Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 4.1:

Tetraeder – Erwartungswert = 24/16 = 1,5

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	1
4	1	2	1	4

Oktaeder – Erwartungswert 112/64 = 1,75

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8

Dodekaeder – Erwartungswert 288/144 = 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12

Ikosaeder – Erwartungswert 880/400 = 2,2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3	4	1	6	1	4
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	1	1	1	1	1	1	1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	1	14	1	2	1	2	1	2
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15	1	1	3	1	5
16	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2	1	4
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17	1	1	1
18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	2	3	2	1	18	1	2
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1
20	1	2	1	4	5	2	1	4	1	10	1	4	1	2	5	4	1	2	1	20

zu A 4.2:

Für die Kombination von zwei Würfeltypen ergeben sich folgende Erwartungswerte:

	Tetraeder	**Hexaeder**	**Oktaeder**	**Dodekaeder**	**Ikosaeder**
Tetraeder	x	1,5	1,5	1,5417	1,525
Hexaeder	1,5	x	1,625	1,7222	1,7167
Oktaeder	1,5	1,625	x	1,7708	1,7875
Dodekaeder	1,5417	1,7222	1,7708	x	1,9833
Ikosaeder	1,525	1,7167	1,7875	1,9833	x

Es ist also am günstigsten, Dodekaeder und Ikosaeder auszuwählen.

zu A 4.3:

Es handelt sich immer um die Stellen, an denen *n* eine Primzahl ist. Hier kommen in der Tabelle nur Einsen hinzu, was den Erwartungswert jeweils senkt.

zu A 4.4:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	1	1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	1	14	1
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15

zu A 4.5:

$p_4 = \frac{11}{16} = 68{,}75\,\%$; $p_6 = \frac{23}{36} \approx 63{,}9\,\%$; $p_8 = \frac{43}{64} \approx 67{,}2\,\%$; $p_{12} = \frac{91}{144} \approx 63{,}2\,\%$; $p_{20} = \frac{255}{400} = 63{,}75\,\%$

zu A 4.6:

(a) *n* = 13; 17, 19, 23 – jeweils alle natürlichen Zahlen, die kleiner *n* sind, also: *n* – 1 zu n teilerfremde Zahlen

n = 15: 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 (8 zu 15 teilerfremde Zahlen)

n = 16: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 (8 zu 16 teilerfremde Zahlen)

n = 18: 1, 5, 7, 11, 13, 17 (6 zu 18 teilerfremde Zahlen)

n = 20: 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 (8 zu 20 teilerfremde Zahlen)

n = 21: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20 (12 zu 21 teilerfremde Zahlen)

n = 22: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21 (10 zu 22 teilerfremde Zahlen)

n = 24: 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (8 zu 24 teilerfremde Zahlen)

n = 25: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24 (20 zu 25 teilerfremde Zahlen)

(b) $\varphi(13) = 13 \cdot (1 - \frac{1}{13}) = 13 - 1 = 12$ $\quad \varphi(15) = 15 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 8$ $\quad \varphi(16) = 16 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 8$

$\varphi(17) = 17 \cdot (1 - \frac{1}{17}) = 16$ $\quad \varphi(18) = 18 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 6$ $\quad \varphi(19) = 19 \cdot (1 - \frac{1}{19}) = 18$

$\varphi(20) = 20 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 8$ $\quad \varphi(21) = 21 \cdot (1 - \frac{1}{3}) \cdot (1 - \frac{1}{7}) = 12$ $\quad \varphi(22) = 22 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{11}) = 10$

$\varphi(23) = 23 \cdot (1 - \frac{1}{23}) = 22$ $\quad \varphi(24) = 24 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 8$ $\quad \varphi(25) = 25 \cdot (1 - \frac{1}{5}) = 20$

zu A 4.7:

(a) $\varphi(4) = \varphi(2^2) = 2^2 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 2^2 - 2^1 = 2$, also $\varphi(4) = 2^2 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 2 \cdot \left(2 \cdot (1 - \frac{1}{2})\right) = 2 \cdot \varphi(2) = 2$, und weiter

$\varphi(8) = 2^3 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 2^2 \cdot \left(2 \cdot (1 - \frac{1}{2})\right) = 4 \cdot \varphi(2) =$, $\varphi(16) = 2^4 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = 2^3 \cdot \left(2 \cdot (1 - \frac{1}{2})\right) = 8 \cdot \varphi(2) = 8$

(b) Am Beispiel wird deutlich, dass die multiplikative Eigenschaft sich aus der Primfaktorzerlegung ergibt:

$\varphi(12) = 12 \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \left(4 \cdot (1 - \frac{1}{2})\right) \cdot \left(3 \cdot (1 - \frac{1}{3})\right) = \varphi(4) \cdot \varphi(3)$

zu A 4.8:

Die Gerade mit den blauen Punkten genügt der Gleichung $y = n - 1$ und enthält alle Paare $(p \mid p - 1)$ von Primzahlen.

Beispielsweise liegen die zu den Zweierpotenzen gehörenden Punkte (2 | 1), (4 | 2), (8 | 4), (16 | 8), (32 | 16) auf einer Geraden mit der Gleichung $y = ½ \cdot n$; analog auch (3 | 2), (9 | 6), (27 | 18) auf der Geraden $y = \frac{2}{3} \cdot n$ usw.

zu A 4.9:

Primfaktorzerlegung von $n = 50$: $50 = 2 \cdot 5^2$.

Die Anzahl der natürlichen Zahlen (bis 50 einschl.), die durch 2 teilbar sind, beträgt $a_2 = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$.

Die Anzahl der natürlichen Zahlen (bis 50 einschl.), die durch 5 teilbar sind, beträgt $a_5 = 50 \cdot \frac{1}{5} = 10$.

Die Anzahl der natürlichen Zahlen (bis 50 einschl.), die durch 2 *oder* durch 5 teilbar sind, beträgt $50 \cdot \frac{1}{2} + 50 \cdot \frac{1}{5} - 50 \cdot \frac{1}{10} = 25 + 10 - 5 = 30$.

Daher ist die Anzahl der zu 50 teilerfremden Zahlen gleich 50 – 30 = 20.

zu A 4.10:

$P(T_2 \cup T_3 \cup T_5) = P(T_2) + P(T_3) + P(T_5) - P(T_2 \cap T_3) - P(T_2 \cap T_5) - P(T_3 \cap T_5) + P(T_2 \cap T_3 \cap T_5)$

$P(T_2 \cup T_3 \cup T_5) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{5}{30} - \frac{3}{30} - \frac{2}{30} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30}$, also $\frac{\varphi(30)}{30} = 1 - \frac{22}{30} = \frac{8}{30}$

zu A 4.11:

Die Abbildung zeigt zwei gegeneinander verdrehte regelmäßige 6-Ecke, drei gegeneinander verdrehte Quadrate, vier gegeneinander verdrehte gleichseitige Dreiecke sowie einen echten Stern.

Echte Sterne entstehen nur dann, wenn die Anzahl n der Ecken und die Zahl k in der Zeichenvorschrift zueinander teilerfremd sind. Zu n = 12 gibt es die teilerfremden Zahlen 1, 5, 7 und 11. Verbindet man einen Punkt mit dem 1-nächsten, dann ergibt sich den Polygon selbst, ebenso beim Verbinden mit dem 11-nächsten (Zeichnung in umgekehrter Richtung).

Nur das Verbinden mit dem 5-nächsten Punkt liefert einen echten Stern; denn das Verbinden mit dem 7-nächsten Punkt ergibt den gleichen Stern, der nur in umgekehrter Richtung gezeichnet ist.

Allgemein ist also die Anzahl der echten Sterne gleich ½ · (φ(n) – 1).

zu A 4.12:

Der Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ bei vier Primfaktoren oder vier Primzahlpotenzen beträgt mindestens $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{8}{35}$.

Der Anteil $\frac{\varphi(n)}{n}$ bei vier Primfaktoren oder vier Primzahlpotenzen beträgt mindestens $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} = \frac{16}{77}$.

zu A 4.13:

n	φ(n)	φ(n)/n
2	1	0,5
3	2	0,666666667
4	2	0,5
5	4	0,8
6	2	0,333333333
7	6	0,857142857
8	4	0,5
9	6	0,666666667
10	4	0,4
11	10	0,909090909
12	4	0,333333333
13	12	0,923076923
14	6	0,428571429
15	8	0,533333333
16	8	0,5
17	16	0,941176471
18	6	0,333333333
19	18	0,947368421
20	8	0,4
21	12	0,571428571
22	10	0,454545455
23	22	0,956521739
24	8	0,333333333
25	20	0,8
26	12	0,461538462
27	18	0,666666667
28	12	0,428571429
29	28	0,965517241
30	8	0,266666667
31	30	0,967741935
32	16	0,5
33	20	0,606060606
34	16	0,470588235
35	24	0,685714286
36	12	0,333333333
37	36	0,972972973
38	18	0,473684211
39	24	0,615384615
40	16	0,4
41	40	0,975609756
42	12	0,285714286
43	42	0,976744186
44	20	0,454545455
45	24	0,533333333
46	22	0,47826087
47	46	0,978723404
48	16	0,333333333
49	42	0,857142857
50	20	0,4
51	32	0,62745098
52	24	0,461538462
53	52	0,981132075
54	18	0,333333333
55	40	0,727272727
56	24	0,428571429
57	36	0,631578947
58	28	0,482758621
59	58	0,983050847
60	16	0,266666667
61	60	0,983606557
62	30	0,483870968
63	36	0,571428571
64	32	0,5
65	48	0,738461538
66	20	0,303030303
67	66	0,985074627
68	32	0,470588235
69	44	0,637681159
70	24	0,342857143
71	70	0,985915493
72	24	0,333333333
73	72	0,98630137
74	36	0,486486486
75	40	0,533333333
76	36	0,473684211
77	60	0,779220779
78	24	0,307692308
79	78	0,987341772
80	32	0,4
81	54	0,666666667
82	40	0,487804878
83	82	0,987951807
84	24	0,285714286
85	64	0,752941176
86	42	0,488372093
87	56	0,643678161
88	40	0,454545455
89	88	0,988764045
90	24	0,266666667
91	72	0,791208791
92	44	0,47826087
93	60	0,64516129
94	46	0,489361702
95	72	0,757894737
96	32	0,333333333
97	96	0,989690722
98	42	0,428571429
99	60	0,606060606
100	40	0,4

zu A 4.14:

Wegen $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$ ist die Bedingung für die Zahlen mit den Primteilern von 2 und 5 erfüllt, also für 10, 20, 40, 50, 80, 100, 200, ...

Wegen $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ ist die Bedingung für die Zahlen mit den Primteilern von 3 und 5 erfüllt, also für 15, 45, 75, 135, 225, 375, 405, ...

Wegen $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$ ist die Bedingung für die Zahlen mit den Primteilern von 3 und 7 erfüllt, also für 21, 63, 147, 189, 441, 567, 1029, …

zu A 4.15:

Teilerdiagramm für 15

$$
\begin{tikzcd}
5 \arrow[r] & 15 \\
1 \arrow[r] \arrow[u] & 3 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Teilerdiagramm für 45

$$
\begin{tikzcd}
5 \arrow[r] & 15 \arrow[r] & 45 \\
1 \arrow[r] \arrow[u] & 3 \arrow[r] \arrow[u] & 9 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

3-dimensionales Teilerdiagramm für 90 (links: vorderer Teil, rechts: hinterer Teil)

$$
\begin{tikzcd}
9 \arrow[r] & 18 & & 45 \arrow[r] & 90 \\
3 \arrow[r] \arrow[u] & 6 \arrow[u] & & 15 \arrow[r] \arrow[u] & 30 \arrow[u] \\
1 \arrow[r] \arrow[u] & 2 \arrow[u] & & 5 \arrow[r] \arrow[u] & 10 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Teilerdiagramm für 100

$$
\begin{tikzcd}
25 \arrow[r] & 50 \arrow[r] & 100 \\
5 \arrow[r] \arrow[u] & 10 \arrow[r] \arrow[u] & 20 \arrow[u] \\
1 \arrow[r] \arrow[u] & 2 \arrow[r] \arrow[u] & 4 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Teilerdiagramm für 250

$$\begin{tikzcd} 125 \arrow[r] & 250 \\ 25 \arrow[u] \arrow[r] & 50 \arrow[u] \\ 5 \arrow[u] \arrow[r] & 10 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

zu A 4.16:

Anzahl der Teiler	zweitkleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft {zugehörige Teiler}
1	((gibt es nicht))
2	3 {1, 3}
3	9 {1, 3, 9}
4	10 {1, 2, 5, 10}
5	81 {1, 3, 9, 27, 81}
6	18 {1, 2, 3, 6, 9, 18}
7	729 {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729}
8	40 {1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40}
9	100 {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}
10	80 {1, 2, 4, 8, 16, 5, 10, 20, 40, 80}

zu A 4.17:

Anzahl der Teiler	kleinste natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft {zugehörige Teiler}
11	1024 {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024}
12	60 {1, 2, 4, 3, 6, 12, 5, 10, 20, 15, 30, 60}
13	4096 {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096}
14	192 {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192}
15	144 {1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 9, 18, 36, 72, 144}
16	120 {1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120}
17	65536 {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536}
18	180 {1, 2, 4, 3, 6, 12, 9, 18, 36, 5, 10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180}
19	262144 {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144}
20	240 {1, 2, 4, 8, 16, 3, 6, 12, 24, 48, 5, 10, 20, 40, 80, 15, 30, 60, 120, 240}

zu A 4.18:

Nur die Quadratzahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern, da zu jedem Teiler ein Gegenteiler existiert, diese also ein Paar bilden. Die Darstellung einer Quadratzahl a^2 als $a \cdot a$ liefert nur *einen* Teiler.

zu A 4.19:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{27} \arrow[r] & \boxed{54} \arrow[r] & \boxed{108} \\
\boxed{9} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{18} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{36} \arrow[u] \\
\boxed{3} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{6} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{12} \arrow[u] \\
\boxed{1} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{2} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{4} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$(1 + 2 + 3) + 3 \cdot (1 + 2 + 3) + 9 \cdot (1 + 2 + 3) + 27 \cdot (1 + 2 + 3) = (1 + 2 + 3) \cdot (1 + 3 + 9 + 27) = 6 \cdot 40 = 240$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{125} \arrow[r] & \boxed{375} \arrow[r] & \boxed{675} \\
\boxed{25} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{75} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{225} \arrow[u] \\
\boxed{5} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{15} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{45} \arrow[u] \\
\boxed{1} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{3} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{9} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$(1 + 3 + 9) + 5 \cdot (1 + 3 + 9) + 25 \cdot (1 + 3 + 9) + 125 \cdot (1 + 3 + 9) = (1 + 3 + 9) \cdot (1 + 5 + 25 + 125)$

$= 13 \cdot 156 = 2028$

zu A 4.20:

$5400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ (drei Ebenen hintereinander)

erste Ebene:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{27} \arrow[r] & \boxed{54} \arrow[r] & \boxed{108} \arrow[r] & \boxed{216} \\
\boxed{9} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{18} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{36} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{72} \arrow[u] \\
\boxed{3} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{6} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{12} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{24} \arrow[u] \\
\boxed{1} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{2} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{4} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{8} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

zweite Ebene:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{135} & \rightarrow & \boxed{270} & \rightarrow & \boxed{540} & \rightarrow & \boxed{1080} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{45} & \rightarrow & \boxed{90} & \rightarrow & \boxed{180} & \rightarrow & \boxed{360} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{15} & \rightarrow & \boxed{30} & \rightarrow & \boxed{60} & \rightarrow & \boxed{120} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{5} & \rightarrow & \boxed{10} & \rightarrow & \boxed{20} & \rightarrow & \boxed{40}
\end{array}$$

dritte Ebene:

$$\begin{array}{ccccccc}
\boxed{675} & \rightarrow & \boxed{1350} & \rightarrow & \boxed{2700} & \rightarrow & \boxed{5400} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{225} & \rightarrow & \boxed{450} & \rightarrow & \boxed{900} & \rightarrow & \boxed{1800} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{75} & \rightarrow & \boxed{150} & \rightarrow & \boxed{300} & \rightarrow & \boxed{600} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{25} & \rightarrow & \boxed{50} & \rightarrow & \boxed{100} & \rightarrow & \boxed{200}
\end{array}$$

erste Ebene: $(1 + 2 + 4 + 8) + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 3 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 9 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 27$

zweite Ebene: $[(1 + 2 + 4 + 8) + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 3 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 9 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 27] \cdot 5$

dritte Ebene: $[(1 + 2 + 4 + 8) + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 3 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 9 + (1 + 2 + 4 + 8) \cdot 27] \cdot 25$

gesamt: $(1 + 2 + 4 + 8) \cdot (1 + 3 + 9 + 27) \cdot (1 + 5 + 25) = 15 \cdot 40 \cdot 31 = 18600$

$4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ (vier Ebenen hintereinander)

erste Ebene:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{9} & \rightarrow & \boxed{18} & \rightarrow & \boxed{36} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{3} & \rightarrow & \boxed{6} & \rightarrow & \boxed{12} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\boxed{1} & \rightarrow & \boxed{2} & \rightarrow & \boxed{4}
\end{array}$$

zweite Ebene:

$$\begin{tikzcd} \boxed{45} \arrow[r] & \boxed{90} \arrow[r] & \boxed{180} \\ \boxed{15} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{30} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{60} \arrow[u] \\ \boxed{5} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{10} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{20} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dritte Ebene:

$$\begin{tikzcd} \boxed{225} \arrow[r] & \boxed{450} \arrow[r] & \boxed{900} \\ \boxed{75} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{150} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{300} \arrow[u] \\ \boxed{25} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{50} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{100} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

vierte Ebene:

$$\begin{tikzcd} \boxed{1125} \arrow[r] & \boxed{2250} \arrow[r] & \boxed{4500} \\ \boxed{375} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{750} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{1500} \arrow[u] \\ \boxed{125} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{250} \arrow[r] \arrow[u] & \boxed{500} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

erste Ebene: $(1 + 2 + 4) + (1 + 2 + 4) \cdot 3 + (1 + 2 + 4) \cdot 9$

zweite Ebene: $[(1 + 2 + 4) + (1 + 2 + 4) \cdot 3 + (1 + 2 + 4) \cdot 9] \cdot 5$

erste Ebene: $[(1 + 2 + 4) + (1 + 2 + 4) \cdot 3 + (1 + 2 + 4) \cdot 9] \cdot 25$

erste Ebene: $[(1 + 2 + 4) + (1 + 2 + 4) \cdot 3 + (1 + 2 + 4) \cdot 9] \cdot 125$

gesamt: $(1 + 2 + 4) \cdot (1 + 3 + 9) \cdot (1 + 5 + 25 + 125) = 7 \cdot 13 \cdot 156 = 14196$

zu A 4.21:

13	Primzahl	$1 + 13 =$	14	defizient
14	$= 2 \cdot 7$	$(1 + 2) \cdot (1 + 7) =$	24	defizient
15	$= 3 \cdot 5$	$(1 + 3) \cdot (1 + 5) =$	24	defizient
16	$= 2^4$	$1 + 2 + 4 + 16 =$	31	defizient
17	Primzahl	$1 + 17 =$	18	defizient
18	$= 2 \cdot 3^2$	$(1 + 2) \cdot (1 + 3 + 9) =$	39	abundant
19	Primzahl	$1 + 19 =$	20	defizient

20	= $2^2 \cdot 5$	(1 + 2 + 4) · (1 + 5) =	42	abundant
21	= $3 \cdot 7$	(1 + 3) · (1 + 7) =	32	defizient
22	= $2 \cdot 11$	(1 + 2) · (1 + 11)	36	defizient
23	Primzahl	1 + 23 =	24	defizient
24	= $2^3 \cdot 3$	(1 + 2 + 4 + 8) · (1 + 3)	60	abundant
25	= 5^2	1 + 5 + 25 =	31	defizient
26	= $2 \cdot 13$	(1 + 2) · (1 + 13) =	42	defizient
27	= 3^3	1 + 3 + 9 + 27 =	40	defizient
28	= $2^2 \cdot 7$	(1 + 2 + 4) · (1 + 7) =	56	**vollkommen**
29	Primzahl	1 + 29 =	30	defizient
30	= $2 \cdot 3 \cdot 5$	(1 + 2) · (1 + 3) · (1 + 5) =	72	abundant
31	Primzahl	1 + 31 =	32	defizient
32	= 2^5	1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =	63	defizient
33	= $3 \cdot 11$	(1 + 3) · (1 + 11) =	48	defizient
34	= $2 \cdot 17$	(1 + 2) · (1 + 18) =	57	defizient
35	= $5 \cdot 7$	(1 + 5) · (1 + 7) =	48	defizient
36	= $2^2 \cdot 3^2$	(1 + 2 + 4) · (1 + 3 + 9)	91	abundant
37	Primzahl	1 + 37 =	38	defizient
38	= $2 \cdot 19$	(1 + 2) · (1 + 19) =	60	defizient
39	= $3 \cdot 13$	(1 + 3) · (1 + 13) =	56	defizient
40	= $2^3 \cdot 5$	(1 + 2 + 4 + 8) · (1 + 5) =	60	defizient
41	Primzahl	1 + 41 =	42	defizient
42	= $2 \cdot 3 \cdot 7$	(1 + 2) · (1 + 3) · (1 + 7)	96	abundant
43	Primzahl	1 + 43 =	44	defizient
44	= $2^2 \cdot 11$	(1 + 2 + 4) · (1 + 11) =	84	defizient
45	= $3^2 \cdot 5$	(1 + 3 + 9) · (1 + 5) =	78	defizient
46	= $2 \cdot 23$	(1 + 2) · (1 + 23) =	72	defizient
47	Primzahl	1 + 47 =	48	defizient
48	= $2^4 \cdot 3$	(1 + 2 + 4 + 8 + 16) · (1 + 3)	124	abundant
49	= 7^2	1 + 7 + 49 =	57	defizient
50	= $2 \cdot 5^2$	(1 + 2) · (1 + 5 + 25) =	93	defizient

zu A 4.22:

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}++\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\frac{1}{2^k-1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}++\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$=\frac{2^k}{2^k-1}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}++\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\frac{2^k}{2^k-1}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2^k-1}{\frac{1}{2}\cdot(2^k-1)}=2$$