 11_{12} sowie durch 17_{12} teilbar.
- $10001_{12} = 20737_{10} = (89 \cdot 233)_{10} = (75 \cdot 175)_{12}$ – daher sind Duodezimalzahlen vom Typ *abcdabcd* durch 89_{12} und durch 175_{12} teilbar.
- $10101_{12} = 20881_{10} = (7 \cdot 19 \cdot 157)_{10} = (7 \cdot 17 \cdot 111)_{6}$ – daher sind Duodezimalzahlen vom Typ *ababab* durch 7_{12}, durch 17_{12} und durch 111_{12} teilbar.
- $1001001_{6} = 2987713_{10} = (37 \cdot 80749)_{10} = (37 \cdot 3X891)_{6}$ – daher sind Duodezimalzahlen vom Typ *abcabcabc* durch 37_{12} und durch $3X891_{12}$ teilbar.