Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

zu A 3.1:

(a)

$$\frac{A_{Linse}}{A_{2-Kreise}} = \frac{2 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} = \frac{2 \cdot A_D + \frac{8}{5} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} + \frac{\frac{12}{5} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot A_D + \frac{8}{5} \cdot A_{Ab}}{2 \cdot A_D + \frac{8}{5} \cdot A_{Ab}} + \frac{\frac{12}{5} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} > \frac{1}{5}$$

weitere (grobe) Abschätzung (nach oben):

$$\frac{A_{Linse}}{A_{2-Kreise}} = \frac{2 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} = \frac{5 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} - \frac{3 \cdot A_D}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} < \frac{1}{2}$$

(b)

$$\frac{A_{Linse}}{A_{Kreis}} = \frac{2 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} = \frac{2 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} + \frac{2 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{2 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}} + \frac{2 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} > \frac{1}{3}$$

weitere (grobe) Abschätzung (nach oben):

$$\frac{A_{Linse}}{A_{Kreis}} = \frac{2 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} = \frac{4 \cdot A_D + 4 \cdot A_{Ab}}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} - \frac{2 \cdot A_D}{6 \cdot A_D + 6 \cdot A_{Ab}} < \frac{2}{3}$$

(c)

$$\frac{A_{Mond}}{A_{2-Kreise}} = \frac{4 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} = \frac{\frac{5}{2} \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} + \frac{\frac{3}{2} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{5}{2} \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{\frac{5}{2} \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}} + \frac{\frac{3}{2} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} > \frac{1}{4}$$

weitere (grobe) Abschätzung (nach oben):

$$\frac{A_{Mond}}{A_{2-Kreise}} = \frac{4 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} = \frac{4 \cdot A_D + \frac{16}{5} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} - \frac{\frac{6}{5} \cdot A_{Ab}}{10 \cdot A_D + 8 \cdot A_{Ab}} < \frac{2}{5}$$

zu A 3.2:

(a) Die Ungleichung gilt, da die beiden Zähler gleich sind, aber der Nenner des Bruch rechts vom Ungleichheitszeichen größer ist als der Nenner links.

(b)

$$\frac{A_{Linse}}{A_{Kreis}} = \frac{5 \times blau + 2 \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} > \frac{5 \times blau + 2 \times gold}{15 \times blau + 6 \times gold} = \frac{1}{3} \quad \text{sowie}$$

$$\frac{A_{Linse}}{A_{Kreis}} = \frac{5 \times blau + 2 \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} = \frac{4 \times blau + 2 \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} + \frac{1 \times blau}{12 \times blau + 6 \times gold} > \frac{1}{3} \quad \text{und}$$

$$\frac{A_{Linse}}{A_{Kreis}} = \frac{5 \times blau + 2 \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} = \frac{5 \times blau + \frac{5}{2} \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} - \frac{\frac{1}{2} \times gold}{12 \times blau + 6 \times gold} < \frac{5}{12} \approx 0{,}417$$

(c)

$$\frac{A_{Mond}}{A_{2-Kreise}} = \frac{7 \times blau + 4 \times gold}{19 \times blau + 10 \times gold} = \frac{7 \times blau + \frac{70}{19} \times gold}{19 \times blau + 10 \times gold} + \frac{\frac{6}{19} \times gold}{19 \times blau + 10 \times gold} > \frac{7}{19} \approx 0{,}368$$

$$\frac{A_{Mond}}{A_{2-Kreise}} = \frac{7 \times blau + 4 \times gold}{19 \times blau + 10 \times gold} = \frac{\frac{38}{5} \times blau + 4 \times gold}{19 \times blau + 10 \times gold} - \frac{\frac{3}{5} \times blau}{19 \times blau + 10 \times gold} < \frac{2}{5}$$

zu A 3.3:

Figur	Anzahl Dreiecke (rosa)	Anzahl Kreisabschnitte (violett)
Kreis	6	6
gleichseitiges Dreieck	1	0
3-Kreise-Figur	13	9
Einzelfläche grün	3	1
Einzelfläche orange	1	1
Teilfläche oliv	1	3

(a)

$$\frac{A_{oliv}}{A_{Kreis}} = \frac{1 \times rosa + 3 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{1 \times rosa + 1 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} + \frac{2 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{A_{oliv}}{A_{Kreis}} = \frac{1 \times rosa + 3 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{3 \times rosa + 3 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} - \frac{2 \times rosa}{6 \times rosa + 6 \times violett} < \frac{1}{2}$$

(b)

$$\frac{A_{grün}}{A_{Kreis}} = \frac{3 \times rosa + 1 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{1 \times rosa + 1 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} + \frac{2 \times rosa}{6 \times rosa + 6 \times violett} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{A_{grün}}{A_{Kreis}} = \frac{3 \times rosa + 1 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{3 \times rosa + 3 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} - \frac{2 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} < \frac{1}{2}$$

(c)

$$\frac{A_{orange}}{A_{Kreis}} = \frac{3 \times rosa + 3 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{1}{2}$$

(d)

$$\frac{A_{oliv+orange}}{A_{Kreis}} = \frac{4 \times rosa + 6 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{4 \times rosa + 4 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} + \frac{2 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} > \frac{2}{3}$$

$$\frac{A_{oliv+orange}}{A_{Kreis}} = \frac{4 \times rosa + 6 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{6 \times rosa + 6 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} - \frac{2 \times rosa}{6 \times rosa + 6 \times violett} < 1$$

(e)

$$\frac{A_{3-Kreise}}{A_{Kreis}} = \frac{13 \times rosa + 9 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{9 \times rosa + 9 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} + \frac{4 \times rosa}{6 \times rosa + 6 \times violett} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{A_{3-Kreise}}{A_{Kreis}} = \frac{13 \times rosa + 9 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} = \frac{13 \times rosa + 13 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} - \frac{4 \times violett}{6 \times rosa + 6 \times violett} < \frac{13}{6} \approx 2{,}167$$

zu 3.4:

Figur	Anzahl Zweiecke (blau)	Anzahl Dreiecke (gold)
Kreis	12	6
gleichseitiges Dreieck	1,5	1
3-Kreise-Figur	24	13
Einzelfläche grün	5	3
Einzelfläche orange	2	1
Teilfläche oliv	3	1

(a)

$$\frac{A_{oliv}}{A_{Kreis}} = \frac{3\times blau + 1\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{2\times blau + 1\times gold}{12\times blau + 6\times gold} + \frac{1\times blau}{12\times blau + 6\times gold} > \frac{1}{6}$$

$$\frac{A_{oliv}}{A_{Kreis}} = \frac{3\times blau + 1\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{3\times blau + 1{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} - \frac{0{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} < \frac{1}{4}$$

(b)

$$\frac{A_{grün}}{A_{Kreis}} = \frac{5\times blau + 3\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{5\times blau + 2{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} + \frac{0{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} > \frac{5}{12} \approx 0{,}417$$

$$\frac{A_{grün}}{A_{Kreis}} = \frac{5\times blau + 3\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{6\times blau + 3\times gold}{12\times blau + 6\times gold} - \frac{1\times blau}{12\times blau + 6\times gold} < \frac{1}{2}$$

(c)

$$\frac{A_{orange}}{A_{Kreis}} = \frac{6\times blau + 3\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{1}{2}$$

(d)

$$\frac{A_{oliv+orange}}{A_{Kreis}} = \frac{9\times blau + 4\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{8\times blau + 4\times gold}{12\times blau + 6\times gold} + \frac{1\times blau}{12\times blau + 6\times gold} > \frac{2}{3}$$

$$\frac{A_{oliv+orange}}{A_{Kreis}} = \frac{9\times blau + 4\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{9\times blau + 4{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} - \frac{0{,}5\times gold}{12\times blau + 6\times gold} < \frac{3}{4}$$

(e)

$$\frac{A_{3-Kreise}}{A_{Kreis}} = \frac{24\times blau + 13\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{24\times blau + 12\times gold}{12\times blau + 6\times gold} + \frac{1\times gold}{12\times blau + 6\times gold} > 2$$

$$\frac{A_{3-Kreise}}{A_{Kreis}} = \frac{24\times blau + 13\times gold}{12\times blau + 6\times gold} = \frac{26\times blau + 13\times gold}{12\times blau + 6\times gold} - \frac{2\times blau}{12\times blau + 6\times gold} < \frac{13}{6} \approx 2{,}167$$

zu A 3.5:

Ein regelmäßiges 6-Eck setzt sich zusammen aus sechs gold-farbigen konkaven Dreiecken sowie aus neun blau-farbigen Zweiecken. Wegen $blau \approx 0{,}181\cdot r^2$ und $gold \approx 0{,}161\cdot r^2$ folgt:

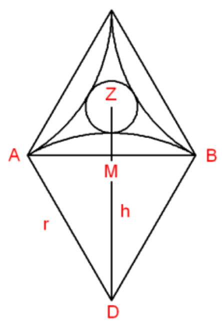
Anteil *gold* = $\frac{6\times gold}{6\times gold + 9\times blau} \approx \frac{0{,}966}{2{,}595} \approx 0{,}372 = 37{,}2\,\%$, also Anteil *blau* $\approx$ 62,8 %.

zu A 3.6:

In der nebenstehenden Grafik kann man bzgl. des Radius R des kleinen Kreises ablesen:

$|MZ| = \frac{h}{3} = R + (r-h)$, also

$$R = \frac{h}{3} - (r-h) = \frac{4}{3} \cdot h - r = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3} - r$$
$$= (\tfrac{2}{3} \cdot \sqrt{3} - 1) \cdot r \approx 0{,}1547 \cdot r$$



Diese Kreise haben daher jeweils den Flächeninhalt A ≈ 0,0752.

Für den Farbanteil der gold gefärbten Flächen gilt daher

$$\frac{12 \times A_{Zweieck} + 6 \times A_{Kreis}}{\pi \cdot r^2} \approx \frac{3{,}100}{\pi} \approx 0{,}987 = 98{,}7\,\%$$

zu A 3.7:

oliv ≈ 0,3151, *gold* ≈ 0,1278 und *blau* ≈ 0,0868.

grün = 1× *oliv* + 5× *gold* + 2× *blau* = 1,1277

rosa = 1× *oliv* + 2× *gold* + 1× *blau* = 0,6575

(4-Kreise-Figur = 9× *oliv* + 32× *gold* + 12× *blau*)

zu A 3.8:

(a) 4× *rosa* + 4× *gold* = 4× *oliv* + 12× *gold* + 4× *blau*

1-Kreis-Figur = 1× *grün* + 2× *rosa* + 3× *gold* + 1× *oliv*

= (1× *oliv* + 5× *gold* + 2× *blau*) + (2× *oliv* + 4× *gold* + 2× *blau*) + 3× *gold* + 1× *oliv*

= 4× *oliv* + 12× *gold* + 4× *blau*

(b) Halbkreis = 2× *oliv* + 6× *gold* + 2× *blau*

grün + *oliv* + *gold* = (1× *oliv* + 5× *gold* + 2× *blau*) + 1× *oliv* + 1× *gold* = 2× *oliv* + 6× *gold* + 2× *blau*

zu A 3.9:

oliv ≈ 0,3151, *gold* ≈ 0,1278 und *blau* ≈ 0,0868.

2-Kreise-Figur = 6× *oliv* + 20× *gold* + 7× *blau*

Anteil *blau* = $\frac{7 \times blau}{6 \times oliv + 20 \times gold + 7 \times blau} \approx \frac{0{,}6076}{5{,}0542} \approx 0{,}120 = 12{,}0\,\%$,

Anteil *gold* = $\frac{20 \times gold}{6 \times oliv + 20 \times gold + 7 \times blau} \approx \frac{2{,}556}{5{,}0542} \approx 0{,}506 = 50{,}6\,\%$,

Anteil *oliv* = $\frac{6 \times oliv}{6 \times oliv + 20 \times gold + 7 \times blau} \approx \frac{1{,}8906}{5{,}0542} \approx 0{,}374 = 37{,}4\,\%$,

zu A 3.10:

oliv ≈ 0,3151, *gold* ≈ 0,1278 und *blau* ≈ 0,0868.

1-Kreis-Figur = 4× *oliv* + 12× *gold* + 4× *blau*

braun = 4× *oliv* + 8× *gold* + 0× *blau* = 2,2828 (72,7 %)

violett = 0× *oliv* + 4× *gold* + 4× *blau* = 0,8584 (27,3 %)

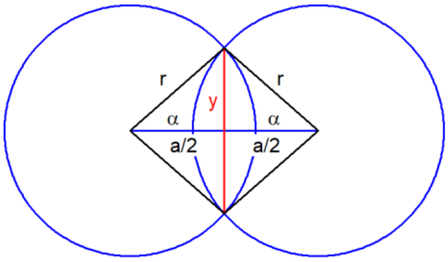
zu A 3.11:

Die dunkelblau gefärbten Flächen sind von den 2-Kreise- und 3-Kreise-Figuren bekannt: $blau \approx 0{,}181 \cdot r^2$

hellblau = Linse – 2× *blau* = 1,228 · r^2 – 2 · 0,181 · r^2 = 0,866 · r^2

grün = 1-Kreis-Figur – 3× *blau* – 2× *hellblau* = π · r^2 – 3 · 0,181 · r^2 – 2 · 0,866 · r^2 = 0,867 · r^2

zu A 3.12:

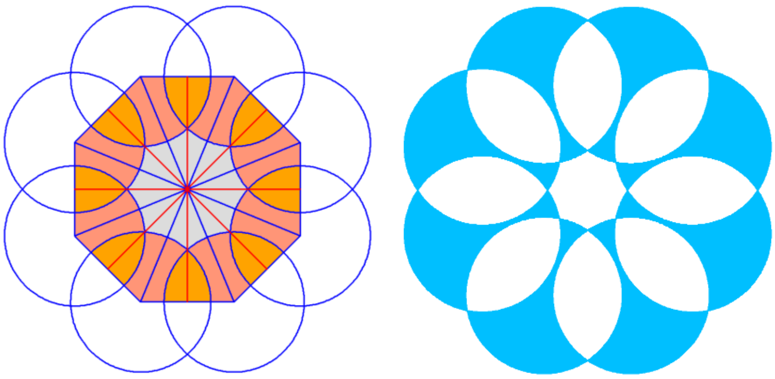


Für den Durchschnitt A_D zweier Kreise mit gleichem Radius r, deren Mittelpunkte die Entfernung a haben, gilt:

$$A_D = 2 \cdot r^2 \cdot \alpha - a \cdot y = 2 \cdot r^2 \cdot \arccos\left(\tfrac{a}{2r}\right) - a \cdot \sqrt{r^2 - \left(\tfrac{a}{2}\right)^2}$$

Beispiel: Kreise um die Eckpunkte eines regelmäßigen 8-Ecks

Die Mittelpunkte der acht Kreise sind die Eckpunkte eines regelmäßigen 8-Ecks mit Seitenlänge a. Der Flächeninhalt des 8-Ecks ergibt sich aus den Flächeninhalten der acht gleichschenkligen Dreiecke mit Grundseite *a* und einer Höhe *h* (in Rot eingezeichnet).



Für *h* gilt: $\tan(67{,}5°) = \frac{h}{\frac{a}{2}}$, also $h = \frac{a}{2} \cdot \tan(67{,}5°) = \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$, somit

$$A_{8-Eck} = 8 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h = 2 \cdot a^2 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 4{,}828 \cdot a^2$$

Jeder der 8 Kreise schneidet aus dem 8-Eck einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel 135° heraus; dessen Flächeninhalt ist also gleich $A_{Sektor} = \frac{135}{360} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r^2$ und besteht aus einem rosa gefärbten Flächenstück sowie aus zwei halben orange gefärbten Kreisdurchschnitten mit Fläche A_D (vgl. oben).

Hieraus folgt:

Die rosa gefärbten Flächenstücke haben insgesamt den Flächeninhalt: $A_{rosa} = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r^2 - A_D$

Jedes der acht gleichschenkligen Dreiecke setzt sich zusammen aus zwei halben rosa gefärbten Flächenstücken, einer halben orange gefärbten Kreisdurchschnittsfläche sowie einem Achtel der innen liegenden hellgrau gefärbten Fläche.

Für das 8-Eck gilt demnach:

$2 \cdot a^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) = 8 \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r^2 - 8 \cdot A_D + 4 \cdot A_D + A_{innen}$, also

$A_{innen} = 2 \cdot a^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) - 8 \cdot \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A_D = 2 \cdot a^2 \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) - 3 \cdot \pi \cdot r^2 + 4 \cdot A_D$

Zusammengefasst gilt also:

blaue Fläche: $8 \cdot (\pi \cdot r^2 - 2 \cdot A_D)$

Blütenblätter + innen liegendes Flächenstück: $8 \cdot A_D + A_{\text{innen}}$

zu A 3.13:

Für den Flächeninhalt eines regelmäßigen *n*-Ecks mit Seitenlänge 1 gilt: $A_{n-Eck} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\tan(180°/n)}$.

Es gilt also die Gleichung: (1) $5 \cdot A_{grün} + 5 \cdot A_{gelb} + 5 \cdot A_{blau} + 1 \cdot A_{pink} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{\tan(36°)}$.

a. Die markierte Fläche ist ein Kreissektor mit Mittelpunktswinkel 108°, also $A_3 = \frac{3\pi}{10}$;

   somit gilt: (2) $2 \cdot A_{grün} + 3 \cdot A_{gelb} + 4 \cdot A_{blau} + 1 \cdot A_{pink} = \frac{3\pi}{10}$

b. Verbindet man die beiden unteren Eckpunkte mit dem Schnittpunkt der beiden Bögen durch diese Punkte, dann entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit Flächeninhalt $A_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

   Betrachtet man nur eine der beiden Verbindungsstrecken, dann hat man einen Kreisausschnitt (ein Sechstel des Vollkreises). Dieser Kreissektor hat den Flächeninhalt $A_{60°-Sektor} = \frac{\pi}{6}$.

   Somit hat die Figur $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

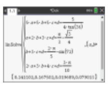
   Es gilt also die Gleichung: (3) $1 \cdot A_{grün} + 2 \cdot A_{gelb} + 3 \cdot A_{blau} + 1 \cdot A_{pink} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

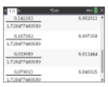
c. Verbindet man den unteren linken Eckpunkt des regelmäßigen 5-Ecks mit dem oberen Eckpunkt der *Linse* und diesen dann weiter mit dem rechts in gleicher Höhe liegenden Eckpunkt des regelmäßigen 5-Ecks, dann entsteht eine Raute mit Seitenlänge 1 und den Winkeln 72° und 108°. Der Flächeninhalt dieser Raute ist $A_{Raute} = \sin(72°)$.

   Betrachtet man nur einen Bogen der Linse, dann hat der zugehörige Sektor den Flächeninhalt $A_{72°-Sektor} = \frac{\pi}{5}$, d. h., der Flächeninhalt der restlichen Fläche der Raute ist $\sin(72°) - \frac{\pi}{5}$. Hieraus ergibt sich als Flächeninhalt der Linse: $A_{Linse} = \sin(72°) - 2 \cdot (\sin(72°) - \frac{\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5} - \sin(72°)$.

   Es gilt also die Gleichung: (2) $0 \cdot A_{grün} + 1 \cdot A_{gelb} + 3 \cdot A_{blau} + 1 \cdot A_{pink} = \frac{2\pi}{5} - \sin(72°)$

d. *Lösung des linearen Gleichungssystems*:





   Anteil der Teilflächen*: grün*: ca. 8,20 %, *gelb*: ca. 9,74 %, *blau*: ca. 1,14 %, *pink*: ca. 4,59 %

zu A 3.14:

$A_{6-Eck} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$; $A_{2-Eck} = 2 \cdot (\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \approx 0{,}181$; Anteil: ca. 41,8 %.

zu A 3.15:

Für n > 6 setzt sich die *Linse* nicht mehr aus verschiedenen Teilflächen zusammen.

Deren Flächeninhalt kann dann direkt bestimmt werden: (1) $A_{gelb} = \frac{2\pi}{n} - \sin(\frac{360°}{n})$.

Wegen der besonderen Form der Gleichungen kann eine Größe nach der anderen bestimmt werden.

(4) einsetzen in (3) ergibt: $A_{grün} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot A_{gelb} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4\pi}{n} + 2 \cdot \sin(\frac{360°}{n})$

(3) und (4) einsetzen in (2):

$$A_{blau} = \frac{n-2}{2n} \cdot \pi - 2 \cdot A_{grün} - 3 \cdot A_{gelb}$$

$$= \frac{n-2}{2n} \cdot \pi - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\pi}{n} - 4 \cdot \sin(\frac{360°}{n}) - \frac{6\pi}{n} + 3 \cdot \sin(\frac{360°}{n}) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{n} - \sin(\frac{360°}{n})$$

und schließlich:

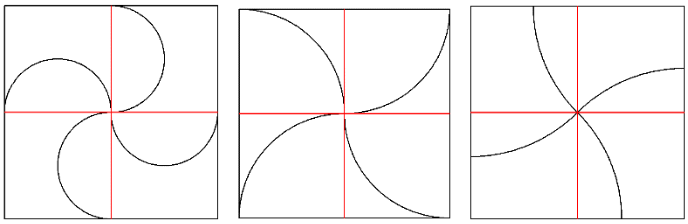
$A_{pink} = \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\tan(180°/n)} - n \cdot (A_{grün} + A_{gelb} + A_{blau})$, wobei

$$A_{grün} + A_{gelb} + A_{blau} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4\pi}{n} + 2 \cdot \sin(\frac{360°}{n}) + \frac{2\pi}{n} - \sin(\frac{360°}{n}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{n} - \sin(\frac{360°}{n}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{n}$$

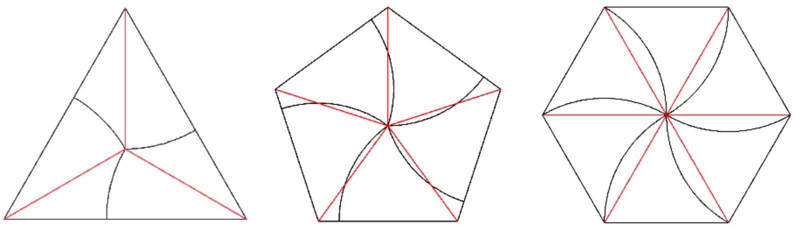
Der Anteil der grünen, gelben und blauen Fläche zusammen an der Gesamtfläche der Figur ist

$$\frac{n \cdot (\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{n})}{\frac{n}{4} \cdot \frac{1}{\tan(180°/n)}} = (\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{n}) \cdot \tan(\frac{180°}{n})$$

zu A 3.16:



zu A 3.17:



zu A 3.18:

Die cyan- bzw. goldgefärbten Flächen sind jeweils gleich groß. Wenn der äußere Kreis den Radius 1 hat, dann haben die vier abgebildeten Kreise insgesamt den Flächeninhalt $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \pi$. Daher beträgt der Anteil der cyan bzw. gold gefärbten Teilfläche an der gesamten Kreisfläche jeweils

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = 31{,}25\,\%$.

zu A 3.19:

(a) Die große Yin&Yang-Figur, die der halben Kreisfläche entspricht, umfasst je zwei grün, blau und oliv gefärbte Teilflächen, die kleine Figur, die einer Viertel Kreisfläche entspricht, entsprechend jeweils eine grün, blau und oliv gefärbte Teilfläche. Es gilt also: $grün + blau + oliv = \frac{1}{2} \cdot \pi$.

(b) Die Figur in der vierten Abbildung umfasst die halbe Kreisfläche vermindert um zwei halbe Viertelkreis-Flächen, also eine Viertelkreis-Fläche. Die Figur in der fünften Abbildung ist Viertelkreis. Da sich die beiden Flächen nur in den zwei oliv-frabenen bzw. blau-gefärbten Teilflächen unterscheiden, sind diese gleich groß, also: $blau = oliv$.

(c) In der sechsten Abbildung ist ein Quadrat mit Seitenlänge 1 abgebildet, ergänzt um vier halbe Viertelkreise; der Flächeninhalt dieser Figur ist also: $\frac{1}{2} \cdot \pi + 1 = 4 \cdot (grün + blau)$. Andererseits ergibt sich diese Figur auch dadurch, dass man von der Kreisfläche vier oliv gefärbte Teilflächen herausnimmt, also $\pi - 4 \cdot oliv$

Da nach (b) aber gilt $blau = oliv$, kann man die Informationen aus der sechsten Abb. auch so zusammenfassen: $\frac{1}{2} \cdot \pi + 1 = 4 \cdot (grün + blau) = \pi - 4 \cdot blau$.

Aus $\frac{1}{2} \cdot \pi + 1 = \pi - 4 \cdot blau$ ergibt sich: $blau = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) = \frac{1}{8} \cdot \pi - \frac{1}{4} \approx 0{,}1427$ = *oliv* (für jeweils eine der vier Teilflächen).

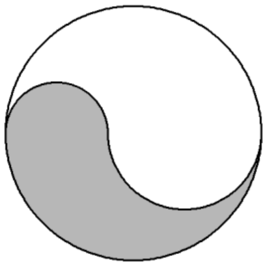
Aus $4 \cdot (grün + blau) = \pi - 4 \cdot blau \Leftrightarrow grün = \frac{1}{4} \cdot (\pi - 8 \cdot blau) = \frac{1}{4} \cdot \pi - 2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \pi - \frac{1}{4}\right) = 0{,}5$.

Die Flächenanteile der einzelnen Farben sind demnach:

$A_{grün}/A_{Kreis} \approx 0{,}6366$ und $A_{blau}/A_{Kreis} = A_{oliv}/A_{Kreis} \approx 0{,}1817$.

zu A 3.20:

(a) Für die rechts stehende Figur gilt:



Hat der umgebende Kreises den Radius 1 und bezeichnet man den Radius der in die untere Kreishälfte hineinragende weiße Halbkreisfläche in der Abbildung rechts mit *k*, dann ist der Radius der in die obere Kreishälfte hineinragende graue Halbkreisfläche den Radius 1 – *k*.

Die weiße Fläche demnach hat den Flächeninhalt

$A_w = ½ \cdot 1^2 \cdot \pi + ½ \cdot k^2 \cdot \pi - ½ \cdot (1 - k)^2 \cdot \pi$

$= ½ \cdot \pi \cdot (1 + k^2 - 1 + 2k - k^2) = ½ \cdot \pi \cdot 2k = \pi \cdot k$

Die graue Fläche hat den Flächeninhalt

$A_g = ½ \cdot 1^2 \cdot \pi - ½ \cdot k^2 \cdot \pi + ½ \cdot (1 - k)^2 \cdot \pi$

$= ½ \cdot \pi \cdot (1 - k^2 + 1 - 2k + k^2) = ½ \cdot \pi \cdot (2 - 2k) = \pi \cdot (1 - k)$

Das Verhältnis der beiden Flächeninhalte beträgt daher $A_w : A_g = k : (1 - k)$

$k = \frac{3}{5}$: die gelb und die blau gefärbten Teilflächen stehen im Verhältnis 3 : 2.

$k = \frac{2}{3}$: die gelb und die blau gefärbten Teilflächen stehen im Verhältnis 2 : 1.

$k = \frac{1}{4}$: die gelb und die blau gefärbten Teilflächen stehen im Verhältnis 1 : 3.

(b) Die grau gefärbte Fläche in (1) ist nur halb so groß wie die weiße Fläche, wenn

$(1 - k) : k = 1/k - 1 = ½ \Leftrightarrow 1/k = 1 + ½ \Leftrightarrow k = {}^2/_3$

Die grau gefärbte Fläche ist nur ein Drittel so groß wie die weiße Fläche, wenn

$(1 - k) : k = 1/k - 1 = {}^1/_3 \Leftrightarrow 1/k = 1 + {}^1/_3 \Leftrightarrow k = {}^3/_4$

Die grau gefärbte Fläche ist nur ein Viertel so groß wie die weiße Fläche, wenn

$(1 - k) : k = 1/k - 1 = ¼ \Leftrightarrow 1/k = 1 + {}^1/_3 \Leftrightarrow k = {}^4/_5$

usw.

zu A 3.21:

Für die erste Abb. gilt: Da der Radius des in die untere Kreishälfte ragenden gelb gefärbten Halbkreises ist gleich 1/3 · r. Die gelb gefärbte Fläche verhält sich daher zur Restfläche wie 1/3 zu 2/3. Aus Symmetriegründen gilt dies auch für die blau gefärbte Teilfläche. Daher bleibt für die mittlere, blau gefärbte Teilfläche ebenfalls ein Flächenanteil von 1/3.

Entsprechend muss bei den anderen Grafiken argumentiert werden (orange + gelb ist genauso groß wie grün + blau, also gleich der halben Kreisfläche; orange und blau macht jeweils ¼ der Kreisfläche aus usw.)

zu A 3.22:

(a) Die orange gefärbte Figur hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$, die gelb gefärbte dann $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot r\right)^2=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot r^2$, die grün gefärbte entsprechend $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot r\right)^2=\frac{1}{32}\cdot\pi\cdot r^2$ usw.

Um den Gesamtflächeninhalt zu berechnen, wendet man die Summenformel für geometrischen Folgen an:

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2+\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot r^2+\frac{1}{32}\cdot\pi\cdot r^2+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2.$$

Von der Figur wird also zwei Drittel der Kreisfläche bedeckt.

(b) Die orange gefärbte Teilfläche hat im Beispiel $k=\frac{2}{5}$ den Flächeninhalt $\frac{2}{5}\cdot\pi\cdot r^2$, die gelb gefärbte dann $\frac{2}{5}\cdot\pi\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot r\right)^2=\frac{18}{125}\cdot\pi\cdot r^2$, die grün gefärbte entsprechend $\frac{2}{5}\cdot\pi\cdot\left(\frac{9}{25}\cdot r\right)^2=\frac{162}{3025}\cdot\pi\cdot r^2$ usw.

Allgemein ergibt sich:

$$k\cdot\pi\cdot r^2+k\cdot(1-k)^2\cdot\pi\cdot r^2+k\cdot(1-k)^4\cdot\pi\cdot r^2+\ldots=k\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1+(1-k)^2+(1-k)^4+\ldots\right)$$
$$=k\cdot\pi\cdot r^2\cdot\frac{1}{1-(1-k)^2}=\frac{k}{2k-k^2}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{2-k}\cdot\pi\cdot r^2$$

Im Beispiel mit $k=\frac{2}{5}$ ergibt sich ein Gesamtflächeninhalt von $\frac{5}{8}\cdot\pi\cdot r^2$

zu A 3.23:

(a) In der ersten Figur sind je zwei Halbkreisbögen nach unten und oben gezeichnet, also zusammen die . Der Umfang der grün gefärbten Fläche ist daher gleich $u_4=\pi\cdot r+4\cdot\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot r=2\cdot\pi\cdot r$, also genauso groß wie der Umfang eines Kreises. Entsprechend ergibt sich für die zweite bzw. die dritte Figur $u_6=\pi\cdot r+6\cdot\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot r=2\cdot\pi\cdot r$ bzw. $u_8=\pi\cdot r+8\cdot\pi\cdot\frac{1}{8}\cdot r=2\cdot\pi\cdot r$.

(b) Allgemein gilt daher $u_n=\pi\cdot r+n\cdot\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot r=2\cdot\pi\cdot r$. Die Grenzwertbildung ist jedoch nicht möglich, da ein Faktor über alle Grenzen wächst und der andere gegen null läuft:

$u_{n\to\infty}=\pi\cdot r+\infty\cdot\pi\cdot 0\cdot r$.

Die letzte Figur ist also demnach keine Grenzfigur der Folge der vorher betrachteten Figuren, für die ja stets gilt $u_n=2\cdot\pi\cdot r$. Für die letzte Figur gilt: $u_n=\pi\cdot r+2\cdot r=(\pi+2)\cdot r\approx 5{,}14\cdot r$.

zu A 3.24:

Bezeichnet man den Radius der *n*+1 in den unteren Halbkreis hineinreichenden kleinen Halbkreise mit *a* und den Radius der *n* in den oberen Halbkreis hineinreichenden kleinen Halbkreise mit *b*, dann gilt

$(n+1)\cdot a+n\cdot b=r$. Wegen der Flächengleichheit gilt außerdem $(n+1)\cdot a^2=n\cdot b^2$, also $a=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot b$.

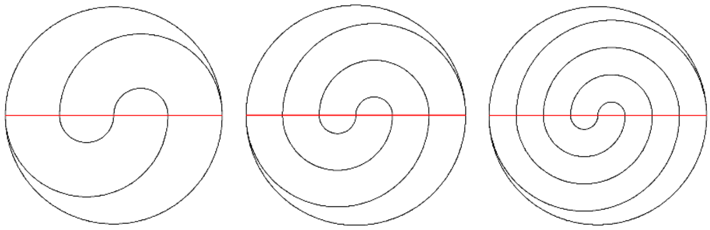
Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann $(n+1)\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot b+n\cdot b=r\ \Leftrightarrow\ \left(\sqrt{n\cdot(n+1)}+n\right)\cdot b=r$

also $b = \frac{r}{\sqrt{n\cdot(n+1)}+n}$ und entsprechend $a = \frac{r}{\sqrt{n\cdot(n+1)}+(n+1)}$.

zu A 3.25:

Figur links: Der Durchmesser muss in 8 gleich große Abschnitte unterteilt werden; Halbkreise mit Radius 1/8 · r und 3/8 · r werden nach unten und oben geschlagen.

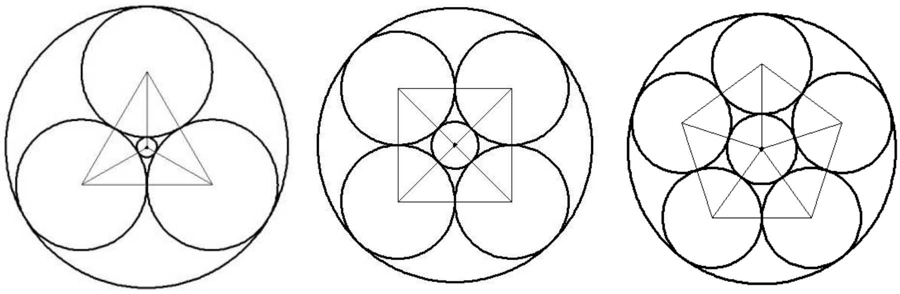
Entsprechend muss im zweiten Bild der Durchmesser in 12, beim dritten in 16 gleich große Abschnitte unterteilt werden, Halbkreise mit Radius 1/12 · r, 3/12 · r, 5/12 · r bzw. 1/16 · r, 3/16 · r, 5/16 · r, 7/16 · r.



zu A 3.26 und A 3.27:

Die Ringe aus Kreisen entstehen, wenn man bei einem regelmäßigen n-Eck mit Seitenlänge s um die Eckpunkte Kreise mit dem Radius s/2 und außerdem zwei Kreise um den Mittelpunkt des n-Ecks zeichnet, welche den Kreisring von innen und von außen berühren. Wir bezeichnen die Radien der n Kreise mit r_n = s/2, den des inneren Kreises mit r und den des äußeren Kreises mit R.

Für den Radius R des äußeren Kreises gilt: R = r + 2r_n.



Die regelmäßigen n-Ecke setzen sich aus gleichschenkligen Dreiecken zusammen, deren Winkel am Mittelpunkt der Figur gerade der n-te Teil eines Vollwinkels ist. Die Höhe (=Symmetrieachse) dieser Dreiecke unterteilt sie in zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse gerade die Länge r_n + r hat, die Gegenkathete zum halben Mittelpunktswinkel α = 180°/n ist gleich r_n.

Daher gilt: $\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{r_n}{r+r_n}$ also $r = \frac{r_n}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} - r_n$ und $R = \frac{r_n}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} + r_n = r_n \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$

Hieraus kann jetzt die bedeckte Fläche berechnet werden:

Für die bedeckte Fläche im Kreisring gilt: $A_n = n\cdot\pi\cdot\frac{s^2}{4}$ und für den Anteil dieser Kreise an der Gesamtfläche ergibt sich:

$$\frac{A_n}{A} = n\cdot\pi\cdot\frac{s^2}{4}\cdot\frac{4}{s^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)}{\pi\cdot\left(1+\sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)^2} = n\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right)^2} = n\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

Bekanntlich gilt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ oder auch $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}=1$ d. h. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\pi$

Der Grenzwert für $n \to \infty$ des Nenners von A_n/A ist offensichtlich gleich 1, der des Zählers wird – wegen des Quadrats von sin – also von $\sin(\pi/n)$ bestimmt, d. h., der Grenzwert ist gleich null, was auch plausibel ist: Mit zunehmendem n nimmt die Anzahl der Kreise zu und die Fläche des Kreisrings wird immer kleiner.

Betrachtet man zusätzlich den inneren Kreis, dann füllt dieser immer stärker die gesamte Figur und der Anteil der bedeckten Fläche nähert sich 100%.

Die Veränderung der Anteile kann man auch der folgenden Tabelle entnehmen; hierbei wurde die Seitenlänge s = 1 gesetzt:

n	Fläche Kreisring	Radius Kreis innen	Fläche Kreis innen	Radius Kreis außen	Fläche Kreis außen	Anteil Kreisring vom äußeren Kreis	Anteil Kreisring + innerer Kreis vom äußeren Kreis
3	2,356	0,077	0,019	1,077	3,646	64,6%	65,1%
4	3,142	0,207	0,135	1,207	4,578	68,6%	71,6%
5	3,927	0,351	0,386	1,351	5,731	68,5%	75,3%
6	4,712	0,500	0,785	1,500	7,069	66,7%	77,8%
n	Fläche Kreisring	Radius Kreis innen	Fläche Kreis innen	Radius Kreis außen	Fläche Kreis außen	Anteil Kreisring vom äußeren Kreis	Anteil Kreisring + innerer Kreis vom äußeren Kreis
7	5,498	0,652	1,337	1,652	8,578	64,1%	79,7%
8	6,283	0,807	2,044	1,807	10,253	61,3%	81,2%
9	7,069	0,962	2,907	1,962	12,092	58,5%	82,5%
10	7,854	1,118	3,927	2,118	14,093	55,7%	83,6%
20	15,708	2,696	22,838	3,696	42,921	36,6%	89,8%
30	23,562	4,283	57,640	5,283	87,695	26,9%	92,6%
40	31,416	5,873	108,351	6,873	148,392	21,2%	94,2%
50	39,270	7,463	174,975	8,463	225,008	17,5%	95,2%

zu A 3.28:

(a) In A 3.23 wurde für die Flächenanteile der Kreise im Kreisring gezeigt: $\frac{A_n}{A}=n\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$

In den Fällen n = 7 und n = 8 kommt jeweils ein Kreis hinzu, also: $\frac{A_n}{A}=(n+1)\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$

Somit ergibt sich für n = 8 eine Packungsdichte von 73,25 % bzw. für n = 9 eine Dichte von 68,94 %.

(b) Nach Angaben von https://de.wikipedia.org/wiki/Kreispackung_in_einem_Kreis ist im Fall n = 10 der Radius des äußeren Kreises ca. 3,813026-mal so groß wie der Radius der zehn innen liegenden Kreise, d. h., der Radius dieser zehn Kreise beträgt $\frac{r}{3{,}813026}$, die Fläche der zehn Kreise demnach $10 \cdot \left(\frac{r}{3{,}813026}\right)^2 \cdot \pi$, die Packungsdichte daher ca. 68,78 %.

zu A 3.29:

Figur links: Die Mittelpunkte der inneren Kreise mit Radius r, die den äußeren Kreis berühren, sind Eckpunkte eines Quadrats, dessen Seitenlänge 4r beträgt. Die Diagonale des Quadrats ist daher nach dem Satz des Pythagoras gleich $d_Q = 4r \cdot \sqrt{2}$; hieraus folgt, dass der Durchmesser des äußeren Kreises gleich $d_Q + 2r = 4r \cdot \sqrt{2} + 2r = r \cdot 2 \cdot \left(2\sqrt{2}+1\right)$, für den der Radius R des äußeren Kreises demnach gilt:

$R = r \cdot \left(2\sqrt{2}+1\right)$, also $r = \frac{R}{2\sqrt{2}+1} \approx 0{,}261 \cdot R$

Figur rechts: Hier ergeben sich die Radien der innen liegenden Kreise aus einem regelmäßigen 8-Eck, vgl. A 3.23, also

$R = \frac{r_n}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} + r_n = r_n \cdot \frac{1+\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \Leftrightarrow r_n = R \cdot \frac{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$ mit 180°/8 = 22,5°, also $r_8 = 0{,}277 \cdot R$

zu A 3.30:

Die ineinander geschachtelten Kreisringe sind alle zueinander ähnlich. Der Anteil der durch Kreise bedeckten Fläche der unendlich vielen Kreisringe ist daher genauso groß wie der Anteil der bedeckten Fläche *eines* Kreisrings.

Die Fläche eines Kreisrings berechnet sich nach der Formel:

$$A_{Ring} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (R-r) \cdot (R+r) = \pi \cdot 2r_n \cdot 2 \cdot \frac{r_n}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 4\pi \cdot \frac{r_n^2}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{\pi s^2}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Daher ist der Anteil der bedeckten Fläche gegeben durch:

$$\frac{A_{Kreise}}{A_{Ring}} = \frac{n \cdot \pi \cdot \frac{s^2}{4}}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\pi s^2}} = \frac{n}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

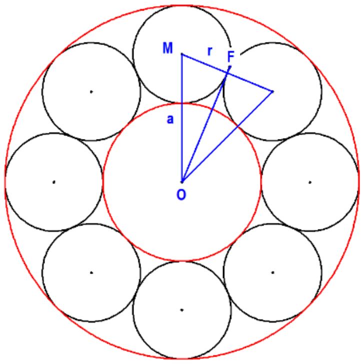
Für $n \to \infty$ ergibt sich der Grenzwert π/4 = 0,785398163...

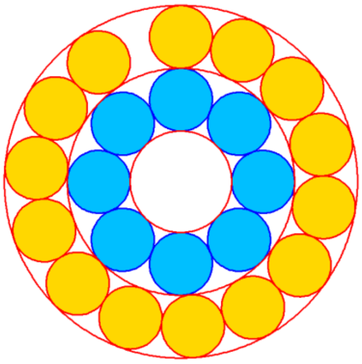
Die Entwicklung der Folgenglieder kann man der Tabelle entnehmen:

n	Anteil
3	65,0%
4	70,7%
5	73,5%
6	75,0%
7	75,9%
8	76,5%
9	77,0%
10	77,3%

n	Anteil
20	78,22%
30	78,396%
40	78,459%
50	78,4881%
100	78,52690%
1000	78,539687%
10000	78,5398150%
100000	78,53981505%

zu A 3.31:





Die Mittelpunkte der Kreise eines Rings aus *n* Kreisen sind die Eckpunkte eines regelmäßigen *n*-Ecks. Bezeichnet man die Länge der Verbindungsstrecke des Mittelpunkts O der Figur mit einem der Kreis-Mittelpunkte M des Kreisrings mit *a*, dann gilt im rechtwinkligen Dreieck OFM:

$\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{r}{a}$, also $a = \frac{r}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$.

Der Radius des inneren roten Kreises ist *a* – *r*, der des äußeren roten Kreises *a* + *r*.

Für die goldenen Kreise des nächsten Kreisrings gilt, dass deren Mittelpunkte von O den Abstand *a* + 2*r* haben. Die Mittelpunkte von zwei benachbarten goldenen Kreisen werden also vom Mittelpunkt unter einem Winkel α gesehen, für den gilt:

$\sin(\alpha) = \frac{r}{a+2r}$

Wenn man herausfinden möchte, wie viele der goldenen Kreise gezeichnet werden können, muss nur das ganzzahlige Ergebnis *z* der Division 360° : α ermittelt werden.

Hier ergibt sich:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
z	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

In keinem der Fälle ist 360°/α ganzzahlig, und es fällt auf, dass hier für $n \geq 3$ gilt: $n + 6 = z$.

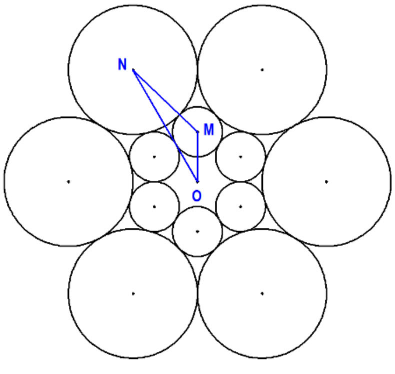
Verbindet man die Mittelpunkte der blauen Kreise durch eine Kreislinie, dann hat dieser Kreis den Umfang $u_{blau} = 2\pi \cdot a$.

Zeichnet man durch die Mittelpunkte der goldenen Kreise einen Kreisbogen, dann hat dieser höchstens die Länge

$u_{gold} = 2\pi \cdot (a+2r) = 2\pi \cdot a + 4\pi \cdot r = u_{blau} + 4\pi \cdot r \approx u_{blau} + 12{,}6 \cdot r > u_{blau} + 6$ Bogen durch Kreise mit Radius *r*

In den zweiten Kreisring passen also sechs Kreise mehr als in den ersten und es bleibt eine Lücke.

zu A 3.32:



Bezeichnet man in der abgebildeten Figur die Radien der außen liegenden grünen Kreise mit R sowie die Strecke ON mit A, dann gilt hier analog zu oben die Beziehung

$\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{R}{A}$, also $A = \frac{R}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)}$

Im Dreieck OMN gilt gemäß dem Kosinussatz:

$|NM|^2 = |OM|^2 + |ON|^2 - 2 \cdot |OM| \cdot |ON| \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$, also

$(R+r)^2 = a^2 + A^2 - 2 \cdot a \cdot A \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

Ersetzt man die Variablen *a* und *A* gemäß (1) und (2), dann erhält man

$(R+r)^2 = \frac{r^2}{\sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)} + \frac{R^2}{\sin^2\left(\frac{180°}{n}\right)} - 2 \cdot \frac{r}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot \frac{R}{\sin\left(\frac{180°}{n}\right)} \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ und hieraus

$(R+r)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 + R^2 - 2 \cdot r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

Für $r = 1$ ist also für jeden Wert des Parameters n die folgende Gleichung mit der Variablen $x = R$ zu lösen:

$(x+1)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{180°}{n}\right) = 1 + x^2 - 2 \cdot x \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$

Dies ist eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen, nämlich x_2 als Radius der grünen Kreise und x_1 als Radius der gelben Kreise, wenn die blauen Kreise den Radius 1 haben.

Mithilfe eines Rechners erhält man die folgenden Näherungswerte:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_1	0,1010	0,2168	0,3108	0,3861	0,4471	0,4974	0,5394	0,5750	0,6056	0,6321
x_2	9,8999	4,6116	3,2170	2,5900	2,2365	2,0106	1,8539	1,7390	1,6513	1,5821

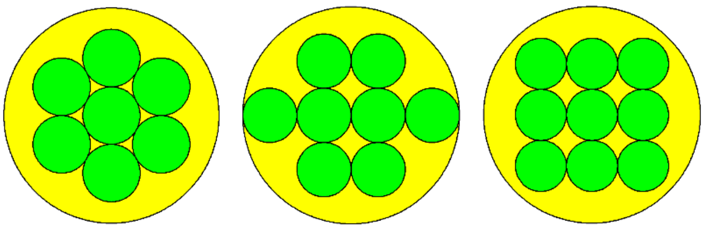
Der Zusammenhang zwischen der Anzahl *n* der Kreise eines Kreisrings und der Radien der außen bzw. innen berührenden, ringförmig angeordneten Kreise ist in der folgenden Grafik dargestellt.

Im Fall $n = 8$ ist der Radius der grünen Kreise fast genau doppelt so groß wie der der blauen Kreise – fast genau, aber nicht ganz genau, wie man nachrechnen kann.

zu A 3.33:

Wenn der äußere Kreis den Radius r hat (also die Gesamtfläche grün+gelb gleich $\pi \cdot r^2$), dann gilt für die Radien der grün gefärbten Kreise: $r_{grün} = \pi \cdot \frac{r}{\sqrt{2n}}$.

Mögliche Anordnungen für n = 7, 8, 9:



zu A 3.34:

Die Ausgangsfigur ist ein blau gefärbter Kreis mit Radius $r_0 = 1$ (LE), Umfang $u_0 = 2\pi$ (LE) und Flächeninhalt $A_0 = \pi$ (FE). In den Ausgangskreis werden sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{3}$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser sieben Kreise beträgt $u_1 = 7 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3}\right)$. Der Flächeninhalt dieser sieben Kreise beträgt $A_1 = 7 \cdot \pi \cdot \frac{1}{9}$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_1 = \frac{7}{9} \approx 77{,}8\%$.

Die sieben Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{3}$ werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser sieben Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser 7 · 7 = 49 weißen Kreise beträgt $u_2 = 7^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{9}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 + u_2 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2\right)$.

Der Flächeninhalt dieser 49 Kreise beträgt $A_2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 7^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 \approx 60{,}5\%$.

Figur rechts:

Die 49 Kreise mit Radius $r_1 = \frac{1}{9}$ werden zunächst blau gefärbt, dann werden in jeden dieser 49 Kreise jeweils sieben weiß gefärbte Kreise mit Radius $r_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ eingezeichnet.

Der Umfang dieser 7^3 = 343 weißen Kreise beträgt $u_2 = 7^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{27}$. Die Gesamtlänge der Kreisumfänge ist $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{7}{3} + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^3\right)$.

Der Flächeninhalt dieser 343 Kreise beträgt $A_3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 7^3 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6$. Der Anteil der weiß gefärbten Fläche beträgt $p_3 = \left(\frac{7}{9}\right)^3 \approx 47{,}1\%$.

Grenzverhalten

Bei Fortsetzung des Verfahrens wächst der Gesamtumfang über alle Grenzen hinaus (geometrische Reihe mit Wachstumsfaktor $q = \frac{7}{3} > 1$), der Anteil des Flächeninhalts der weiß gefärbten Kreise geht wegen $p_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$ gegen null.

zu A 3.35:

(a) $r_1 = r_2 \approx 3{,}989$; $a \approx 2{,}5508$

(b) $r_1 \approx 3{,}090$; $r_2 \approx 4{,}370$; da alle Französisch Sprechenden auch Spanisch sprechen, liegt der F-Kreis innerhalb des S-Kreises.

(c) $r_1 \approx 3{,}568$; $r_2 \approx 3{,}989$; $a \approx 3{,}397$