Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

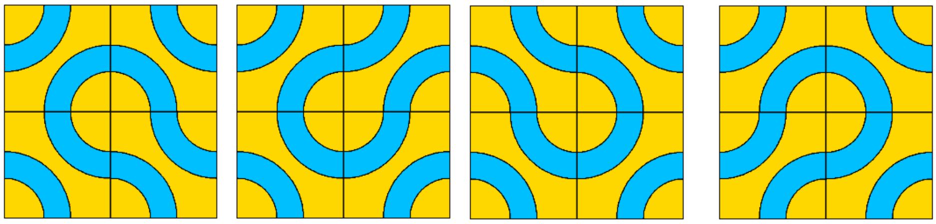
zu A 1.1:

Dreht man $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ um 180°, so erhält man wieder $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$. Man kann dies damit begründen, dass jede Drehung um 180° eine Punktspiegelung am Mittelpunkt der Figur ist.

zu A 1.2:

Da bei einer Drehung um 90° jedes A in ein B verwandelt wird und jedes B in ein A, entstehen nacheinander

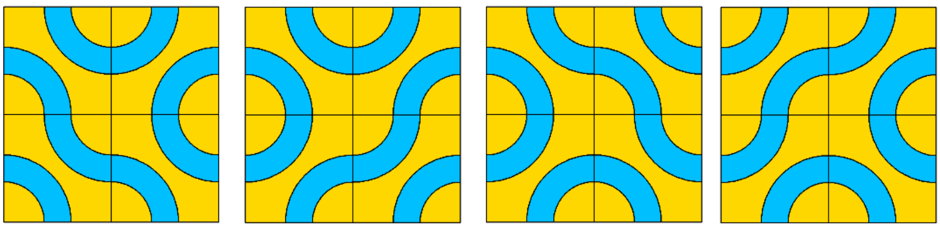
$\begin{bmatrix} B & A \\ A & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} B & B \\ A & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} B & A \\ B & B \end{bmatrix}$



Die Ausgangsfigur ist achsensymmetrisch zur ersten Diagonalen (von links oben nach rechts unten), hat aber ansonsten keine Symmetrieeigenschaften. Durch die fortgesetzten Drehungen um 90° entstehen nacheinander Figuren, die achsensymmetrisch sind zur zweiten Diagonalen, dann wieder zur ersten Diagonalen und schließlich wieder zur zweiten Diagonalen. Die erste und dritte Figur bzw. die zweite und vierte Figur stimmen jedoch nicht überein, da die Ausgangsfigur nicht punktsymmetrisch zum Mittelpunkt ist.

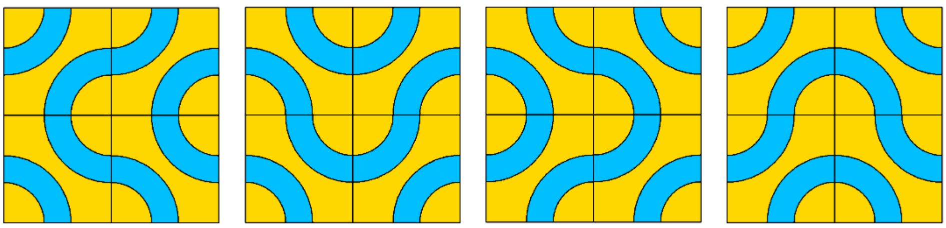
zu A 1.3:

(a) $\begin{bmatrix} A & B \\ A & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ B & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ B & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} B & B \\ B & A \end{bmatrix}$



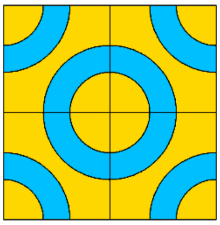
Die Ausgangsfigur ist achsensymmetrisch zur zweiten Diagonalen (von links unten nach rechts oben), hat aber ansonsten keine Symmetrieeigenschaften, vgl. A 1.2.

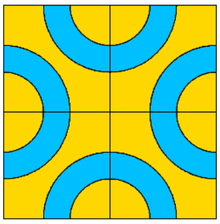
(b) $\begin{bmatrix} B & B \\ A & A \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & B \\ A & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A & A \\ B & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} B & A \\ B & A \end{bmatrix}$



Die Ausgangsfigur ist achsensymmetrisch zur waagerechten Mittelparallele, hat aber ansonsten keine Symmetrieeigenschaften, vgl. A 1.2.

(c) $\begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$

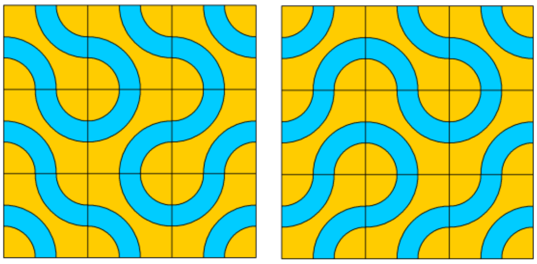




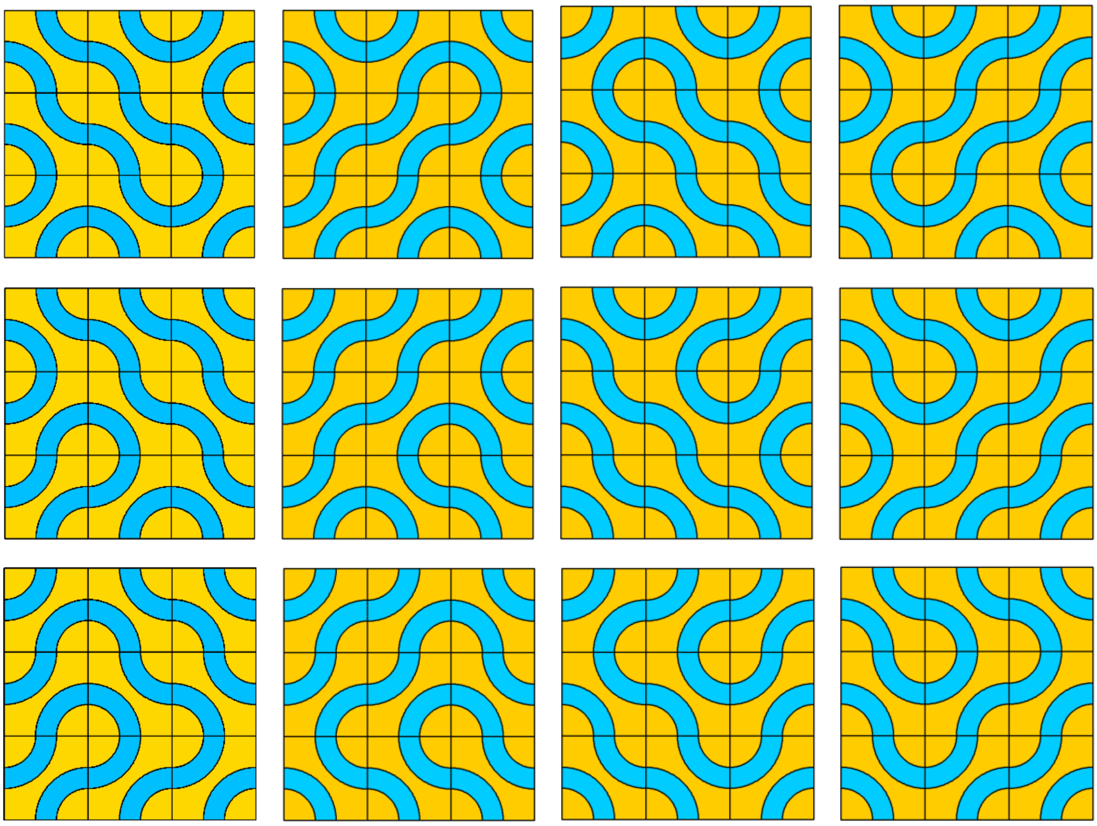
Beide Ausgangsfiguren sind achsensymmetrisch zu den beiden Mittelparallelen und punktsymmetrisch zum Mittelpunkt der Figur. Daher verändern sie sich nicht durch die Drehungen.

zu A 1.4:

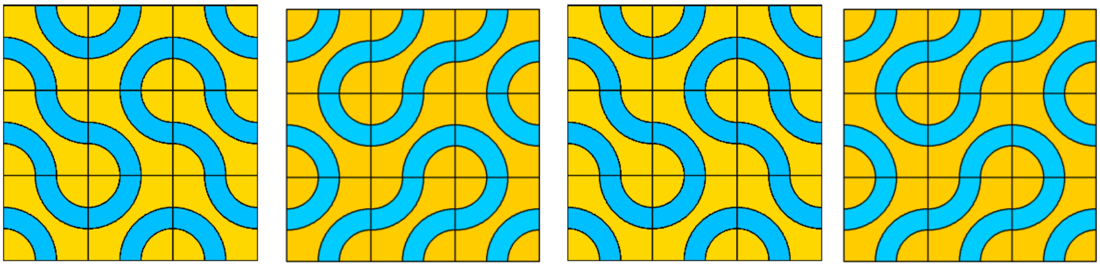
$$\begin{bmatrix} B & B & B \\ B & A & B \\ A & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} A & A & A \\ A & B & B \\ A & A & B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} B & A & A \\ B & A & B \\ B & B & B \end{bmatrix}$$



zu A 1.5:

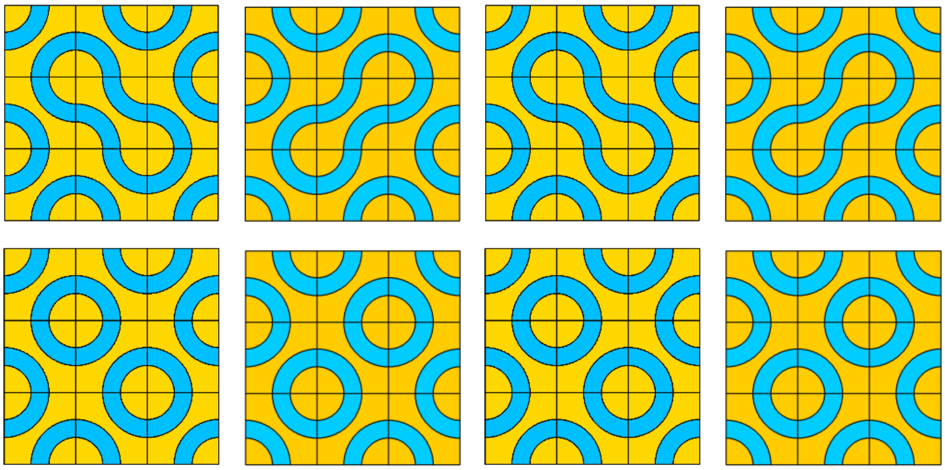


zu A 1.6:



Wegen der Punktsymmetrie erhält man einer Drehung um 180° wieder die Ausgangsfigur (daher stimmen auch die Figuren nach einer 90°-Drehung und dann nach einer 270°-Drehung überein).

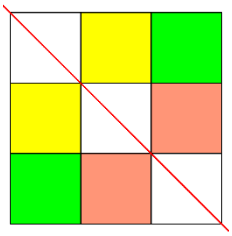
zu A 1.7:



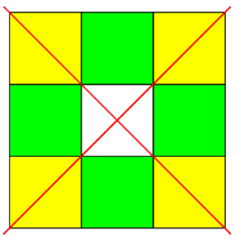
Wegen der Punktsymmetrie erhält man einer Drehung um 180° wieder die Ausgangsfigur (daher stimmen auch die Figuren nach einer 90°-Drehung und nach einer 270°-Drehung überein).

zu A 1.8:

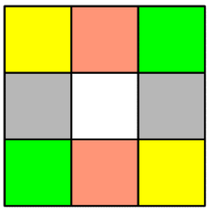
(a) In den drei Diagonalfeldern der Symmetrieachse kann jede der beiden Formen A oder B liegen; je zwei bzgl. der Diagonale einander gegenüberliegende Felder müssen übereinstimmen. Daher gibt es $2^6 = 64$ verschiedene 9er-Muster.



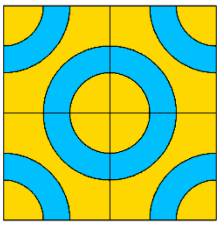
(b) Im Feld in der Mitte kann jede der beiden Formen liegen. Die gleich gefärbten Felder müssen übereinstimmen. Daher gibt es $2^3 = 8$ verschiedene 9er-Muster.



(c) Da die jeweils bzgl. der Mitte gegenüberliegenden Felder übereinstimmen müssen, gibt es $2^5 = 32$ verschiedene punktsymmetrische 9er-Muster.



(d) Ein einfacher Kreis in einem 4er-Muster tritt auf, wenn die Fliesen wie folgt gelegt werden: $\begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix}$



Dieses 4er-Muster kann an vier verschiedenen Stellen innnerhalb eines 9er-Musters liegen; die übrigen 5 Felder können beliebig belegt werden: $\begin{bmatrix} B & A & X \\ A & B & Y \\ U & V & Z \end{bmatrix}$. Daher gibt es $4 \cdot 2^5 = 2^7 = 128$ verschiedene 9er-Muster mit *mindestens* einem Kreis.

Ein 9er-Muster **mit zwei Kreisen** tritt bei der Anordnung $\begin{bmatrix} B & A & X \\ A & B & A \\ Y & A & B \end{bmatrix}$ auf, alternativ bei $\begin{bmatrix} X & B & A \\ B & A & B \\ A & B & Y \end{bmatrix}$. Dieses sind insgesamt 16 mögliche Fälle.

Ein 9er-Muster mit einem über drei Felder verlaufenden geschlossenen Band kann so $\begin{bmatrix} B & A & X \\ A & A & A \\ Y & A & B \end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix} X & B & A \\ B & B & B \\ A & B & Y \end{bmatrix}$ aussehen. Dies sind insgesamt 8 mögliche Fälle.

zu A 1.9:

Das abgebildete Band verläuft durch 8 Felder; das ist die Maximalzahl. Egal, wie man anfängt, muss man sich nach dem Durchlaufen von 6 Feldern dafür entscheiden, nach rechts oder links zu gehen, und damit wird ein Feld nicht mit einbezogen.

zu A 1.10:

(a) Fünf Symmetrieeigenschaften sind möglich, die wie folgt in den Beispielen erfasst sind: achsensymmetrisch zur zweiten Diagonalen, achsensymmetrisch zur ersten und zweiten Diagonalen (also auch punktsymmetrisch zum Mittelpunkt), achsensymmetrisch zur vertikalen Mittelinie, achsensymmetrisch zur horizontalen Mittellinie, achsensymmetrisch zur ersten Diagonalen.

Diese fünf Symmetriearten wirken sich wie folgt auf die Felder der 16er-Muster aus:

$2^8 = 256$ verschiedene punktsymmetrische 16er-Muster: $\begin{pmatrix} C & D & E & F \\ G & H & I & J \\ J & I & H & G \\ F & E & D & C \end{pmatrix}$

$2^8 = 256$ verschiedene achsensymmetrische 16er-Muster: $\begin{pmatrix} C & D & E & F \\ G & H & I & J \\ \overline{G} & \overline{H} & \overline{I} & \overline{J} \\ \overline{C} & \overline{D} & \overline{E} & \overline{F} \end{pmatrix}$ (horizontale Achse),

wobei die mit einem Querstrich versehenen Variablen die jeweils andere Form beschreiben (also wenn man für die Variable C die Form A wählt, dann muss für $\overline{C}$ die Form B genommen werden (und umgekehrt).

$2^8 = 256$ verschiedene achsensymmetrische 16er-Muster: $\begin{pmatrix} C & G & \overline{G} & \overline{C} \\ D & H & \overline{H} & \overline{D} \\ E & I & \overline{I} & \overline{E} \\ F & J & \overline{J} & \overline{F} \end{pmatrix}$ (vertikale Achse)

$2^{10} = 1024$ verschiedene achsensymmetrische 16er-Muster: $\begin{pmatrix} I & F & D & C \\ F & J & G & E \\ D & G & K & H \\ C & E & H & L \end{pmatrix}$ (erste diagonale Achse)

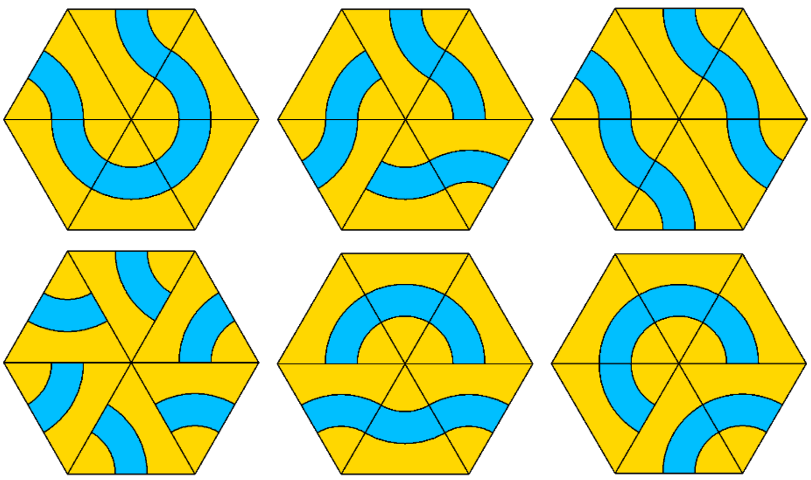
$2^{10} = 1024$ verschiedene achsensymmetrische 16er-Muster: $\begin{pmatrix} C & E & H & L \\ D & G & K & H \\ F & J & G & E \\ I & F & J & C \end{pmatrix}$ (zweite diagonale Achse)

(b) eigene Recherche

zu A 1.11:

Beim ersten Muster sind die blauen Bänder als Kreisringe um die 8 Ecken gelegt, beim zweiten sind zwei blaue Bänder als geschlossene Bögen um zwei einander gegenüberliegende Ecken gelegt, beim dritten wird die Oberfläche des Würfels in zwei Teilflächen unterteilt, beim vierten Mustern ergibt sich ein ähnliches Bild wie beim zweiten Muster.

zu A 1.12:

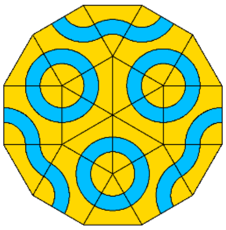
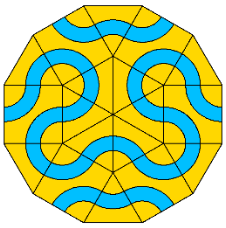
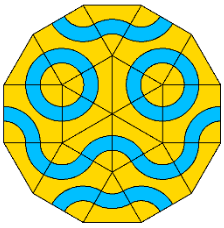


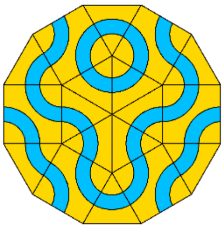
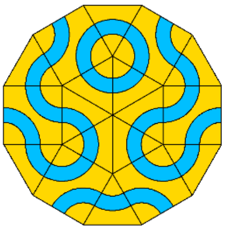
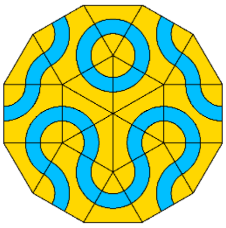
Das Sechseck hat sechs Symmetrieachsen, die mit Dreiecksseiten übereinstimmen (Diagonalen des Sechsecks), weitere sechs Symmetrieachsen, die Höhen in zwei gegenüberliegenden Dreieck bilden. Außerdem ist eine Punktsymmetrie bzgl. des Mittelpunkts der Figur möglich.

zu A 1.13:

(eigene Muster)

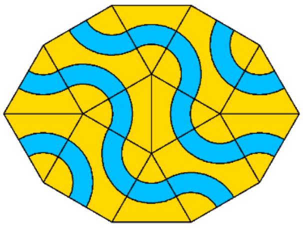
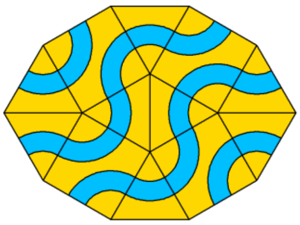
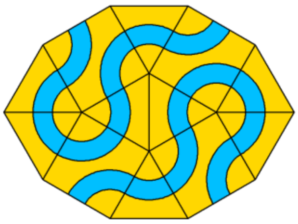
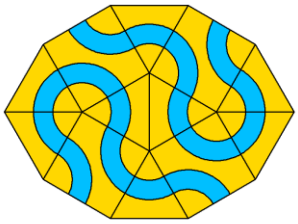
zu A 1.14:

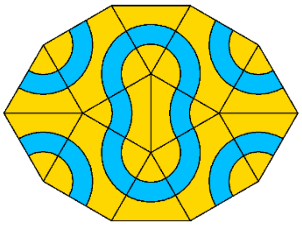
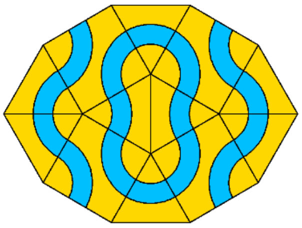
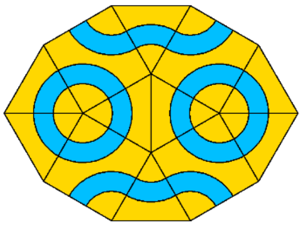




zu A 1.15:

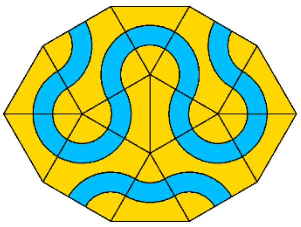
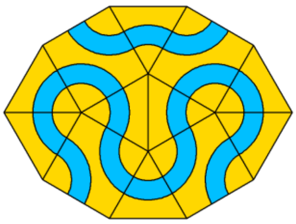
– Auslegungen mit einem punktsymmetrischen Muster

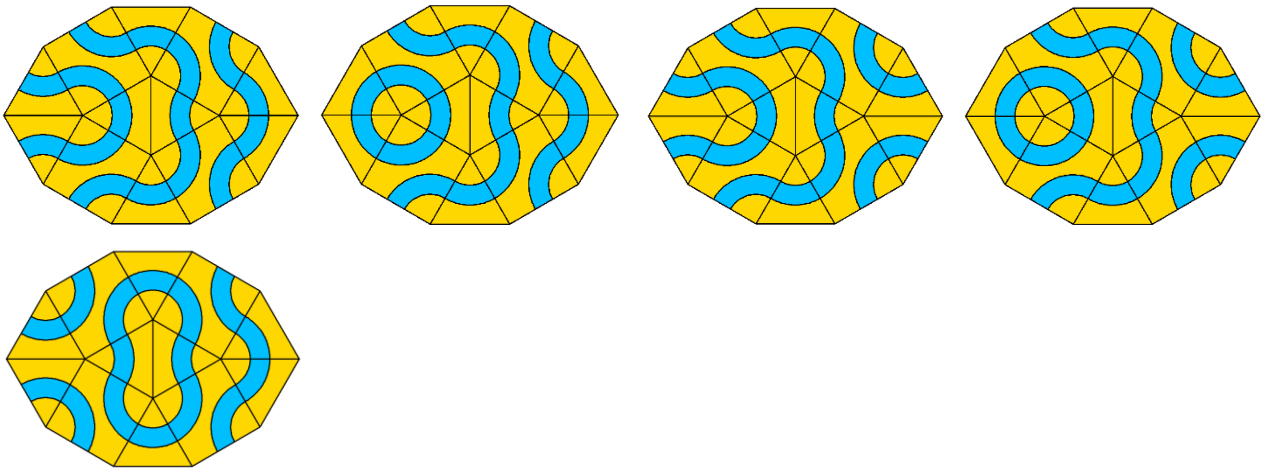
– Auslegungen mit zwei zueinander senkrechten Symmetrieachsen (und daher auch punktsymmetrisch):

– Auslegungen mit einer vertikalen Symmetrieachse:

– Auslegungen mit einer horizontalen Symmetrieachse:



und entsprechend jeweils die an einer vertikalen Achse gespiegelten Versionen.

zu A 1.16:

Eine solche Auslegung wäre nur möglich, wenn man auch solche zulässt, bei denen die blauen Bänder im Innern enden. Dies kann man am innen liegenden Dreieck erkennen: Egal, wie man diese Fliese legt, bei einer der benachbarten quadratischen Fliesen endet ein blaues Band am Rand dieses Dreiecks.

zu A 1.17:

((eigene Muster))

zu A 1.18:

Begründung wie bei A 1.16

zu A 1.19:

((eigene Muster))

zu A 1.20:

nicht symmetrisch (F1): F, G, J, L, P, Q, R, Y, a, b, e, f, g, h, j, k, m, r, t, y

zu einer horizontalen Achse symmetrisch (F2): B, C, D, E, K, c,

zu einer vertikalen Achse symmetrisch (F3): A, M, T, U, V, W, i, v, w,

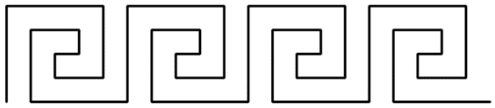
punktsymmetrisch (F4): H, I, N, O, S, X, Z, o, s, x, z / Paar Punktspiegelung: n – u

zu zwei Achsen symmetrisch (F7): H, I, O, X, l, o, x

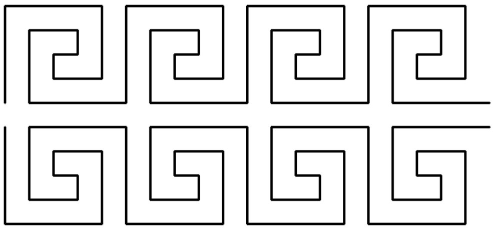
Paar Achsenspiegelung (F5/F6): b d – p q

zu A 1.21:

F1:

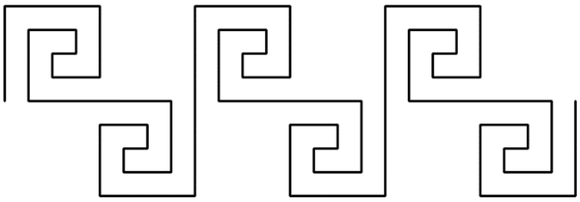


F2:

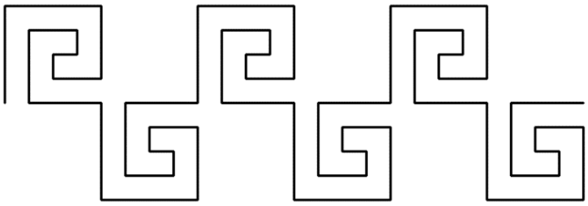


F3:

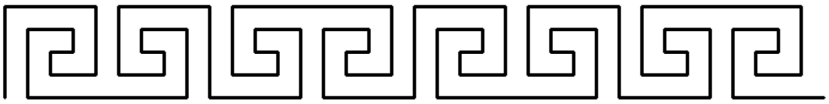
F4:



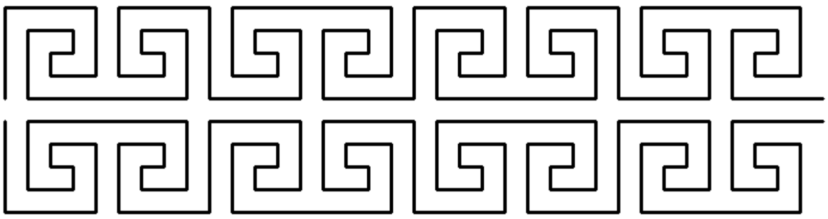
F5:



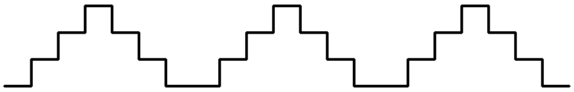
F6:



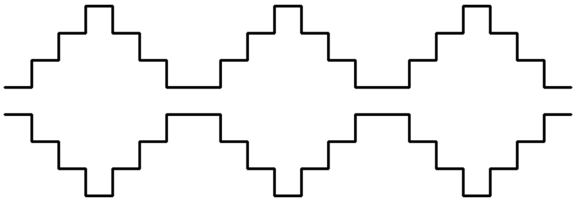
F7:



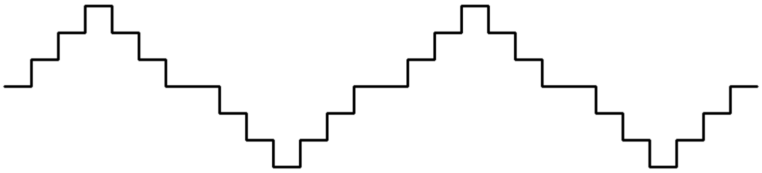
F1/F3:



F2/F7:

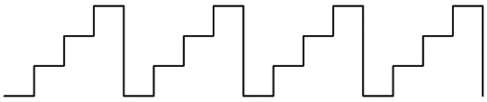


F4/F5/F6:

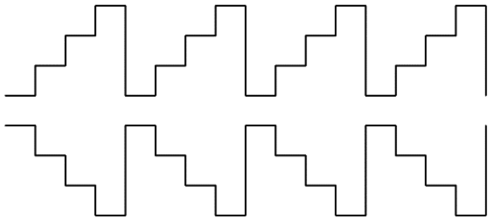


zu A 1.22:

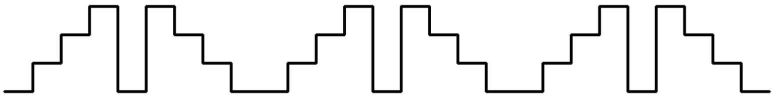
F1:



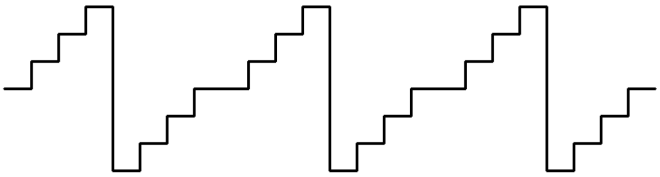
F2:



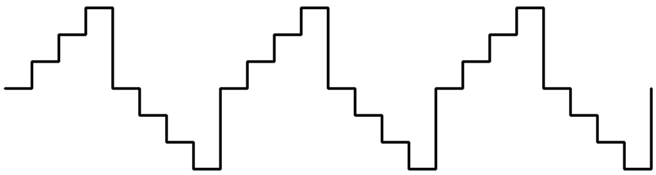
F3:



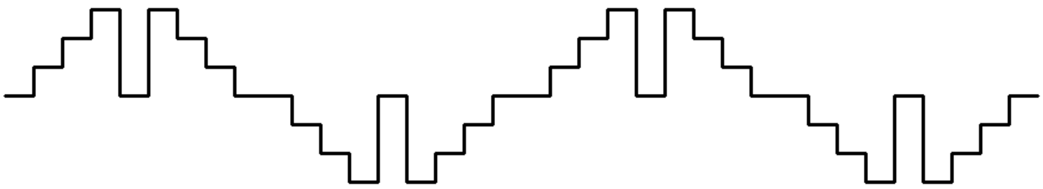
F4:



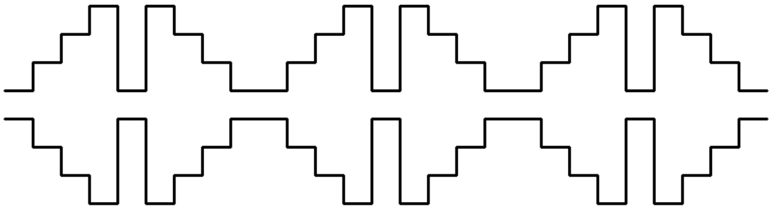
F5:



F6:



F7:



((Rest selbst))

zu A 1.23:

a. Das Ausgangsmuster besteht aus zwei Fliesen vom Typ A sowie zwei Fliesen vom Typ B (die man durch Spiegelung an einer vertikalen Achse erhält). Somit hat man also ein Muster aus vier Fliesen, das wiederholt wird (Typ F3).

b. Das Ausgangsmuster besteht aus vier Fliesen $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$, das wiederholt wird (Typ F1).

c. Das Ausgangsmuster besteht aus vier Fliesen $\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$, das an einer vertikalen Achse gespiegelt wird.

Somit hat man also ein Muster aus acht Fliesen, das wiederholt wird (Typ F3)

zu A 1.24:

Beide Friese können als Typ F4-Muster aufgefasst werden.

zu A 1.25:

mögliche Einordnungen (bei symmetrischen Ausgangsfiguren sind verschiedene Interpretationen möglich)

a. Elemente punktsymmetrisch: Typ F4

b. Elemente achsensymmetrisch zu einer vertikalen Achse: Typ F3

c. Elemente achsensymmetrisch zu einer horizontalen Achse: Typ F2

d. nicht-symmetrische Elemente: Typ F1

e. nicht-symmetrische Elemente an horizontaler Achse gespiegelt und verschoben: Typ F5

f. punktsymmetrische Figur (bestehend aus je zwei Elementen): Typ F4

g. punktsymmetrische Figur (bestehend aus je zwei Elementen): Typ F4

h. Element an horizontaler Achse gespiegelt und verschoben: Typ F5

i. Elemente achsensymmetrisch zu einer horizontalen Achse: Typ F2

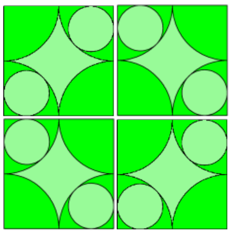
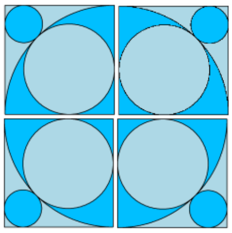
j. Elemente achsensymmetrisch zu einer horizontalen Achse: Typ F2

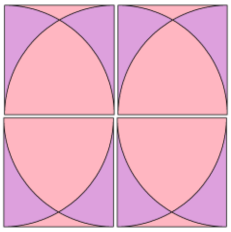
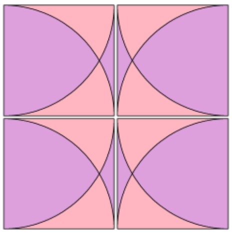
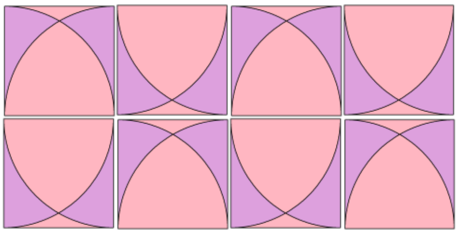
k. punktsymmetrische Figur (bestehend aus je zwei Elementen): Typ F4

l. Elemente achsensymmetrisch zu einer vertikalen Achse: Typ F3

zu A 1.26:

Beispiele von Mustern:

zu A 1.27:

erste Reihe: Wiederholung von [B A]

zweite Reihe: Wiederholung von [C D]

zu A 1.28:

Andere Kombinationen können gelegt werden, beispielsweise

F1: Wiederholung von $[A]$, $[B]$, $[C]$

F3: Wiederholung von $[A \quad D]$

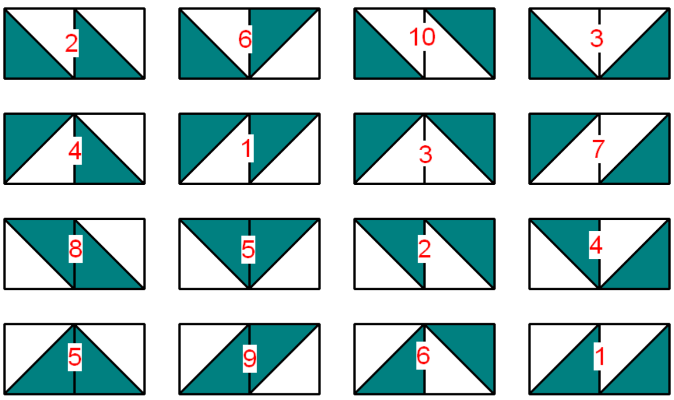
F2: Wiederholung von $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$

F4: Wiederholung von $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$,

F7: Wiederholung von $\begin{bmatrix} A & D \\ C & B \end{bmatrix}$.

zu A 1.29:

Die von Truchet bezeichneten 10 Fälle sind in die Kombinationstabelle eingetragen. Fliesenpaare, die durch eine 180°-Drehung ineinander übergehen, brauchen nicht unterschieden zu werden.



zu A 1.30:

a. Die in den Abbildungen dargestellten Muster sind

$\begin{bmatrix} D & A \\ B & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} B & C \\ C & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & C \\ A & D \end{bmatrix}.$

b. Muster von 2 × 2-Quadraten sind als gleich anzusehen, wenn sie durch eine Drehung ineinander überführt werden können.

Typ 1: $\begin{bmatrix} X & X \\ X & X \end{bmatrix}$, wobei X ∈ {A, B, C, D}, mit 4 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 2: $\begin{bmatrix} X & X \\ Y & X \end{bmatrix}$, wobei X, Y ∈ {A, B, C, D}, mit 6 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 3: $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}$, wobei X, Y ∈ {A, B, C, D}, mit 6 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 4: $\begin{bmatrix} X & Y \\ X & Y \end{bmatrix}$, wobei X, Y ∈ {A, B, C, D}, mit 6 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 5: $\begin{bmatrix} X & X \\ Z & Y \end{bmatrix}$, wobei X, Y, Z ∈ {A, B, C, D}, mit 12 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 6: $\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & X \end{bmatrix}$, wobei X, Y, Z ∈ {A, B, C, D}, mit 12 verschiedenen Ausprägungen,

Typ 7: $\begin{bmatrix} X & Y \\ U & Z \end{bmatrix}$, wobei X, Y, Z, U ∈ {A, B, C, D}, mit 24 verschiedenen Ausprägungen,

insgesamt also 70 verschiedene Muster von 2 × 2-Quadraten.

zu A 1.31:

Muster links: abwechselnd $\begin{bmatrix} C & B \\ D & A \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$

Muster rechts: abwechselnd $\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix}$

zu A 1.32:

links: Das links oben stehende Muster aus 2 × 2-Quadraten $\begin{bmatrix} D & A \\ C & D \end{bmatrix}$ wird gedreht, sodass nacheinander (im Uhrzeigersinn) die Muster $\begin{bmatrix} D & A \\ A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B & A \\ C & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D & C \\ C & B \end{bmatrix}$ entstehen. Das Muster ist 4-fach achsensymmetrisch und punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des 4 × 4-Quadrats.

rechts: Das links oben stehende Muster aus 2 × 2-Quadraten $\begin{bmatrix} B & D \\ D & B \end{bmatrix}$ wird um 180° gedreht und findet sich rechts unten als $\begin{bmatrix} D & B \\ B & D \end{bmatrix}$ wieder. Das rechts oben stehende Muster aus 2 × 2-Quadraten $\begin{bmatrix} C & A \\ A & C \end{bmatrix}$ wird um 180° gedreht und findet sich links unten als $\begin{bmatrix} A & C \\ C & A \end{bmatrix}$ wieder. Das Muster ist achsensymmetrisch zu den Diagonalen des 4 × 4-Quadrats.

b. ((eigene Muster))

zu A 1.33:

Alle drei Muster zeichnen sich durch eine 4-fache Achsensymmetrie und eine Punktsymmetrie zum Mittelpunkt aus. Das Muster aus 3 × 3-Quadraten … wird im Uhrzeigersinn jeweils um 90° gedreht:

links: $\begin{bmatrix} B & D & A \\ D & B & D \\ C & D & B \end{bmatrix}$, Mitte: $\begin{bmatrix} D & A & D \\ C & B & B \\ D & B & D \end{bmatrix}$, rechts: $\begin{bmatrix} D & B & C \\ B & D & A \\ A & C & D \end{bmatrix}$.

zu A 1.34:

((eigene Simulationen))

zu A 1.35:

In beiden Abbildungen handelt es sich um das Muster $\begin{bmatrix} A & D \\ B & C \end{bmatrix}$ – in beiden Varianten.

zu A 1.36:

((eigene Simulationen))